TD 4
Tribus et Mesures

1 Tribus

Exercice 1.
Soit Ω un univers, et A, B des parties de Ω.

1. Quelle est la tribu engendrée par A ?
2. Quelle est la tribu engendrée par A et B ?

* 3. (à faire uniquement si on a fini le TD) : Soit Ω un univers, et $A_1, \ldots, A_n$ des parties de Ω. Quel est le nombre maximal d'éléments que peut avoir la tribu engendrée par $\{A_1, \ldots, A_n\}$?

Exercice 2. *Entraînement QCM.*
Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\Omega', \mathcal{A}')$ deux espaces probabilisables, et $f : \Omega \to \Omega'$. Lesquelles des affirmations ci-dessous sont vérifiées ?

a) $\{f^{-1}(A'), A' \in \mathcal{A}'\}$ est une tribu sur Ω.

b) $\{f(A), A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur $f(\Omega)$.

c) $\{A' \subset \Omega', f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur Ω'.

Exercice 3. *Entraînement QCM.*
Par quelles collections d'ensembles la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est-elle engendrée ?

a) Les intervalles $]-\infty, b]$ où $b \in \mathbb{Z}$.

b) Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

c) Les intervalles fermés de $\mathbb{R}$.

d) Les intervalles $]-\infty, b]$ où $b \in \mathbb{Q}$.

e) Les singletons $\{a\}$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Par quelles collections de sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$ est-elle engendrée ?

a) La collection des rectangles $[a, a+s] \times [b, b+t]$, pour $a, b \in \mathbb{Q}$ et $s, t \in \mathbb{Q}_+$

b) La collection des droites de $\mathbb{R}^2$

c) La collection des carrés $[a, a+s] \times [b, b+s]$, pour $a, b \in \mathbb{Q}$ et $s \in \mathbb{Q}_+$

d) La collection des singletons $\{x\}$, pour $x \in \mathbb{R}^2$

e) La collection des ouverts de $\mathbb{R}^2$

f) La collection des disques ouverts de $\mathbb{R}^2$

g) La collection des fermés de $\mathbb{R}^2$

2 Mesures

Exercice 4.
Montrer que les parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes sont des Boréliens et calculer leur mesure de Lebesgue.

1. $\Delta = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2,\ x \in \mathbb{R}\}$
2. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \notin \mathbb{Q}\}$.

Exercice 5. Un ensemble de Cantor.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$C_n = \{x \in [0,1],\ x \text{ n'a que des 0 ou des 9 dans son développement décimal jusqu'à l'ordre } n\},$$

c'est à dire l'ensemble des nombres qui s'écrivent $x = 0, x_1 \cdots x_n \cdots$ avec $(x_1, \cdots x_n) \in \{0, 9\}$. et

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

1. Écrire C_n comme une union d'intervalles disjoints.
2. Calculer $\lambda(C_n)$ pour tout n puis $\lambda(C)$.

Bonus : Montrer que l'ensemble C est indénombrable.

Exercice 6.
Dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue notée λ, construire une suite décroissante de boréliens $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\lambda\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \neq \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n).$$

Indication : à quelle condition sur la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a-t-on toujours l'égalité ? Il faut trouver une suite qui ne vérifie pas cette condition.

Exercice 7.
Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, invariante par translation, et telle que $\mu(I_1) = 1$, où on note I_x le segment $]0, x]$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\mu(I_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $\mu(I_q)$ pour $q \in \mathbb{Q}_+$.
3. Déterminer μ.

Exercice 8.
On lance un dé à six faces sans s'arrêter. Construire un espace probabilisé représentant cette expérience. Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : « On n'obtient que des 6. »
- B : « À partir d'un certain rang, on n'obtient que des 6. »
- C : « On obtient au moins un 6. »
- D : « On obtient une infinité de 6. »