Éléments de correction TD 2
Probabilités conditionnelles et indépendance

Exercice 1.
Une urne contient initialement une boule rouge. Vous lancez un dé équilibré :

— si vous faites un 5 ou un 6, vous tirez une boule au hasard dans l'urne et le jeu s'arrête.

— sinon, vous rajoutez une boule blanche dans l'urne et relancez le dé.

Si la boule que vous tirez est rouge, vous gagnez la partie et sinon, vous la perdez. Ce jeu vous est-il favorable ?
Pour y répondre, on note R l'événement : "vous tirez une boule rouge", A_n l'événement "le jeu s'arrête au n^{e} tour" et A l'événement "le jeu s'arrête après un nombre fini de tours".

1. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$ en fonction de n et montrer que A est un événement presque sûr.
2. Calculer $\mathbb{P}(R \,|\, A_n)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(R)$ et conclure.
   Indication : on pourra utiliser l'égalité $-\ln(1-x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ valable pour tout réel x tel que $|x| < 1$.

Exercice 2.
Un laboratoire a mis au point un test pour détecter une maladie qui touche 0.1% de la population. Le test est fiable à 99%, c'est à dire que pour une personne infectée, le résultat du test est positif dans 99% des cas et que pour une personne saine, il est positif dans 1% des cas.

1. Un individu est testé positivement. Quelle est la probabilité qu'il soit en fait sain ?
2. Inversement, quelle est la probabilité qu'un individu testé négativement soit en fait infecté ?
3. Quelle est la probabilité qu'un individu testé deux fois positifs pour deux tests fiables à 99% et indépendants soit en fait sain ?

Exercice 3.
On lance 3 fois une pièce de monnaie équilibrée. On note B_1 : «la pièce tombe du même côté au $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ lancers», B_2 : «la pièce tombe du même côté au 1^{er} et $3^{\text{ème}}$ lancers» et B_3 : «la pièce tombe du même côté au 1^{er} et $2^{\text{ème}}$ lancers».

1. Construire un espace probabilisé qui modélise trois lancers de pièce indépendants.
2. Montrer que B_1, B_2 et B_3 sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

Correction exercice 3 :

1. On peut considérer l'espace probabilisé $\Omega = \{P, F\}^3$ muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.
2. On peut écrire $B_1 = \{P, F\} \times \{P\} \times \{P\} \bigcup \{P, F\} \times \{F\} \times \{F\}$. On a $|B_1| = 2 + 2 = 4$ puis $\mathbb{P}(B_1) = 4/8 = 1/2$. De même pour B_2 et B_3. On en conclut que

$$\boxed{\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_3) = 1/2}$$

Maintenant, $B_1 \cap B_2$ est égal à l'événement "la pièce tombe du même côté au 1$^{\text{er}}$, 2$^{\text{e}}$ et 3$^{\text{e}}$ lancers" d'où $B_1 \cap B_2 = \{(P,P,P),(F,F,F)\}$. On a donc $|B_1 \cap B_2| = 2$ puis $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = 2/8 = 1/4$. De même pour $B_1 \cap B_3$ et pour $B_2 \cap B_3$. On en déduit que

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = 1/4 = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(B_2) \\ \mathbb{P}(B_1 \cap B_3) = 1/4 = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(B_3) \\ \mathbb{P}(B_2 \cap B_3) = 1/4 = \mathbb{P}(B_2)\,\mathbb{P}(B_3) \end{array}}$$

Enfin, l'événement $B_1 \cap B_2 \cap B_3$ est aussi égal à l'événement "la pièce tombe du même côté au 1$^{\text{er}}$, 2$^{\text{e}}$ et 3$^{\text{e}}$ lancers" d'où

$$\boxed{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = 1/4 \neq \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(B_2)\,\mathbb{P}(B_3)}$$

<u>Conclusion :</u> les événements B_1, B_2 et B_3 sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

Exercice 4.
On dispose de deux cartes, l'une est noire des deux côtés, l'autre a un côté noir et un côté rouge. On tire uniformément une des cartes, et on observe que son recto est noir. Quelle est la probabilité que son verso soit rouge ?

<u>Correction exercice 4</u> : Désignons respectivement par R_1 et N_1 les faces rouge et noire de la carte avec deux côtés différents et N_2 et N_3 les deux faces noires de la carte avec deux côtés identiques. Lorsque l'on dit que l'on tire une carte uniformément au hasard, on suppose que l'on observe une des faces R_1, N_1, N_2, N_3 avec même probabilité. On peut donc représenter l'expérience par l'espace probabilisé $\Omega = \{R_1, N_1, N_2, N_3\}$ muni de la probabilité uniforme. On s'intéresse à la probabilité que, sachant que l'on a tiré une des faces N_1, N_2 ou N_3, l'autre face de la carte soit rouge. Autrement dit quelle est la probabilité que l'on ait tiré la face N_1 sachant que l'on a tiré une des 3 faces N_1, N_2 ou N_3. Il y a donc une possibilité sur 3 d'avoir tiré la face N_1 car chacune des 3 faces a pu être tirée avec la même probabilité. Cela peut aussi se montrer par le calcul :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\{N_1\} \,\middle|\, \{N_1, N_2, N_3\}\right) &= \frac{\mathbb{P}(\{N_1\} \cap \{N_1, N_2, N_3\})}{\mathbb{P}(\{N_1, N_2, N_3\})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{N_1\})}{\mathbb{P}(\{N_1, N_2, N_3\})} \\ &= \frac{1/4}{3/4} = 1/3. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Sachant que l'on a tiré une face noire, la probabilité que le verso soit rouge est } 1/3.}$$

Exercice 5.
Une personne a deux enfants. Lorsqu'on lui demande si elle a une fille, elle répond «Oui !»
Quelle est la probabilité que cette personne ait deux filles ?
(*) Même question si cette personne répond «Oui !» à la question «Avez-vous une fille née un Lundi ?». Même question si cette personne répond «Oui !» à la question «Avez-vous une fille née un Lundi ?»

<u>Correction exercice 5</u> : On peut représenter l'expérience par l'espace probabilisé $\Omega = \{F, G\}^2$ muni de la probabilité uniforme. D'après la réponse de la personne à la question posée, on sait qu'elle a soit deux filles soit une fille aînée et un garçon soit un garçon aîné et une fille. On s'intéresse donc à la probabilité conditionnelle suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\{(F,F)\} \,\middle|\, \{(F,F),(F,G),(G,F)\}\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(\{(F,F)\} \cap \{(F,F),(F,G),(G,F)\}\right)}{\mathbb{P}\left(\{(F,F),(F,G),(G,F)\}\right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\{(F,F))\}\right)}{\mathbb{P}\left(\{(F,F),(F,G),(G,F)\}\right)} \\
&= \frac{1/4}{3/4} = 1/3.
\end{aligned}$$

Il y a donc une probabilité 1/3 que la personne ait deux filles sachant qu'elle a répondu "Oui" à la question "Avez-vous une fille ?".

Maintenant, on a besoin d'introduire un espace probabilisé qui donne aussi l'information du jour de naissance de chaque enfant. On considère donc $\Omega = \{F, G\}^2 \times \{1, \dots, 7\}^2$ muni de la probabilité uniforme où les jours de la semaine sont associés aux numéros entre 1 et 7. Par exemple, l'événement élémentaire $(F, G, 1, 4)$ signifie que la personne a une fille aînée née un Lundi et un garçon né un Jeudi.
Notons F_i l'événement "le i^{e} enfant est une fille" ainsi que L_i l'événement "le i^{e} endant est né un Lundi". Mathématiquement, $F_1 = \{F\} \times \{F, G\} \times \{1, \dots, 7\}^2$ et $L_1 = \{F, G\}^2 \times \{1\} \times \{1, \dots, 7\}$ et de même pour F_2 et L_2. Ces événements sont bien sûr indépendant (EXERCICE : le vérifier par le calcul). On souhaite donc calulé la probabilité conditionnelle suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(F_1 \cap F_2 \,\middle|\, (F_1 \cap L_1) \cup (F_2 \cap L_2)\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(F_1 \cap F_2 \cap ((F_1 \cap L_1) \cup (F_2 \cap L_2))\right)}{\mathbb{P}\left((F_1 \cap L_1) \cup (F_2 \cap L_2)\right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left((F_1 \cap F_2 \cap L_1) \cup (F_1 \cap F_2 \cap L_2)\right)}{\mathbb{P}\left((F_1 \cap L_1) \cup (F_2 \cap L_2)\right)}
\end{aligned}$$

Utilisons ensuite la formule du Crible pour calculer le numérateur :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left((F_1 \cap F_2 \cap L_1) \cup (F_1 \cap F_2 \cap L_2)\right) &= \mathbb{P}\left(F_1 \cap F_2 \cap L_1\right) + \mathbb{P}\left(F_1 \cap F_2 \cap L_2\right) - \mathbb{P}\left(F_1 \cap F_2 \cap L_1 \cap L_2\right) \\
&= \mathbb{P}(F_1)\,\mathbb{P}(F_2)\,\mathbb{P}(L_1) + \mathbb{P}(F_1)\,\mathbb{P}(F_2)\,\mathbb{P}(L_2) - \mathbb{P}(F_1)\,\mathbb{P}(F_2)\,\mathbb{P}(L_1)\,\mathbb{P}(L_2) \\
&= \mathbb{P}(F_1)\,\mathbb{P}(F_2)\left(\mathbb{P}(L_1) + \mathbb{P}(L_2) - \mathbb{P}(L_1)\,\mathbb{P}(L_2)\right) \\
&= 1/2 \times 1/2 \times (1/7 + 1/7 - 1/7 \times 1/7) \\
&= \frac{13}{4 \times 49},
\end{aligned}$$

où on utilise l'indépendance dans la deuxième égalité. De même pour le dénominateur,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left((F_1 \cap L_1) \cup (F_2 \cap L_2)\right) &= \mathbb{P}(F_1 \cap L_1) + \mathbb{P}(F_2 \cap L_2) - \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap L_1 \cap L_2) \\
&= \mathbb{P}(F_1)\,\mathbb{P}(L_1) + \mathbb{P}(F_2)\,\mathbb{P}(L_2) - \mathbb{P}(F_1)\,\mathbb{P}(F_2)\,\mathbb{P}(L_1)\,\mathbb{P}(L_2) \\
&= 1/2 \times 1/7 + 1/2 \times 1/7 - 1/2 \times 1/2 \times 1/7 \times 1/7 \\
&= 1/2 \times 1/7 \times (1 + 1 - 1/2 \times 1/7) \\
&= 1/2 \times 1/7 \times 27/14 \\
&= \frac{27}{4 \times 49}.
\end{aligned}$$

D'où
$$\mathbb{P}\left(F_1 \cap F_2 \,\middle|\, (F_1 \cap L_1) \cup (F_2 \cap L_2)\right) = \frac{13}{27}$$

Sachant que la personne a répondu "Oui" à la question "Avez-vous une fille née un Lundi", la probabilité que la personne ait deux filles est donc de 13/27.

La raison pour laquelle on trouve ce résultat étonnant proche de 1/2 est qu'il y a plus de chance (un tout petit peu moins de deux fois plus de chance) d'avoir une fille née un Lundi si on a deux filles que si on en n'a qu'une seule. Cela compense le fait qu'il y a deux fois plus de chance d'avoir une fille et un garçon que d'avoir deux filles.

Pour la dernière question, on considère que chaque enfant reçoit un prénom aléatoire parmi tous les prénoms existants (supposons qu'il y en a N différents pour les filles et autant différents (pour simplifier) pour les garçons et que N est immense). Supposons que "Mélanie" correspond au prénom numéro 1 pour les filles. Pour simplifier, faisons aussi l'hypothèse que chaque prénom a la même chance d'être attribué. On va donc considérer l'espace probabilisé $\Omega = \{F, G\}^2 \times \{1, \ldots, N\}^2$ et noter M_i l'événement : "le i^{e} enfant a le prénom numéro 1". Remarquez que l'événement $F_i \cap M_i$ est égal à : "le i^{e} enfant est une fille qui s'appelle Mélanie". En reprenant les calculs de la question précédente, on trouve

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(F_1 \cap F_2 \,\middle|\, (F_1 \cap M_1) \cup (F_2 \cap M_2)\right) = \frac{\mathbb{P}\left((F_1 \cap F_2 \cap M_1) \cup (F_1 \cap F_2 \cap M_2)\right)}{\mathbb{P}\left((F_1 \cap M_1) \cup (F_2 \cap M_2)\right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap M_1) + \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap M_2) - \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap M_1 \cap M_2)}{\mathbb{P}(F_1 \cap L_1) + \mathbb{P}(F_2 \cap L_2) - \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap L_1 \cap L_2)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}(M_1) + \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}(M_2) - \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}(M_1)\mathbb{P}(M_2)}{\mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(M_1) + \mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}(M_2) - \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}(M_1)\mathbb{P}(M_2)} \\
&= \frac{1/4 \times (1/N + 1/N - (1/N)^2)}{1/(2N) + 1/(2N) - 1/(2N)^2} \\
&= \frac{2 - 1/N}{4 - 1/N} \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

On peut donc raisonnablement affirmer que

Sachant que la personne a répondu "Oui" à la question "Avez-vous une fille qui s'appelle Mélanie", la probabilité que la personne ait deux filles est environ de 1/2.

On peut montrer le même résultat si tous les prénoms n'ont pas la même probabilité mais en supposant seulement que le prénom Mélanie a une probabilité très faible d'être attribué (ce qui est le cas).

Entraînements QCM :

Exercice 6.
Soient A, B, C trois événements de probabilité non nulle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On note $\mathbb{P}_C$ la probabilité définie par $\mathbb{P}_C[E] = \mathbb{P}[E|C]$. À quelle condition les événements A et B sont-ils indépendants pour $\mathbb{P}_C$?

a) A et B sont tous deux indépendants de C pour $\mathbb{P}$.
b) A, B, C sont deux à deux indépendants pour $\mathbb{P}$.
c) A, B, C sont mutuellement indépendants pour $\mathbb{P}$.
d) A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}$.

Correction exercice 6 : Les événements A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}_C$ si et seulement si

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_C(A\cap B) = \mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_C(B) \Leftrightarrow \frac{\mathbb{P}(A\cap B\cap C)}{\mathbb{P}(C)} &= \frac{\mathbb{P}(A\cap C)}{\mathbb{P}(C)}\frac{\mathbb{P}(B\cap C)}{\mathbb{P}(C)}\\ \Leftrightarrow \mathbb{P}(A\cap B\cap C)\,\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(A\cap C)\,\mathbb{P}(B\cap C)\,.\end{aligned}$$

En toute généralité, il y a que avec l'hypothèse "c)" que cela est vrai.

Attention : Dans l'exercice 2 question 3), l'indépendance entre les résultats des deux tests doit être comprise comme conditionnelle à l'état de la personne sur laquelle ont fait le test (malade ou non) donc sont indépendants pour $\mathbb{P}_{\text{"malade"}}$ ou $\mathbb{P}_{\text{"sain"}}$ mais pas pour $\mathbb{P}$. En effet, le résultats des deux tests ne sont pas indépendants si ils sont effectués successivement sur une personne prise au hasard dans la population (si le premier test est négatif, cela augmente la probabilité a posteriori que la personne testée soit malade et donc augmente la probabilité que le deuxième test soit également positif). Je vous laisse le soin d'y méditer.

Exercice 7.
On considère deux espaces probabilisés discrets $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ et $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$, et on définit leur espace produit

$$(\Omega, \mathbb{P}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2).$$

Lesquelles des propositions suivantes sont vraies ?
a) Pour tous $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega_1, \omega_2\}) = \mathbb{P}(\{\omega_1\})\,\mathbb{P}(\{\omega_2\})$.
b) Pour tous $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega_1, \omega_2\}) = \mathbb{P}_1[\{\omega_1\}]\mathbb{P}_2[\{\omega_2\}]$.
c) Pour tous $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}_1[\{\omega_1\}]\mathbb{P}_2[\{\omega_2\}]$.
d) Pour tous $A_1 \subset \Omega_1$ et $A_2 \subset \Omega_2$, A_1 et A_2 sont indépendants.
e) Pour tous $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$, A et B sont indépendants.
f) Pour tous $A_1 \subset \Omega_1$ et $A_2 \subset \Omega_2$, $A_1 \times \Omega_2$ et $\Omega_1 \times A_2$ sont indépendants.

Correction exercice 7 :
a) FAUX : prendre $\omega_1 = \omega_2$ par exemple...
b) FAUX : $\mathbb{P}_1\{\omega_1\}$ n'existe pas (car $\omega_1 \in \Omega \neq \Omega_1$))
c) VRAI par définition
d) FAUX : cela n'a pas de sens de parler d'indépendance de deux événements qui n'appartiennent pas au même univers Ω.
e) FAUX : prendre $A = B$ par exemple...

f) VRAI car

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A_1 \times \Omega_2 \cap A_2 \times \Omega_1\right) &= \mathbb{P}\left(A_1 \times A_2\right) \\
&= \sum_{\omega \in A_1 \times A_2} \mathbb{P}\left(\{\omega\}\right) \\
&= \sum_{\omega_1 \in A_1, \omega_2 \in \times A_2} \mathbb{P}\left(\{(\omega_1, \omega_2)\}\right) \\
&= \sum_{\omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2} \mathbb{P}_1(\{\omega_1\})\mathbb{P}_2(\{\omega_2\}) \\
&= \sum_{\omega_1 \in A_1} \mathbb{P}_1(\{\omega_1\}) \times \sum_{\omega_2 \in A_2} \mathbb{P}_2(\{\omega_2\}) \\
&= \mathbb{P}_1(A_1)\mathbb{P}_2(A_2) \\
&= \mathbb{P}\left(A_1 \times \Omega_2\right) \mathbb{P}\left(A_2 \times \Omega_1\right)
\end{aligned}
$$