Ne mutlu suçsuzum diyene !

①

La Conjecture d'Algébricité
dans une perspective historique

BRUNO POIZAT

poizat@math.univ-lyon1.fr

Lyon, Septembre 2021

② ZIL'BER 1977

1. Существуют ли неабелевы связные слабо категоричные группы, неизоморфные алгебраическим группам над алгебраически замкнутым полем ?

1. Existe-t-il un groupe non-abélien connexe faiblement catégorique qui ne soit isomorphe à un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos ?

2. Существуют ли простые категоричные группы, отличные от алгебраических над алгебраически замкнутым полем ?

2. Existe-t-il un groupe simple catégorique non-algébrique sur un corps algébriquement clos ?

3. Можно ли группу $G = H_p + H_q$ интерпретировать в $\aleph_1$-категоричной теории ?

3. Le groupe $G = H_p + H_q$ peut-il être interprété dans une théorie $\aleph_1$-catégorique ?

4. Для любых ли двух $\aleph_1$-категоричных теорий T_1 и T_2 существует $\aleph_1$-категоричная теория T, в которой формулньо интерпретируются T_1 и T_2 ?

4. Est-ce que, pour chaque paire de théories T_1 et T_2 $\aleph_1$-catégoriques, il existe une théorie $\aleph_1$-catégorique T avec des formules interprétant T_1 et T_2 ?

③ CHERLIN 1979

Main Conjecture. *Every simple ω-stable group is an algebraic group over an algebraically closed field.*

Conjecture principale. Tout groupe simple ω-stable est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.

- parle de l'article de Zil'ber, à qui il reconnaît certaines priorités (en particulier pour le fait qu'un groupe simple interprétable dans une théorie $\aleph_1$-catégorique est lui-même $\aleph_1$-catégorique), mais pas pour la Conjecture

- considère que le cas de RM fini est particulièrement important

- attire l'attention sur le cas particulier des groupes localement fini

- ainsi que sur le cas particulier des groupes (définissablement) linéaires

④ En bref :

CONJECTURE D'ALGEBRICITE (Zil'ber, Cherlin) : ***Un groupe simple de rang de Morley fini est isomorphe à un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.***

PROBLEME : ***La question est-elle de nature algébrique ou bien de nature modèle-théorique ?***

⑤ **BOLET 1984**

Аксиома А и **Аксиома Б** : description de la collection W des ensembles définissables (конструктивны) des puissances cartésiennes de G ; ne mentionne pas G^{eq} ; à chaque constructible est associé un entier $dim\ A$.

Аксиома В. $dim\ A = 0 \Leftrightarrow A$ - *конечно*

Аксиома Г. $dim(A \cup B) = max\{dim\ A, dim\ B\}$

Аксиома Д. (Принчип свяности). Для любого $A \in W$ сущесвует такое число $n \in N$, что A нельзя представить в виде объединения $n+1$ попарно непересекающихся конструвных множеств $A_1, ... A_{n+1}$ той же размерности, что и A : $dim\ A_i = dim\ A$.

Аксиома Е. (Принчип слоев морфизма). Если $A, B \in W, f : A \rightarrow B$ - морфизм, то множества $B_n = \{ x \in B \ / \ dim\ f^{-1}[x] = n \}$ конструктивны и $dim\ f^{-1}[B_n] = n + dim\ B_n$.

Гипотеза. Простая безконечная группа с размерностью является линейной алгебрайичекой группой над алгебраически замкнутым полем.

⑥ **Lenore BLUM 1968**

Additivité du rang de Morley

(dans le cas fini ; original en anglais)

1. $\mathrm{RM}(a,b) \leq \mathrm{RM}(a) + \mathrm{RM}(b/a) + \mathrm{RM}(a).\mathrm{RM}(b)$

2. $\mathrm{RM}(A \times B) < (1 + \mathrm{RM}(A)).(1 + \mathrm{RM}(B))$

3. ***Si tous les* 1*-types sont de rang de Morley fini, alors tous les* n*-types sont de rang de Morley fini.***

Conclusions optimales, non valables pour le rang de Cantor ; on peut avoir $\mathrm{RM}(a) = \mathrm{RM}(b/a) = 1$ et $\mathrm{RM}(a,b) = \mathrm{RM}(b) = \mathrm{RM}(M) = \omega$, ou n'importe quoi ≥ 2 !

LASCAR 1976 $\mathrm{RU}(a,b) = \mathrm{RU}(a) + \mathrm{RU}(b/a)$

⑦ **Chapitre 2 du Petit Livre Jaune 1987**

Groupe G : loi de groupe et éventuellement structure supplémentaire

G de RM fini $\Leftrightarrow$ G^{eq} satisfait aux conditions 1, 2 et 3

1. **Chaque ensemble définissable a un rang de Cantor fini.**
2. **Borne sur le nombre d'éléments pour chaque famille uniforme d'ensembles définissables finis (= non-prf).**
3. **Le rang de Cantor est définissable.**

(i) Ne mentionne que G lui-même, pas besoin de monter à une extension élémentaire saturée.
(ii) L'additivité n'est pas un axiome, c'est une conséquence des axiomes.
(iii) Il en est de même de la stabilité, de la condition de Baldwin-Saxl, etc.
(iv) En l'absence de groupe, 1, 2 et 3 n'impliquent que la superstabilité (BURDGES)

⑧ **BERLINE 1986 BERLINE-LASCAR 1986**

Groupes superstables

- **le RU maximal est atteint par les génériques**
- **groupes infiniment définissables**
- **$RU(G) = \omega^{\alpha_k}.n_k + ... + \omega.n_1 + n_0$, composante α-connexe**
- **si G est simple, $RU(G) = \omega^{\alpha}.n$**
- **reprise de Cherlin pour les groupes de rang ω^{α}, $\omega^{\alpha}.2$, $\omega^{\alpha}.3$**

Вопрос 1. Généraliser le résultat de Frécon : pas de mauvais groupes de rang $\omega^{\alpha}.3$?

Question 1. Generalize Frécon's result: no bad groups of rank $\omega^{\alpha}.3$.

⑨

Programme de Borovik

imiter la théorie des groupes finis

- conjugaison des 2-sylows (qui ne sont pas toujours définissables)
- QUI ES-TU ? 1991 Pas d’involutions dans les mauvais groupes
- BOROVIK-NESIN 1994 - étude des grpes nilpotents et résolubles, etc.
- cadre de la plupart des travaux sur la question, dont ceux de la personne fêtée dans cette rencontre
- culmine dans ALTINEL-BOROVIK-CHERLIN 2008, où la Conjecture est montrée pour les groupes de 2-sylows non-triviaux et d'exposant borné

Mais ABC utilise WAGNER 2001 sur les corps de RM fini (K algmt clos, avec structure supplémentaire), nettement modèle-théorique :

- K élimine les imaginaires
- son modèle premier est la clôture algébrique modèle-théorique de $\varnothing$
- si K a un automorphisme définissable non trivial, ce modèle premier est porté par la clôture algébrique algébrique de $\varnothing$
- en caractéristique p , un tore est clôture définissable de sa torsion

⑩ Utiliser la classification des groupes simples finis

1983 ܣܝܡܥܘܢ ܬܘܡܐܣ La Conjecture est vraie pour les groupes localement finis, et en fait aussi pour les groupes pseudo-localement finis.

THEOREME. Une structure définissable dans un corps algébriquement clos (sans structure ajoutée !) est pseudo-localement finie (Ingrédients : élimination des imaginaires, les corps finis sont définissablement clos). C'est aussi vrai pour les corps de Wagner.

COROLLAIRE. La Conjecture est vraie pour les groupes définissablement linéaires en caractéristique p .

கேள்வி 2. Est-elle vraie pour un groupe définissablement linéaire en caractéristique nulle ? (il faut éliminer un mauvais groupe qui ne contient que des éléments semi-simples, et ressemble à $SO_3(R)$)

Question 2. Is the Conjecture true for a definably linear group in zero characteristic?

⑪ La recherche du lien manquant

Frage 3. La Conjecture d'Algébricité équivaut-elle à l'affirmation que tout groupe de rang de Morley fini est pseudo-localement fini ?

Question 3. Is the Algebraicity Conjecture equivalent to the fact that each group of finite Morley rank is pseudo-locally finite?

Préliminaires :

- si H est un sous-groupe normal définissable de G pseudo-localement fini, H et G/H sont aussi pseudo-localement finis
- est-ce qu'un groupe abélien, ou même résoluble, de RM fini est pseudo-localement fini ?
- si H est un sous-groupe normal définissable de G , H et G/H étant pseudo-localement finis, est-ce que G est pseudo-localement fini ?

⑫

La question duale

Le "Théorème des Indécomposables" montre qu'en certaines circonstances le sous-groupe $g(A)$ engendré par l'ensemble définissable A l'est de façon elliptique. Quid de la réciproque ? C-à-d si $g(A)$ est définissable, est-il elliptiquement engendré ? Question équivalente :

Sorun 4cü. Existence d'un groupe infini de rang de Morley fini et finiment engendré ?

Question 4. Existence of an infinite finitely generated group of finite Morley rank.

Une réponse positive contredirait la Conjecture d'Algébricité, car :

- si G est finiment engendré, $G°$ aussi

- un groupe commutatif finiment engendré est un produit de groupes cycliques ; s'il est infini, il n'est divisible par aucun $n \neq 1$, si bien qu'il est superstable non ω-stable

- ce n'est pas possible pour un groupe algébrique (Hint : un corps finiment engendré en tant qu'anneau est fini)

⑬ Un choix restreint de références

Zil'ber 1977 Groupes et anneaux de théorie catégorique (en russe), Fund. Mat., 95.1, 173-178

Zil'ber 1974 Le rang de transcendance d'une formule dans une théorie aleph-un-catégorique (en russe), Mat. Zametki, 15.2, 321-329

Macintyre 1971 Théories de corps aleph-un-catégoriques (en anglais), Fund. Mat., 71.1, 1-25

Cherlin 1979 Groupes de petit rang de Morley (en anglais), Ann. Math. Logic, 17.1, 1-28

Borovik 1984 Théorie des groupes finis et groupes incomptablement catégoriques (en russe), prépublication n° 511, Novosibirsk

Blum 1968 Thèse de doctorat (en anglais), Berkeley

Lascar 1976 Ranks and definability in superstable theories, Israel J. of Math., 23, 53-87

⑭

Lascar 1985 Les groupes oméga-stables de rang fini, TAMS, 292, 451-462

Poizat 1987 Groupes Stables, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah

Berline, Berline-Lascar 1986 Superstable Groups ..., APAL 30, 1-43 & 45-61

Borovik-Poizat 1990 Tores et p-groupes, JSL, 55, 565-583

Nesin 1991 On bad groups, bad fields and pseudo-planes, JSL, 56, 915-931

Borovik-Nesin 1994 Groups of Finite Morley Rank, Oxford Univ. Press

ABC 2008 Simple Groups of Finite Morley Rank, American Math. Soc.

Wagner 2001 Fields of finite Morley Rank, JSL, 66, 703-706

Thomas 1983 The classification of simple periodic linear groups, Archiv der Math., 41, 103-116

Poizat 2001 Quelques modestes remarques ..., JSL, 66, 1637-1646

Frécon 2018 Simple groups of Morley rank three ..., JAMS, 31, 643-649

Başka bir dünya

mümkün !