# Éléments de correction TD 4

Tribus et Mesures

---

**Exercice 1.**
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A, B \in \mathcal{A}$. On définit la variable aléatoire suivante :

$$X = a\mathbb{1}_A + b\mathbb{1}_B,$$

où $a, b > 0$. Décrire $\sigma(X)$, et donner la loi de $X$.

**Exercice 2.**
On concisère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,2], \mathcal{B}([0,2]), \lambda/2)$ et

$$X : \begin{cases} \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega \longmapsto \max(\omega, 1/3) \end{cases}$$

Montrer que $X$ est une variable aléatoire réelle. Calculer $\sigma(X)$, la tribu engendrée par $X$ et donner la loi de $X$.

**Exercice 3.** ***Nombres univers***.
Un nombre univers est un nombre telle que sa suite de décimales contient n'importe qu'elle succession de chiffres de longueur finie (comme votre date de naissance par exemple). On se propose de montrer qu'un nombre tiré réel pris uniformément au hasard entre 0 et 1 est presque sûrement un nombre univers.
On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), \lambda)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\omega \in [0,1[$, on note $X_n(\omega)$ la $n^{\mathrm{e}}$ decimale de $\omega$.

1. Montrer que $X_n$ est une variable aléatoire discrète et donner sa loi.
2. Montrer que la famille de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est indépendante.
3. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $s = s_1, \dots, s_\ell \in \{0, \dots, 9\}^\ell$ une succession finie de chiffres de longueur $\ell$. On définit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'événement

$$A_k(s) = \bigcap_{i=1}^{\ell} \{X_{i+k\ell} = s_i\}.$$

   Calculer $\mathbb{P}(A_k(s))$ et montrer que les $(A_k(s))_{k\in\mathbb{N}}$ sont indépendants.
4. Calculer $\mathbb{P}(\limsup_k A_k(s))$.
5. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des successions de chiffres de longueur finie. Montrer que $\mathcal{S}$ est dénombrable.
6. En déduire que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{s\in\mathcal{S}} \limsup_k A_k(s)\right) = 1$ et conclure.

**<u>Correction exercice 3</u> :**

1. Vu en classe.
2. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$, $n_1 \leq \cdots \leq n_\ell$ des entiers naturels que l'on peut supposer ranger dans l'ordre croissant et $k_1, \ldots, k_\ell$ des nombres entiers entre 0 et 9. On vérifie que

$$\{X_{n_1} = k_1\} \cap \cdots \cap \{X_{n_\ell} = k_\ell\} = \bigsqcup_{\substack{(x_1,\ldots,x_{n_\ell}) \in [\![0,9]\!]^{n_\ell} \\ \forall i \in [\![1,\ell]\!],\, x_{n_i} = k_i}} [0.x_1 \cdots x_{n_\ell},\, 0.x_1 \cdots (x_{n_\ell}+1)[,$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_{n_1} = k_1, \cdots, X_{n_\ell} = k_\ell\right) &= \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_{n_\ell}) \in [\![0,9]\!]^{n_\ell} \\ \forall i \in [\![1,\ell]\!],\, x_{n_i} = k_i}} \lambda\left([0.x_1 \cdots x_{n_\ell},\, 0.x_1 \cdots (x_{n_\ell}+1)[\right) \\ &= \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_{n_\ell}) \in [\![0,9]\!]^{n_\ell} \\ \forall i \in [\![1,\ell]\!],\, x_{n_i} = k_i}} 10^{-n_\ell} \\ &= 10^{n_\ell - \ell} \times 10^{-n_\ell} \\ &= 10^{-\ell} = \prod_{i=1}^{\ell} \mathbb{P}\left(X_{n_i} = k_i\right),\end{aligned}$$

donc la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est indépendante.

3. Par indépendance, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A_k(s)\right) &= \mathbb{P}\left(X_{1+k\ell} = s_1, \cdots, X_{\ell+k\ell} = s_\ell\right) \\ &= \prod_{i=1}^{\ell} \mathbb{P}\left(X_{i+k\ell} = s_i\right) \\ &= 10^{-\ell}.\end{aligned}$$

De plus, par théorème de rassemblement d'éléments aléatoires indépendants, comme les ensembles $J_k := \{i + k\ell\}_{1\leq i\leq \ell}$ sont deux à deux disjoints, on a que les variables $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}} = ((X_{i+k\ell})_{1\leq i\leq\ell})_{k\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes. Or

$$A_k(s) = \{Y_k = (s_1, \ldots, s_\ell)\}$$

Par indépendance des $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on en déduit que les $(A_k(s))_{k\in\mathbb{N}}$ sont indépendants.

4. Par définition,

$$\limsup_k A_k(s) = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq N} A_k(s).$$

Or, cette intersection est décroissante. On a donc

$$\mathbb{P}\left(\limsup_k A_k(s)\right) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq N} A_k(s)\right).$$

Maintenant, on a que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq N} A_k(s)\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq N} \overline{A_k(s)}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{N'\geq N} \bigcap_{k=N}^{N'} \overline{A_k(s)}\right) \\
&= 1 - \lim_{N'\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=N}^{N'} \overline{A_k(s)}\right) && \text{par intersection décroissante} \\
&= 1 - \lim_{N'\to\infty} \mathbb{P}\left(\overline{A_k(s)}\right)^{N'-N+1} && \text{par indépendance des } A_k(s) \\
&= 1 - \lim_{N'\to\infty} (1 - 10^{-\ell}))^{N'-N+1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\limsup_k A_k(s)\right) = 1.}$$

Autrement dit, toute succession $s$ de longueur finie fixée apparaît presque sûrement une infinité de fois dans les décimales d'un nombre pris uniformément au hasard entre 0 et 1.

5. On a

$$\mathcal{S} = \bigsqcup_{\ell\in\mathbb{N}^*} [\![0,9]\!]^\ell.$$

Or une union dénombrable d'ensemble dénombrables est dénombrable. Donc $\mathcal{S}$ est dénombrable.

6. On a donc que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{s\in\mathcal{S}} \limsup_k A_k(s)\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \overline{\limsup_k A_k(s)}\right) \\
&\geq 1 - \sum_{s\in\mathcal{S}} \mathbb{P}\left(\overline{\limsup_k A_k(s)}\right) && \text{car } \mathcal{S} \text{ est dénombrable} \\
&= 1 - \sum_{s\in\mathcal{S}} (1 - \mathbb{P}\left(\limsup_k A_k(s)\right)) \\
&= 1 - \sum_{s\in\mathcal{S}} 0 = 1.
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{s\in\mathcal{S}} \limsup_k A_k(s)\right) = 1.}$$

Autrement dit, presque sûrement, un nombre pris uniformément au hasard entre 0 et 1 contiendra, dans ses décimales, toute succession de longueur finie, et ce, une infinité de fois.

**Exercice 4.** ***Simulation d'une loi uniforme par une suite de piles ou faces.***
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeur dans $\{0,1\}$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 1) = 1/2$. On définit

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{X_n}{2^n}.$$

1. Montrer que $S$ est une variable aléatoire réelle.
2. Montrer que pour tout $(x_n)_{n\in\mathbb{N}*}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}*} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}*}$, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ n'est pas égale à 1 à partir d'un certain rang, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y_n}{2^n} \Longleftrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}*} \prec (y_n)_{n\in\mathbb{N}*}$$

   où $\prec$ est l'ordre lexicographique définit par

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}*} \prec (y_n)_{n\in\mathbb{N}*} \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \quad x_n < y_n \text{ et } \forall k < n,\ x_k = y_k.$$

3. Soit $y \in [0,1]$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ son écriture décimale en base 2 i.e $y = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y_n}{2^n}$. Calculer $\mathbb{P}(X_n < y_n \text{ et } \forall k < n,\ X_k = y_k)$ en fonction de $n$ et de $y_n$.
4. Montrer que $\mathbb{P}(\liminf_n \{X_n = 1\}) = 0$ puis déduire que pour tout $y \in [0,1]$,

$$\mathbb{P}(S < y) = y.$$

5. Quelle est la loi de $S$ ?

<u>**Correction exercice 4**</u> **:** Exercice technique. Correction sur demande, pendant un TD.

**Exercice 5.**
Soit $X$ une variable aléatoire positive.

1. Montrer que l'application $x \mapsto \mathbb{P}(X > x)$, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est mesurable.
2. Écrire $\mathbb{P}(X > x)$ comme l'intégrale (sous $\mathbb{P}$ d'une indicatrice).
3. Montrer que

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)\, d\lambda(x),$$

   où $\lambda$ est la mesure de Lebesgue.
4. Comment s'écrit l'expression précédente dans le cas où $X$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ ?

**<u>Correction exercice 5</u> :**

1. Cette application est décroissante, donc mesurable (de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$). En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'image réciproque de $]-\infty, x[$ est un intervalle de la forme $[y, +\infty[$ ou $]y, +\infty[$, qui est donc un borélien. Puisque les intervalles $]-\infty, x[$ engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on en conclut que cette application est bien mesurable.
2. On peut écrire
$$\mathbb{P}(X > x) = \int_\Omega \mathbb{1}_{X(\omega)>x} \mathrm{d}\,\mathbb{P}(\omega).$$
3. D'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives (pas besoin d'hypothèse d'intégrabilité),
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)\, d\lambda(x) &= \int_0^\infty \left( \int_\Omega \mathbb{1}_{X(\omega)>x} \,\mathrm{d}\,\mathbb{P}(\omega) \right) d\lambda(x) \\ &= \int_\Omega \left( \int_0^\infty \mathbb{1}_{X(\omega)>x} \, d\lambda(x) \right) \mathrm{d}\,\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_\Omega \left( \int_0^{X(\omega)} 1 \, d\lambda(x) \right) \mathrm{d}\,\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_\Omega X(\omega) \mathrm{d}\,\mathbb{P}(\omega) \\ &= \mathbb{E}[X].\end{aligned}$$
4. Si $X$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [n, n+1[$, on a $\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(X > n)$. Ainsi,
$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)\, d\lambda(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_n^{n+1} \mathbb{P}(X > n)\, dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n),$$