CHAPITRE
10

Fonctions de matrices

Sommaire

1	**Calcul des puissances d'une matrice**	1
2	**La fonction exponentielle**	3
3	**Exercices**	6

Dans le chapitre 9, nous avons montré que toute matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé se décompose en une somme

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N},$$

formée d'une matrice $\mathbf{D}$ diagonalisable et d'une matrice $\mathbf{N}$ nilpotente qui commutent entre elles. Dans ce chapitre, nous appliquons cette décomposition matricielle au calcul de puissances et d'exponentielles de matrices, avec pour objectif l'étude des systèmes d'évolution discrets et les systèmes d'équations différentielles linéaire à coefficients constants.

§ 1 Calcul des puissances d'une matrice

10.1.1 Proposition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé :

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n(x-\lambda_1)^{n_1} \ldots (x-\lambda_p)^{n_p}.$$

Soient $\Pi_{\lambda_1}, \ldots, \Pi_{\lambda_p}$ les projecteurs spectraux de la matrice $\mathbf{A}$.

i) Si $\mathbf{A}$ est diagonalisable, alors, pour tout entier naturel $k > 0$, on a

$$\mathbf{A}^k = \lambda_1^k \Pi_{\lambda_1} + \ldots + \lambda_p^k \Pi_{\lambda_p}. \tag{10.1}$$

ii) Si $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable, alors, pour tout entier naturel $k > 0$, on a

$$\mathbf{A}^k = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{k_i-1} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^j \Pi_{\lambda_i}, \tag{10.2}$$

où k_i est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i dans le polynôme minimal de $\mathbf{A}$.

Preuve. Montrons l'assertion **i)**. D'après le théorème de décomposition spectrale algébrique, théorème 9.2.9, si la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable, il existe une décomposition

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \Pi_{\lambda_1} + \ldots + \lambda_p \Pi_{\lambda_p},$$

avec $\Pi_{\lambda_i} \Pi_{\lambda_j} = 0$, si $i \neq j$, et $\Pi_{\lambda_i}^2 = \Pi_{\lambda_i}$, pour tout i. On en déduit la relation (10.1).

Montrons l'assertion **ii)**. D'après le théorème de décomposition spectrale algébrique, théorème 9.2.9, il existe une décomposition

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N},$$

avec

$$\mathbf{D} = \lambda_1 \Pi_{\lambda_1} + \ldots + \lambda_p \Pi_{\lambda_p} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{N} = (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{1}_n)\Pi_{\lambda_1} + \ldots + (\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{1}_n)\Pi_{\lambda_p}.$$

Dans la décomposition de la matrice $\mathbf{N}$, la matrice $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)\Pi_{\lambda_i}$ est nilpotent d'indice k_i, l'ordre de multiplicité de la racine λ_i dans le polynôme minimal de $\mathbf{A}$. Les projecteurs spectraux satisfont $\Pi_{\lambda_i} \Pi_{\lambda_j} = 0$, si $i \neq j$, et $\Pi_{\lambda_i}^2 = \Pi_{\lambda_i}$, pour tout i. Par suite, pour tout entier k, on a

$$\mathbf{D}^k = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k \Pi_{\lambda_i} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{N}^k = \sum_{i=1}^{p} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^k \Pi_{\lambda_i}.$$

Les matrices $\mathbf{D}$ et $\mathbf{N}$ commutent, *i.e.*, $\mathbf{DN} = \mathbf{ND}$, donc d'après la formule du binôme, on a :

$$\mathbf{A}^k = (\mathbf{D} + \mathbf{N})^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mathbf{D}^{k-j} \mathbf{N}^j. \tag{10.3}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^k &= \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=1}^{p} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^j \Pi_{\lambda_i}, \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{k_i-1} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^j \Pi_{\lambda_i}.
\end{aligned}$$

D'où la relation 10.2. □

10.1.2. Exemple.— Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Nous avons vu en 9.2.12, que la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable et de spectre $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \{-3, 1\}$. On a la décomposition spectrale :

$$\mathbf{A} = \Pi_1 - 3\Pi_{-3},$$

d'où, pour entier naturel k,

$$\mathbf{A}^k = \Pi_1 + (-3)^k \Pi_{-3}.$$

D'après l'expression (9.7) des projecteurs en fonction de $\mathbf{A}$, on déduit que :

$$\mathbf{A}^k = \frac{1}{4}(1 - (-3)^k)\mathbf{A} + \frac{1}{4}(3 + (-3)^k)\mathbf{1}_3.$$

10.1.3. Exemple.— Considérons la matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

On a vu en 9.2.11 que la matrice $\mathbf{A}$, de spectre $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \{1, 2\}$, n'est pas diagonalisable. Il existe une décomposition

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N}$$

en la somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotent, donnés par

$$\mathbf{D} = \Pi_1 + 2\Pi_2, \qquad \mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{D}.$$

On a $\mathbf{D}^k = \Pi_1 + 2^k\Pi_2$ et $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$. Comme les matrices $\mathbf{D}$ et $\mathbf{N}$ commutent, et que $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$, d'après la formule du binôme (10.3), on a :

$$\mathbf{A}^k = \binom{k}{0}\mathbf{D}^k + \binom{k}{1}\mathbf{D}^{k-1}\mathbf{N}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k &= \Pi_1 + 2^k\Pi_2 + k(\Pi_1 + 2^{k-1}\Pi_2)(\mathbf{A} - \Pi_1 - 2\Pi_2), \\ &= (1-k)\Pi_1 + k\mathbf{A}\Pi_1 + 2^k\Pi_2 + k2^{k-1}\mathbf{A}\Pi_2 - k2^k\Pi_2. \end{aligned}$$

soit

$$\mathbf{A}^k = ((1-k)\mathbf{1}_3 + k\mathbf{A})\Pi_1 + (2^k(1-k)\mathbf{1}_3 + k2^{k-1}\mathbf{A})\Pi_2.$$

§ 2 La fonction exponentielle

10.2.1. De l'exponentielle scalaire à l'exponentielle matricielle.— L'exponentielle réelle ou complexe peut se définir en utilisant le développement en série, pour tout réel ou complexe x, on a :

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}x^k.$$

Dans l'expression précédent, si l'on remplace formellement le scalaire x par une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on obtient une série de matrices :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k = \mathbf{1}_n + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 + \ldots$$

On montre que cette série est convergente, sa valeur est appelée l'exponentielle de la matrice $\mathbf{A}$ et est noté $e^{\mathbf{A}}$. Dans ce cours, la preuve de la convergence de cette série de matrices sera admise. On notera cependant que la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k$ est une conséquence de la version scalaire de cette série. En effet, supposons que la matrice $\mathbf{A}$ soit diagonalisable, il existe une décomposition

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{bmatrix}$$

et où $\mathbf{P}$ est une matrice inversible. On a $\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}$, d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{D}^k\right)\mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_p} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} \end{aligned}$$

Ceci constitue une autre façon de définir l'exponentielle d'une matrice diagonalisable $\mathbf{A}$; on pose

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_p} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}. \tag{10.4}$$

Notons que cette définition est indépendante du choix des vecteurs de la base de diagonalisation, *i.e.*, indépendante de la matrice $\mathbf{P}$. En effet, on a la décomposition spectrale, théorème 9.2.9,

$$\mathbf{A} = \lambda_1\Pi_{\lambda_1} + \ldots \lambda_p\Pi_{\lambda_p}.$$

En utilisant le même raisonnement, on montre que

$$e^{\mathbf{A}} = e^{\lambda_1}\Pi_{\lambda_1} + \ldots e^{\lambda_p}\Pi_{\lambda_p}.$$

La définition (10.4) est donc indépendante du choix des vecteurs propres, *i.e.*, de la matrice $\mathbf{P}$ choisie.

La preuve du résultat suivant est admise.

10.2.2 Proposition.— Pour toute matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k = \mathbf{1}_n + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 + \ldots,$$

est normalement convergente dans $\mathcal{L}(E)$.

10.2.3 Proposition. — La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

i) pour toute matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et toute matrice inversible $\mathbf{P}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$e^{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{A}}\mathbf{P}.$$

ii) pour toute matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $e^{\mathbf{A}}$ est inversible et

$$(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}.$$

Preuve. Montrons **i)**. On a

$$e^{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{A}}\mathbf{P}.$$

L'assertion **ii)** découle de la proposition précédente. En effet, on a :

$$e^{\mathbf{A}}e^{-\mathbf{A}} = e^{-\mathbf{A}}e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}-\mathbf{A}} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}_n.$$

□

10.2.4. Décomposition spectrale et exponentielle d'une matrice. — La décomposition spectrale des matrices nous permet d'exprimer l'exponentielle d'une matrice en terme de ses projecteurs spectraux.

10.2.5 Proposition. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé :

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n(x-\lambda_1)^{n_1}\ldots\ (x-\lambda_p)^{n_p}.$$

i) Si $\mathbf{A}$ est diagonalisable, alors

$$e^{\mathbf{A}} = e^{\lambda_1}\Pi_{\lambda_1} + \ldots + e^{\lambda_p}\Pi_{\lambda_p}, \tag{10.5}$$

où les Π_{λ_i} désignent les projecteurs spectraux de $\mathbf{A}$.

ii) Si $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable, alors

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=0}^{k_i-1} \frac{e^{\lambda_i}}{k!}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{1}_n)^k\Pi_{\lambda_i}, \tag{10.6}$$

où les Π_{λ_i} désignent les projecteurs spectraux de $\mathbf{A}$.

Preuve. Montrons l'assertion **i)**. Supposons que $\mathbf{A}$ soit diagonalisable, d'après le théorème 9.2.9, on a

$$\mathbf{A} = \lambda_1\Pi_{\lambda_1} + \ldots + \lambda_p\Pi_{\lambda_p}.$$

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on a $\Pi_{\lambda_i}^2 = \Pi_{\lambda_i}$ et pour tous $i,j \in [\![1,p]\!]$ tels que $i \neq j$, on a $\Pi_{\lambda_i}\Pi_{\lambda_j} = 0$. Par suite,

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i^k}{k!}\Pi_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_i^k}{k!}\Pi_{\lambda_i},$$

d'où la relation (10.5).

Montrons l'assertion **ii)**. Supposons que $\mathbf{A}$ soit non diagonalisable, d'après le théorème 9.2.9, il existe une décomposition

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N},$$

avec

$$\mathbf{D} = \lambda_1\Pi_{\lambda_1} + \ldots + \lambda_p\Pi_{\lambda_p}, \qquad \mathbf{N} = (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{1}_n)\Pi_{\lambda_1} + \ldots + (\mathbf{A} - \lambda_p\mathbf{1}_n)\Pi_{\lambda_p},$$

et où, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, la matrice $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{1}_n)\Pi_{\lambda_i}$ est nilpotente, d'indice de nilpotence l'ordre de multiplicité k_i de la racine λ_i dans le polynôme minimal de $\mathbf{A}$.

D'après **i)**, on a

$$e^{\mathbf{D}} = \sum_{i=1}^{p} e^{\lambda_i}\Pi_{\lambda_i}.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{N}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{N}^k &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{k!}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{1}_n)^k\Pi_{\lambda_i}, \\ &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=0}^{k_i-1}\frac{1}{k!}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{1}_n)^k\Pi_{\lambda_i}. \end{aligned}$$

Enfin, comme les matrices $\mathbf{D}$ et $\mathbf{N}$ commutent, on en déduit la relation (10.6) :

$$e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{D}}e^{\mathbf{N}} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=0}^{k_i-1}\frac{e^{\lambda_i}}{k!}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{1}_n)^k\Pi_{\lambda_i}.$$

□

§ 3 Exercices

10.3.1 Exercice.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que

$$\det e^{\mathbf{A}} = e^{\mathrm{trace}(\mathbf{A})}.$$

2. Montrer que si $\mathbf{A}$ est nilpotent, alors

$$\mathrm{Ker}(e^{\mathbf{A}} - \mathbf{1}_n) = \mathrm{Ker}(\mathbf{A}).$$

3. Calculer l'exponentielle des matrices suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & \theta \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \theta & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & \theta \\ \theta & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & -\theta \\ \theta & \lambda \end{bmatrix}.$$

10.3.2 Exercice.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$(\mathbf{A}-\mathbf{1}_n)^2(\mathbf{A}-2\mathbf{1}_n)=\mathbf{0}.$$

1. Montrer que
$$\mathbb{K}^n = \operatorname{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{1}_n)^2 \oplus \operatorname{Ker}(\mathbf{A}-2\mathbf{1}_n).$$
Soient Π_2 la matrice de la projection de $\mathbb{K}^n$ sur $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}-2\mathbf{1}_n)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{1}_n)^2$ et Π_1 la matrice de la projection sur $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{1}_n)^2$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}-2\mathbf{1}_n)$ exprimées dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

2. Établir les relations suivantes

$$e^{\mathbf{A}}\Pi_1 = e^2\Pi_1, \qquad e^{\mathbf{A}}\Pi_2 = e\mathbf{A}\Pi_2.$$

3. Exprimer en fonction de $\mathbf{A}$ les matrices Π_1 et Π_2.

4. En déduire une expression de $e^{\mathbf{A}}$ en fonction de $\mathbf{A}$.

10.3.3 Exercice.— Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Exprimer, pour tout entier $k \geq 0$, la matrice $\mathbf{A}^k$ en fonction de $\mathbf{A}$.

2. Exprimer, pour tout réel t, la matrice $e^{t\mathbf{A}}$ en fonction de $\mathbf{A}$.

3. Répondre aux mêmes questions avec les matrices suivantes

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

10.3.4 Exercice.— On considère la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ suivante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & -n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -n \end{bmatrix}$$

dont les n premières colonnes sont égales.

1. Calculer le rang de $\mathbf{A}$.

2. Montrer que toutes les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont égales.

3. La matrice $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable ?

4. Calculer $e^{t\mathbf{A}}$, pour tout réel t.

5. Déterminer trois fonctions réelles $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $\gamma(t)$ telles que

$$\alpha'(t) = \beta'(t) = \gamma'(t) = \alpha(t) + \beta(t) - 2\gamma(t),$$

et $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 1$ et $\gamma(0) = 2$.

6. Montrer que si $\mathbf{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, les solutions du système linéaire

$$\mathbf{x}(t)' = \mathbf{N}\mathbf{x}(t)$$

sont des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

10.3.5 Exercice.— On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme minimal de $\mathbf{A}$.
2. Montrer que $\mathbf{A}$ est diagonalisable.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $\mathbf{A}$ soit inversible. Dans le cas où $\mathbf{A}$ est inversible, calculer l'inverse de $\mathbf{A}$.
4. Calculer $\mathbf{A}^k$, pour tout entier k.
5. Calculer $e^{t\mathbf{A}}$, pour tout réel t.

10.3.6 Exercice.— On considère la matrice suivante de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a^2 & a^2 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & a^2 & 1 \end{bmatrix}$$

étudiée dans l'exercice 9.3.5. On suppose que a est non nul.

Exprimer les matrices $\mathbf{A}^k$, pour tout entier naturel k, et $e^{\mathbf{A}}$ en fonction de la matrice $\mathbf{A}$.

10.3.7 Exercice.— On considère la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calculer les puissances $\mathbf{A}^n$, $n \in \mathbb{N}$, de trois façons différentes :

i) en utilisant les projecteurs spectraux,
ii) en exploitant le fait que le polynôme minimal de la matrice $\mathbf{A}$ est de degré 2,
iii) en exploitant le fait que la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable.

10.3.8 Exercice (Combien de chemins mènent à Rome ?).— Voici un problème exrait du livre de Pierre Gabriel [1],

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, shift right] \arrow[dr] & & W \arrow[ll, shift right] \\ & R \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

« Un pilote vole tous les jours vers une des trois villes R, W, Z. La figure ci-dessus indique les trajets journaliers autorisés : un trajet de R vers W, un trajet de W vers Z, un de Z vers R et un de Z vers W. À côté de ces trajets journaliers (de « longueur 1 »), nous considérons les itinéraires (composés) de longueur n, qui décrivent les chemins possibles parcourus pendant n jours consécutifs. Ainsi deux itinéraires de longueur 4 mènent de Z à W, alors qu'il n'y en a qu'un de Z à R :

1. *Matrices, géométrie, algèbre linéaire*, Pierre Gabriel, Cassini, 2001.

$$Z \longrightarrow R \longrightarrow W \longrightarrow Z \longrightarrow W$$
$$Z \longrightarrow W \longrightarrow Z \longrightarrow R \longrightarrow W$$
$$Z \longrightarrow R \longrightarrow W \longrightarrow Z \longrightarrow R$$

Cherchons le nombre d'itinéraires de longueur 100 *de* Z *vers* R*. Pour cela, nous numérotons respectivement* $1, 2, 3$ *les villes* R, W, Z *et désignons par* $\mathbf{M}^i_j$ *le nombres de trajets (de longueur* 1*) de* j *à* i*.*

1. Écrire la matrice $\mathbf{M}$ formée des coefficients $\mathbf{M}^i_j$.
2. Montrer que le nombre d'itinéraires de longueur n de j à i est égal au coefficient $(\mathbf{M}^n)^i_j$ de la matrice $\mathbf{M}^n$.
3. Calculer le nombre d'itinéraires de longueur 100 de Z vers R.
4. Déterminer les valeurs propres de la matrice $\mathbf{M}$.
5. La matrice $\mathbf{M}$ est-elle diagonalisable ?

CHAPITRE 11

Systèmes dynamiques discrets

Sommaire

1	**Les suites récurrentes**	1
2	**La suite de Fibonacci (1202)**	2
3	**Dynamique de populations**	4

§ 1 Les suites récurrentes

11.1.1. Suites récurrentes couplées.— Le calcul des puissances d'une matrice peut s'appliquer à la résolution du problèmes de suites récurrentes couplées. Soient deux suites $(u_k)_k$ et $(v_k)_k$ récurrentes couplées de la façon suivante :

$$\left|\begin{array}{l} u_{k+1} = au_k + bv_k \\ v_{k+1} = cu_k + dv_k. \end{array}\right.$$

avec les conditions initiales (u_0, v_0). Naturellement se problème se pose en les mêmes termes pour un nombre arbitraire de suites.

En posant $\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix}$, le système s'écrit

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k, \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

On montre par récurrence qu'alors

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0, \quad \text{avec} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}.$$

11.1.2 Exercice.— Résoudre le système linéaire récurrent suivant :

$$\left|\begin{array}{ll} x_k & = x_{k-1} + z_{k-1} \\ y_k & = y_{k-1} + z_{k-1} \\ z_k & = 2z_{k-1} \end{array}\right.$$

avec $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$.

11.1.3. Suite récurrente d'ordre supérieur. — Les suites récurrentes géométriques d'ordre 1 sont les suites géométriques $(u_k)_k$ définies par la relation de récurrence :

$$u_{k+1} = qu_k.$$

Avec la condition initiale u_0, le terme général de la suite est $u_k = u_0 q^k$.

Plus généralement, une *suite récurrente géométrique d'ordre* p, où p est un entier supérieur à 1, est une suite $(u_k)_k$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, définie pour tout entier k, par la relation de récurrence suivante :

$$u_{k+p} = a_0 u_k + a_1 u_{k+1} + \ldots + a_{p-1} u_{k+p-1}, \tag{11.1}$$

où les coefficients a_i sont dans $\mathbb{K}$. La suite $(u_k)_k$ peut s'écrire sous forme matricielle en considérant la transposée de la matrice compagnon du polynôme $a_0 + a_1 x + \ldots + a_{p-1} x^{p-1}$ définie par

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ & & & & 1 & \\ 0 & 0 & & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-2} & a_{p-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}).$$

En posant

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+p-1} \end{bmatrix},$$

la relation (11.1) s'écrit sous la forme

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{C}\mathbf{x}_k.$$

Il s'agit d'une suite géométrique à valeurs dans $\mathbb{K}^p$ de raison $\mathbf{C}$. Étant donné une condition initiale $u_0, u_1, \ldots, u_p$, on obtient le terme général de la suite par récurrence en calculant les puissances de $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{C}^k \mathbf{x}_0.$$

§ 2 La suite de Fibonacci (1202)

11.2.1. Le problème d'évolution de Fibonacci. — Le problème de Fibonacci est un problème d'évolution d'une population à ages structurés posé en les termes suivants

> ≪ *Un homme possède un couple de lapins dans un lieu clos et souhaite savoir combien il aura de couples au bout d'un an si par nature chaque couple de lapins donne naissance à partir de deux mois de vie à un nouveau couple de lapins tous les mois.* ≫

Notons x_k le nombre de couples de lapins le k-ième mois. Le nombre de couples de lapins au $(k+1)$-ième mois est égal à la somme du nombre de couples de lapins existants le k-ième mois et du nombre de couples de lapins nouveau-nés le $(k+1)$-ième mois, *i.e.*, x_{k-1}. On suppose que les lapins ne meurent jamais.

Le premier mois, il existe un unique couple de lapin, on suppose qu'il s'agit de lapereaux, on a $x_1 = 1$. Les lapereaux ne deviennent adulte à partir de deux mois de vie, on a $x_2 = 1$; ils donnent alors naissance à couple de lapereaux le troisième mois : $x_3 = 2$. Le nombre de couples de lapin satisfait la relation de récurrence suivante :

$$x_{k+1} = x_k + x_{k-1}.$$

La suite $(x_k)_k$ ainsi définie est appelée la *suite de Fibonacci*.

11.2.2. Description matricielle.— La suite de Fibonacci est une suite récurrence d'ordre deux, cf. 11.1.3. Ce système s'écrit matriciellement sous la forme

$$\begin{bmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{11.2}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{F}$ est $p_{\mathbf{F}} = x^2 - x - 1$. Il admet les deux racines réelles suivantes

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Les projecteurs spectraux Π_{λ_1} et Π_{λ_2} de la matrice $\mathbf{F}$ vérifient le système d'équations suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{1}_2 = \Pi_{\lambda_1} + \Pi_{\lambda_2} \\ \mathbf{F} = \lambda_1 \Pi_{\lambda_1} + \lambda_2 \Pi_{\lambda_2} \end{array} \right.$$

On en déduit que

$$\Pi_{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\mathbf{F} - \lambda_2 \mathbf{1}_2) \qquad \text{et} \qquad \Pi_{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\mathbf{F} - \lambda_1 \mathbf{1}_2).$$

La solution de l'équation (11.2) est alors

$$\begin{bmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{F}^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{11.3}$$

Or $\mathbf{F}^k = \lambda_1^k \Pi_{\lambda_1} + \lambda_2^k \Pi_{\lambda_2}$, on déduit de (11.3) l'expression de x_{k+1} :

$$x_{k+1} = \frac{\lambda_1^k}{\lambda_1 - \lambda_2}(1-\lambda_2) + \frac{\lambda_2^k}{\lambda_2 - \lambda_1}(1-\lambda_1).$$

Ainsi, le nombre de couples de lapins le k-ième mois de l'évolution de la population est

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k.$$

FIGURE 11.1 – Leonardo Fibonacci

§ 3 Dynamique de populations

La dynamique des populations cherche à expliquer l'évolution dans le temps en nombre et en composition de populations biologiques. On peut s'intéresser à des populations humaines, animales, végétales, ou encore microbiennes.

Notre premier exemple est un problème de migration de populations entre deux zones géographiques.

11.3.1. Migration de populations.— On considère le problème de migration de population entre les zones urbaines et les zones rurales. Chaque année, un mouvement de population entre ces deux zones s'opère de la façon suivante :

- la moitié des habitants en zone urbaine partent habiter en zone rurale, alors que l'autre moitié reste résidante en zone hurbaine,
- un quart des habitants en zone rurale rejoignent une zone hurbaine, les trois quarts restant en zone rurale.

Le mouvement de population est indiqué par la figure 11.2

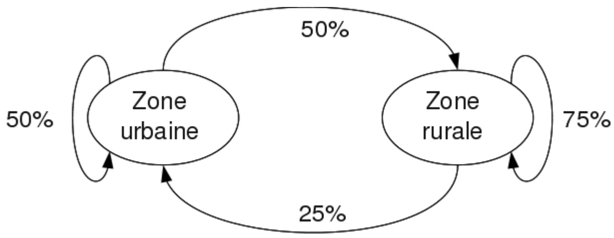

FIGURE 11.2 – Mouvement de population

Étant donné une répartition initiale, l'année $k = 0$, de la population entre les deux zones, quelle sera la répartition de population la k-ième année ? Est-ce que toute la population va au bout d'un certain temps toute se retrouver en zone rurale ?

Notons r_k la proportion de la population totale qui habite en zone rurale au terme de la k-ième année et u_k la proportion de population qui habite en zone urbaine au terme de cette même année. S'agissant de proportion de population, on a, pour toute année k,

$$r_k + u_k = 1.$$

L'évolution des deux populations est décrite par un système d'équations couplées :

$$\left| \begin{array}{l} u_{k+1} = 1/2\, u_k + 1/4\, r_k \\ r_{k+1} = 1/2\, u_k + 3/4\, r_k \end{array} \right.$$

qui s'écrit matriciellement sous la forme :

$$[u_{k+1} \;\; r_{k+1}] = [u_k \;\; r_k] \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

La matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

est appelée la *matrice de transition* du système. Si la répartition de population initiale, l'année 0, est $[u_0 \;\; r_0]$, on montre par récurrence que, pour tout k,

$$[u_k \;\; r_k] = [u_0 \;\; r_0]\mathbf{A}^k. \tag{11.4}$$

La relation (11.4) exprime la répartition de la population la k-ième année.

Déterminons la répartition de la population à terme. Il s'agit de calculer $\lim\limits_{k\to+\infty} [u_k \;\; r_k]$. Or

$$\lim_{k\to+\infty} [u_k \;\; r_k] = [u_0 \;\; r_0] \lim_{k\to+\infty} \mathbf{A}^k.$$

Calculons $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{A}^k$. Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $p_{\mathbf{A}} = (x-1)(x-1/4)$. Donc $\mathbf{A}$ est diagonalisable. Notons Π_1 et $\Pi_{\frac{1}{4}}$ les projecteurs spectraux de $\mathbf{A}$. On a

$$\mathbf{A} = \Pi_1 + \frac{1}{4}\Pi_{\frac{1}{4}}.$$

Donc $\mathbf{A}^k = \Pi_1 + \left(\frac{1}{4}\right)^k \Pi_{\frac{1}{4}}$. Par suite

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbf{A}^k = \Pi_1.$$

Pour déterminer Π_1, on considère le système

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{1}_2 = \Pi_1 + \Pi_{\frac{1}{4}}, \\ \mathbf{A} = \Pi_1 + \frac{1}{4}\Pi_{\frac{1}{4}}. \end{array} \right.$$

D'on on déduit $\Pi_{\frac{1}{4}} = \mathbf{1}_2 - \Pi_1$ et $\Pi_1 = \dfrac{4}{3}(\mathbf{A} - \dfrac{1}{4}\mathbf{1}_2)$. D'où

$$\Pi_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} [u_k \;\; r_k] &= \frac{1}{3}[u_0 \;\; r_0] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \\ &= \frac{1}{3}[u_0 + r_0 \;\; 2u_0 + 2r_0], \\ &= [\frac{1}{3} \;\; \frac{2}{3}]. \end{aligned}$$

A terme, il y aura donc un tiers de la population totale en zone urbaine et deux tiers en zone rurale. Notons que cette proportion est indépendante de la répartition initiale des populations entre les deux zones.

11.3.2 Exercice.— Dans un pays, on étudie la migration de population entre les zones rurales et les zones urbaines. Chaque année, un tiers de la population des campagnes migre vers les villes, pendant qu'un quart de la population des villes va habiter dans des zones rurales. On notera u_k et r_k la proportion de population urbaine et rurale respectivement l'année k.

1. Étant donnée une répartition initiale u_0 et r_0, quelle est la répartition de population l'année k entre ces deux zones géographiques ?
2. Quelle est à terme la répartition des populations entre ces deux zones géographiques ?
3. Les zones urbaines seront-elles complètement désertées ?

11.3.3 Exercice.— On considère deux espèces A et B qui coexistent dans un même environnement naturel. On étudie deux situations d'évolution de ces espèces.

Dans une première situation, on suppose que les deux espèces sont en *compétition* : le nombre d'individus d'une espéce augmente proportionnellement au nombre d'individus de cette même espèce et décroit proportionnellement au nombre d'individus de l'autre espèce.

1. Si la population de chaque espèce augmente de deux fois le nombre d'individus de l'espèce et décroit d'une fois le nombre d'individus de l'autre espèce, déterminer à chaque instant le nombre d'individus de chaque espèce lorsque initiallement il y a 100 individus de l'espèce A et 200 individus de l'espèce B.
2. Est-ce qu'une des espèces est en voie d'instinction ? Si oui, au bout de combien de temps.

Dans une deuxième situation, on suppose que les deux espèces vivent en *symbiose* de la façon suivante. Le nombre d'individus de chaque espèce augmente d'une fois le nombre d'individus de l'autre espèce et décroit d'une fois le nombre d'individus de la même espèce.

3. Si initiallement les espèces A et B sont respectivement composées de 200 et 400 individus, déterminer à chaque instant la population de chaque espèce.
4. Que se passe-t-il à long terme ?