TD 6
Espérance et densité

Exercice 1.
Soit X une variable aléatoire continue de loi uniforme sur $[-1, 1]$ et ε une variable aléatoire discrète uniforme sur $\{-1, 1\}$. On suppose aussi que X et ε sont indépendantes et on pose $Y = \varepsilon X$.

1. Montrer que $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles pour autant indépendantes ?

Exercice 2.
Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ une variable aléatoire.

1. On suppose X est continue et admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Expliquer pourquoi, pour toute fonction mesurable positive $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) f(x) d\lambda_n(x)$.
2. Montrer la réciproque : on suppose qu'il existe une fonction f telle que pour toute fonction mesurable positive $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) f(x) d\lambda_n(x)$, montrer qu'alors X est continue et que sa densité est f.

Exercice 3.

1. Soit X une variable aléatoire continue, de densité f. Montrer que $Y = |X|$ est une variable aléatoire continue, et déterminer sa densité.
2. Soit U de loi uniforme sur $[0, 1[$. Déterminer la densité de la variable $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - U)$. En déduire une façon de simuler informatiquement une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ.

Exercice 4. *Examen 2020.*
On considère une variable aléatoire X de loi uniforme sur $[-1, 1]$. On pose

$$Y = X^2 \quad \text{et} \quad Z = \max(Y, 1/4).$$

1. Montrer que Y est une variable aléatoire continue, et déterminer sa densité f_Y.
2. Montrer que la loi $\mathbb{P}_Z$ peut se décomposer sous la forme $\mathbb{P}_Z = \alpha\mathbb{P}_d + \beta\mathbb{P}_c$, où α et β sont des réels positifs, $\mathbb{P}_d$ est une probabilité discrète et $\mathbb{P}_c$ une probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Déterminer α, β, la probabilité $\mathbb{P}_d$ et la densité de $\mathbb{P}_c$.
3. (Question hors examen) : Calculer $\mathbb{E}[Z]$.

Exercice 5.
Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 15y & \text{si } x^2 \leq y \leq x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer la densité de la loi marginale de Y.

Exercice 6. *Entraînement QCM*.
Soient $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire, et $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\mathbb{P}_X(E) > 0$. On définit une probabilité $\mathbb{P}'$ de la manière suivante : pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}'(B) = \mathbb{P}\left[X \in B | X \in E\right].$$

Que peut-on déduire de ces hypothèses ?

a) $\mathbb{P}' \ll \mathbb{P}$.

b) $\mathbb{P}' \ll \mathbb{P}_X$.

c) $\mathbb{P}_X \ll \mathbb{P}'$.

d) $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}'} = \mathbb{P}\left(X \in E\right)$.

e) $\frac{d\mathbb{P}'}{d\mathbb{P}_X} = \frac{\mathbb{1}_E}{\mathbb{P}(X \in E)}$.