

9.3.5 Exercice. — On considère la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ suivante

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a^2 & a^2 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & a^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de la matrice $A - (1 - a)1_4$. En déduire que $1 - a$ est valeur propre de la matrice A .
2. Si $a = 0$, la matrice A est-elle diagonalisable ?
 Dans la suite de l'exercice, on suppose que le réel a est non nul.
3. Déterminer toutes les valeurs propres de A . La matrice A est-elle diagonalisable ?
4. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A .
5. Exprimer en fonction de A les projecteurs spectraux de A .

9.3.6 Exercice. — On considère la matrice suivante

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A .
2. Déterminer les sous-espaces propres de la matrice A .
3. Calculer les projecteurs spectraux de la matrice A .
4. Déterminer une matrice diagonalisable D et une matrice nilpotente N telles que $A = D + N$.

9.3.7 Exercice. — Même exercice avec les matrices suivantes

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -4 & -7 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Décomposition spectrale des matrices

Sommaire

1	Préliminaires	1
2	Les espaces spectraux	3
3	Exercices	10
4	Décomposition spectrale géométrique	13
5	Décomposition spectrale algébrique	16
6	Calcul de la décomposition spectrale algébrique	21

§ 1 Préliminaires

9.1.1. Diagonalisation par blocs. — Dans les chapitres précédents, nous avons vu qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas toujours diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Nous allons montrer dans ce chapitre que si le polynôme caractéristique de la matrice A est scindé, alors il est toujours possible de la « diagonaliser par blocs » dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, autrement dit, que la matrice A est semblable à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_p \end{bmatrix},$$

où les B_i sont des blocs carrés.

D'après le théorème de caractérisation des matrices diagonalisables, théorème 7.4.1, diagonaliser une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ revient à trouver une décomposition de l'espace \mathbb{K}^n en une somme directe

$$\mathbb{K}^n = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$$

de sous-espaces propres associées aux valeurs propres de \mathbf{A} , $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $E_{\lambda_i} = \text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)$. Diagonaliser une matrice \mathbf{A} de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par blocs consiste à trouver une décomposition de l'espace \mathbb{K}^n en une somme directe

$$\mathbb{K}^n = N_1 \oplus \dots \oplus N_p,$$

de sous-espaces vectoriels N_i de \mathbb{K}^n stables par \mathbf{A} , $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\mathbf{A}x \in N_i \quad \text{implique} \quad \mathbf{A}x \in N_i,$$

On montre que ceci est équivalent à dire que la matrice \mathbf{A} est semblable à une matrice diagonale par blocs, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{B}_p \end{bmatrix},$$

où, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, \mathbf{B}_i est une matrice de $\mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$, avec $n_i = \dim(N_{\lambda_i})$.

9.1.2. Matrices strictement triangulaire. — On appelle matrice *strictement triangulaire supérieure* (resp. *inférieure*) une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) dont les coefficients diagonaux sont tous nuls.

9.1.3 Proposition. — Toute matrice strictement triangulaire est nilpotente.

Preuve. Soit \mathbf{T} une matrice strictement triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Sa diagonale étant nulle, le spectre de \mathbf{T} est réduit à $\{0\}$. Ainsi, le polynôme caractéristique de \mathbf{T} est

$$p_{\mathbf{T}} = (-1)^n x^n.$$

Le polynôme minimal de \mathbf{T} est donc de la forme x^k , avec $1 \leq k \leq n$. Autrement dit, \mathbf{T} est nilpotente. \square

Nous avons de nombreuses caractérisations des matrices nilpotentes :

9.1.4 Proposition. — Soit \mathbf{A} une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) la matrice \mathbf{A} est nilpotente,
- ii) le polynôme minimal de \mathbf{A} est de la forme x^r , avec $r > 0$,
- iii) le polynôme caractéristique de \mathbf{A} est $(-1)^n x^n$,
- iv) la puissance n -ième de \mathbf{A} est nulle,
- v) le spectre de \mathbf{A} est réduit à $\{0\}$,
- vi) la matrice \mathbf{A} est semblable à une matrice strictement triangulaire,
- vii) $\text{trace}(\mathbf{A}^k) = 0$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- 9.3.1 Exercice.** — Trouver une relation de Bézout entre les polynômes f_1 et f_2 , avec
- 1. $f_1 = x^2 + 2x - 1$, $f_2 = x + 2$,
 - 2. $f_1 = x^4 + 2x^3 - x$, $f_2 = x^3 + 5$,
 - 3. $f_1 = x^2 + 2x - 1$, $f_2 = x + 2$,
 - 4. $f_1 = x - 1$, $f_2 = x + 2$,
 - 5. $f_1 = x + 1$, $f_2 = x^2 - 2x + 1$,
 - 6. $f_1 = x^4 - 1$, $f_2 = x^3 + 2$.

9.3.2 Exercice. — En calculant une identité de Bézout, décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(x)$ les fractions suivantes

- 1. $\frac{10x^3}{(x^2 + 1)(x^2 - 4)}$,
- 2. $\frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}{x^3 - 1}$,
- 3. $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 4}$,
- 4. $\frac{(x^2 + 1)(x^2 - 2)^2}{(x^2 + 1)^2}$.

9.3.3 Exercice. — Soit \mathbf{A} la matrice de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ donnée par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de \mathbf{A} .

2. Montrer que la matrice \mathbf{A} est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix}$$

où \mathbf{T}_1 et \mathbf{T}_2 sont deux matrices triangulaires supérieures.

3. Exhiber la matrice de passage.

9.3.4 Exercice. — Soit \mathbf{A} la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 1. Déterminer en fonction de \mathbf{A} les projecteurs spectraux de \mathbf{A} .
- 2. Exprimer, pour tout entier $k \geq 0$, la matrice \mathbf{A}^k en fonction de \mathbf{A} .
- 3. Calculer la matrice de \mathbf{A}^k .
- 4. Répondre aux mêmes questions avec les matrices suivantes :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

On a donc

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On obtient

$$\mathbf{D} = \Pi_1 + 2\Pi_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{D}$$

d'où

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice \mathbf{D} est diagonalisable (on peut vérifier que son polynôme minimal est $(x-2)(x-1)$) et la matrice \mathbf{N} est nilpotente, on a $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$.

9.2.12. Exemple. — Soit \mathbf{A} la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

On calcule le polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}} = -(x-1)(x+3)^2$ et le polynôme minimal $m_{\mathbf{A}} = (x-1)(x+3)$. Ce dernier étant scindé et n'ayant que des racines simples, la matrice \mathbf{A} est diagonalisable et il existe une décomposition :

$$\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_{-3}.$$

Notons, Π_1 et Π_{-3} les matrices des projecteurs spectraux $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow E_1$ et $\pi_{-3} : \mathbb{R}^3 \rightarrow E_{-3}$ exprimées dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . Les matrices Π_1 et Π_{-3} vérifient les deux relations :

$$\begin{cases} \mathbf{1}_3 = \Pi_1 + \Pi_{-3} \\ \mathbf{A} = \Pi_1 - 3\Pi_{-3} \end{cases}$$

qui s'écrivent sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_{-3} \end{bmatrix}$$

D'où

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

On en déduit :

$$\Pi_1 = \frac{1}{4}\mathbf{A} + \frac{3}{4}\mathbf{1}_3, \quad \Pi_{-3} = -\frac{1}{4}\mathbf{A} + \frac{1}{4}\mathbf{1}_3. \quad (9.7)$$

§ 3 Exercices

Rappels sur l'identité de Bézout. — Rappelons que des polynômes f_1, \dots, f_s de $\mathbb{K}[x]$ sont premiers entre eux dans leur ensemble, si les seuls polynômes qui divisent simultanément les polynômes f_1, \dots, f_s sont de degré nul. Le théorème de Bézout, cf. théorème 1.5.13, montre que les polynômes f_1, \dots, f_s de $\mathbb{K}[x]$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si, et seulement si, il existe des polynômes u_1, \dots, u_s de $\mathbb{K}[x]$, vérifiant l'identité de Bézout :

$$f_1 u_1 + \dots + f_s u_s = 1.$$

Preuve. Si \mathbf{A} est nilpotente, il existe un entier q tel que le polynôme x^q soit annulateur de \mathbf{A} , par suite, le polynôme minimal de \mathbf{A} est de la forme x^r , où r est l'indice de nilpotence de la matrice \mathbf{A} . Ainsi **i**) implique **ii**). Par ailleurs, **ii**) implique **iii**), **iii**) implique **iv**) et **iv**) implique **v**) sont immédiates. Supposons que le spectre de \mathbf{A} soit réduit à $\{0\}$, i.e., 0 est la seule valeur propre de \mathbf{A} . La matrice \mathbf{A} est trigonalisable et semblable à une matrice strictement triangulaire supérieure \mathbf{T} , i.e.

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{TP},$$

avec \mathbf{P} inversible. D'où **v**) implique **vi**). L'implication **vi**) implique **i**) est donnée par la proposition 9.1.3. L'équivalence de **vii**) avec les autres propriétés est une conséquence immédiate de la proposition 7.1.9. \square

§ 2 Les espaces spectraux

9.2.1. Premier exemple : le cas d'une matrice diagonalisable. — Soit \mathbf{A} la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de \mathbf{A} est $p_{\mathbf{A}} = -(x-4)(x-1)^2$ et son polynôme minimal est $m_{\mathbf{A}} = (x-4)(x-1)$. La matrice \mathbf{A} est alors diagonalisable. Il existe donc une décomposition de l'espace \mathbb{R}^3 en somme directe de sous-espaces propres :

$$\mathbb{R}^3 = E_4 \oplus E_1.$$

La valeur propre 4 étant de multiplicité algébrique 1, on a $\dim(E_4) = 1$. On en déduit que $\dim(E_1) = 2$.

Déterminons les projections de l'espace \mathbb{R}^3 sur les sous-espaces propres E_4 et E_1 . Nous noterons

$$\pi_4 : \mathbb{R}^3 \rightarrow E_4$$

la projection de \mathbb{R}^3 sur le sous-espace E_4 parallèlement au sous-espace E_1 et

$$\pi_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow E_1$$

la projection de \mathbb{R}^3 sur E_1 parallèlement à E_4 . Ces deux projections sont entièrement caractérisées par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \pi_4^2 &= \pi_4, \quad \pi_1^2 = \pi_1, \quad \pi_4 \pi_1 = \pi_1 \pi_4 = 0, \quad \text{et} \quad \text{Id}_{\mathbb{R}^3} = \pi_4 + \pi_1, \\ \text{Im}(\pi_4) &= E_4, \quad \text{Ker}(\pi_4) = E_1, \quad \text{Im}(\pi_1) = E_1, \quad \text{Ker}(\pi_1) = E_4 \end{aligned} \quad (9.1)$$

On notera Π_4 et Π_1 les matrices des projections π_4 et π_1 exprimées dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . Nous allons voir que l'on peut exprimer ces deux matrices en fonction de la matrice \mathbf{A} .

Les polynômes $x-4$ et $x-1$ sont premiers entre eux. D'après l'identité de Bézout, cf. théorème 1.5.13, il existe deux polynômes h_1 et h_2 de $\mathbb{R}[x]$ vérifiant l'équation suivante

$$(x-4)h_1 + (x-1)h_2 = 1.$$

Un calcul élémentaire nous permet de déterminer les polynômes h_1 et h_2 , on a :

$$(x-4)\left(-\frac{1}{3}\right) + (x-1)\left(\frac{1}{3}\right) = 1. \quad (9.2)$$

Montrons que

$$\Pi_4 = \frac{3}{1}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3) \quad \text{et} \quad \Pi_1 = -\frac{3}{1}(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}_3).$$

Supposons Π_4 et Π_1 ainsi définis et montrons qu'ils satisfont les relations 9.1. De l'équation 9.2, on déduit que

$$(9.3) \quad \Pi_4 + \Pi_1 = \mathbf{I}_3.$$

Montrons que

$$\text{Ker}(\Pi_4) = E_4 \quad \text{et} \quad \text{Im}(\Pi_4) = E_4.$$

Comme $\Pi_4 = \frac{3}{1}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3)$, la première égalité est immédiate. Pour la seconde égalité, supposons $y \in \text{Im}(\Pi_4)$, il existe alors un vecteur x de \mathbb{R}^3 tel que

$$y = \Pi_4(x) = \frac{3}{1}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3)(x).$$

Par ailleurs,

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}_3)\frac{3}{1}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3)(x) = \frac{3}{1}m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})(x) = \mathbf{0}.$$

Par suite, $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}_3)(y) = \mathbf{0}$, d'où $y \in E_4$.

Inversement, si $y \in E_4$, d'après (9.3) on a $y = \Pi_4(y) + \Pi_1(y)$. Or

$$\Pi_1(y) = -\frac{3}{1}(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}_3)(y) = \mathbf{0}.$$

Donc $y = \Pi_4(y)$, par suite $y \in \text{Im}(\Pi_4)$. Ainsi, $\text{Im}(\Pi_4) = E_4$.

De la même façon, on montre que

$$\text{Ker}(\Pi_1) = E_4 \quad \text{et} \quad \text{Im}(\Pi_1) = E_1.$$

Les relations $\Pi_4\Pi_1 = \Pi_1\Pi_4 = \mathbf{0}$ se déduisent immédiatement du fait que

$$\Pi_4\Pi_1 = \frac{3}{1}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3) \left(-\frac{3}{1}(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}_3) \right) = -\frac{9}{1}m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

Les relations $\Pi_1^2 = \Pi_4\Pi_1^2 = \Pi_1$ sont une conséquence immédiate des relations (9.3) et $\Pi_4\Pi_1 = \Pi_1\Pi_4 = \mathbf{0}$.

En multipliant les deux membres de la relation (9.3) à gauche par la matrice \mathbf{A} , on obtient la décomposition suivante de la matrice \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}\Pi_4 + \mathbf{A}\Pi_1.$$

Comme pour tout vecteur x de E_4 , on a $\mathbf{A}x = 4x$ et $\Pi_4x = x$, on en déduit que

$$\mathbf{A}\Pi_4 = 4\Pi_4.$$

Par ailleurs, on a de façon similaire $\mathbf{A}\Pi_1 = \Pi_1$. Ainsi,

$$(9.4) \quad \mathbf{A} = 4\Pi_4 + \Pi_1.$$

La décomposition (9.4) de la matrice \mathbf{A} est appelée la *décomposition spectrale* de \mathbf{A} . On montrera dans la suite que cette décomposition de la matrice \mathbf{A} est très utile pour avoir des expressions simples de puissances de \mathbf{A} . En particulier, pour tout entier k , on montrera que

$$\mathbf{A}^k = 4^k\Pi_4 + \Pi_1.$$

soit

$$\Pi_2 = \mathbf{I}_3 - (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3)^2 = -\mathbf{A}^2 + 4\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3.$$

$$\Pi_2 = \mathbf{I}_3 - \Pi_1,$$

Notons que l'on aurait pu aussi obtenir Π_2 par la relation :

$$\Pi_2 = g_2(\mathbf{A})h_2(\mathbf{A}) = (-\mathbf{A} + 3\mathbf{I}_3)(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3).$$

de \mathbb{R}^3 :

La projection $\pi_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow N_2$ sur N_2 parallèlement à N_1 a pour matrice dans la base canonique

$$\Pi_1 = g_1(\mathbf{A})h_1(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3)^2.$$

La projection $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow N_1$ sur l'espace spectral $N_1 = \text{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3)$ parallèlement à $N_2 = \text{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3)^2$ a pour matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{I} = g_1h_1 + g_2h_2.$$

on a

$$h_1 = \mathbf{I}, \quad g_1 = (x - 2)^2, \quad h_2 = -x + 3, \quad g_2 = x - 1,$$

En posant

$$\frac{1}{1} = \frac{(x-1)(x-2)^2}{1} + \frac{x-1}{-1} + \frac{(x-2)^2}{1}, \quad \frac{x-1}{-x+3} = \frac{x-1}{1} + \frac{(x-2)^2}{-x+3}.$$

On considère le polynôme annulateur $g = (x - 1)(x - 2)^2$. On a :

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3) \oplus \text{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3)^2.$$

Déterminons les projecteurs sur les espaces spectraux associés à la décomposition :

diagonalisables.

Son polynôme caractéristique est $p_{\mathbf{A}} = -(x - 1)(x - 2)^2$. Le polynôme $(x - 1)(x - 2)^2$ n'est pas annulateur de \mathbf{A} , donc le polynôme minimal de \mathbf{A} est $m_{\mathbf{A}} = (x - 1)(x - 2)^2$ et \mathbf{A} n'est pas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

9.2.11. Exemple. — On considère la matrice \mathbf{A} de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

On vérifie, qu'ainsi définis, pour tout i , Π_{λ_i} est la matrice du projecteur spectral π_{λ_i} de \mathbb{K}^n sur le sous-espace spectral N_{λ_i} exprimée dans la base canonique de \mathbb{K}^n .

$$\Pi_{\lambda_i} = g_i(\mathbf{A})h_i(\mathbf{A}).$$

Étape 3 : On pose alors, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\mathbf{I} = g_1h_1 + \dots + g_ph_p.$$

Par suite,

$$\frac{1}{1} = \frac{g}{h_1} = \frac{g}{h_1} + \frac{\lambda_1^{n_1}(x - \dots)}{h_1} + \dots + \frac{\lambda_p^{n_p}(x - \dots)}{h_p}.$$

On a alors

Donc $\mathbf{x} = \Pi_{\lambda_i} \mathbf{x} \in \text{Im}(\Pi_{\lambda_i})$ et $N_{\lambda_i} \subseteq \text{Im}(\Pi_{\lambda_i})$.

Montrons la seconde égalité. Si $i \neq j$, le polynôme $(x - \lambda_j)^{n_j}$ divise g_i , donc pour tout $\mathbf{x} \in N_{\lambda_j}$, on a $\Pi_i \mathbf{x} = g_i(\mathbf{A})h_i(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Donc $N_{\lambda_j} \subseteq \text{Ker}(\Pi_{\lambda_i})$ si $i \neq j$. Par suite

$$\bigoplus_{j \neq i} N_{\lambda_j} \subseteq \text{Ker}(\Pi_{\lambda_i}).$$

Inversement, soit $\mathbf{x} \in \text{Ker}(\Pi_{\lambda_i})$. Comme $\mathbf{x} = \Pi_{\lambda_1} \mathbf{x} + \dots + \mathbf{0} + \dots + \Pi_{\lambda_p} \mathbf{x}$, on a $\mathbf{x} \in \bigoplus_{j \neq i} N_{\lambda_j}$.

On montre ainsi la proposition. \square

9.2.9 Théorème (Décomposition spectrale algébrique). — Soit \mathbf{A} une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}$ est scindé sur \mathbb{K} . Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de \mathbf{A} . Il existe une décomposition

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N},$$

où \mathbf{D} est une matrice diagonalisable et \mathbf{N} est une matrice nilpotente qui commute, i.e., $\mathbf{D}\mathbf{N} = \mathbf{N}\mathbf{D}$.

De plus, les matrices \mathbf{D} et \mathbf{N} sont des polynômes en \mathbf{A} et la matrice \mathbf{D} est donnée par

$$\mathbf{D} = \lambda_1 \Pi_{\lambda_1} + \dots + \lambda_p \Pi_{\lambda_p},$$

où $\Pi_{\lambda_1}, \dots, \Pi_{\lambda_p}$ désignent les projecteurs spectraux de la matrice \mathbf{A} .

La preuve de ce théorème est admise. La fin de cette section présente une méthode permettant de calculer la décomposition du théorème 9.2.9.

9.2.10. Calcul de la décomposition spectrale algébrique. — Soit \mathbf{A} une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de spectre $\text{spec}(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. Étant donné un polynôme annulateur

$$g = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_p)^{n_p}$$

de \mathbf{A} , déterminons les projecteurs spectraux $\Pi_{\lambda_1}, \dots, \Pi_{\lambda_p}$ de la matrice \mathbf{A} . En pratique, on prendra pour g le polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}$, ou bien le polynôme minimal $m_{\mathbf{A}}$.

Étape 1 : On décompose la fraction rationnelle $\frac{1}{g}$ en éléments simples dans le corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(x)$:

$$\frac{1}{g} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{i,j}}{(x - \lambda_i)^j}.$$

Étape 2 : On pose ensuite

$$h_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j} (x - \lambda_i)^{n_i-j} \quad \text{et} \quad g_i = \frac{1}{(x - \lambda_i)^{n_i}} g = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p (x - \lambda_j)^{n_j}.$$

Les matrices des projecteurs π_1 et π_4 dans la base canonique de \mathbb{R}^3 sont

$$\Pi_4 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi_1 = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

On notera que $\text{rg}(\Pi_4) = 1 = \text{trace}(\Pi_4)$ et que $\text{rg}(\Pi_1) = 2 = \text{trace}(\Pi_2)$.

9.2.2. Deuxième exemple : le cas d'une matrice non diagonalisable. — Considérons la matrice suivante de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de \mathbf{A} est $p_{\mathbf{A}} = (x - 2)^3(x - 3)$, son polynôme minimal est $m_{\mathbf{A}} = (x - 2)^2(x - 3)$. La matrice \mathbf{A} n'est donc pas diagonalisable.

En appliquant le lemme des noyaux, théorème 8.3.5, au polynôme minimal, on obtient la décomposition :

$$\mathbb{R}^4 = \text{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_4)^2 \oplus E_3,$$

où E_3 est le sous-espace propre associé à la valeur propre 3. Notons

$$N_2 = \text{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_4)^2.$$

La dimension de E_3 est majorée par la multiplicité algébrique de la valeur propre 3. On a donc $\dim(E_3) = 1$ et par suite $\dim(N_2) = 3$.

Déterminons la matrice de la projection π_2 de \mathbb{R}^4 sur N_2 parallèlement à E_3 et celle de la projection π_3 de \mathbb{R}^4 sur E_3 parallèlement à N_2 , exprimées dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .

Les polynômes $(x - 2)^2$ et $x - 3$ sont premiers entre eux ; on établit une relation de Bézout :

$$(x - 2)^2 + (x - 3)(-x + 1) = 1.$$

Posons

$$\Pi_2 = (\mathbf{A} - 3\mathbf{1}_4)(-\mathbf{A} + \mathbf{1}_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Pi_3 = (\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_4)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi définis, Π_2 et Π_3 satisfont :

$$\Pi_2^2 = \Pi_2, \quad \Pi_3^2 = \Pi_3, \quad \Pi_2 \Pi_3 = \Pi_3 \Pi_2 = 0, \quad \mathbf{1}_4 = \Pi_2 + \Pi_3.$$

De plus, on a

$$\text{Im}(\Pi_2) = N_2, \quad \text{Ker}(\Pi_2) = E_3, \quad \text{Im}(\Pi_3) = E_3, \quad \text{Ker}(\Pi_3) = N_2.$$

Ainsi, les matrices Π_2 et Π_3 sont bien celles des projections sur les sous-espaces N_2 et E_3 respectivement.

Posons

$$\mathbf{D} = 2\Pi_2 + 3\Pi_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ et $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N}$. Ainsi, \mathbf{A} s'écrit comme la somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente. Nous montrons dans ce chapitre que cette décomposition est unique.

9.2.3. Sous-espace spectral. — Soit \mathbf{A} une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé :

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n(x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_p)^{n_p},$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$ et $n_1 + \cdots + n_p = n$. Le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^{n_i}$ de \mathbb{K}^n est appelé le *sous-espace spectral* de \mathbf{A} associé à la valeur propre λ_i . On le notera N_{λ_i} .

9.2.4 Proposition. — Soient \mathbf{A} une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de \mathbf{A} . Le sous-espace propre E_{λ} est un sous-espace vectoriel du sous-espace spectral N_{λ} .

Preuve. Cela découle immédiatement du fait que pour toute matrice carrée \mathbf{A} , on a la suite d'inclusions de sous-espaces

$$\text{Ker}(\mathbf{A}) \subset \text{Ker}(\mathbf{A}^2) \subset \cdots \subset \text{Ker}(\mathbf{A}^k) \subset \cdots$$

□

9.2.5 Théorème. — Soit \mathbf{A} une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé avec

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n(x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_p)^{n_p},$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, $n_1 + \cdots + n_p = n$. Alors, les sous-espaces spectraux de \mathbf{A} satisfont,

pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, les assertions suivantes :

i) $\mathbb{K}^n = N_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus N_{\lambda_p}$,

ii) N_{λ_i} est stable par \mathbf{A} ,

iii) $\dim(N_{\lambda_i}) = n_i$.

L'assertion **i)** découle du théorème de Cayley-Hamilton 8.5.1. Le polynôme caractéristique de $p_{\mathbf{A}}$ est annulateur de la matrice \mathbf{A} . La décomposition **i)** est une conséquence immédiate du lemme de décomposition en noyaux, appliquée à la factorisation du polynôme $p_{\mathbf{A}}$ en facteurs

irréductibles.

Montrons **ii)**. Soit \mathbf{x} un vecteur de N_{λ_i} . Alors $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^{n_i} \mathbf{x} = \mathbf{0}$, donc

$$\mathbf{A}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^{n_i} \mathbf{x} = (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^{n_i} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

d'où $\mathbf{A} \mathbf{x} \in N_{\lambda_i}$.

9.2.6. Projecteurs spectraux. — Soit \mathbf{A} une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé :

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n(x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_p)^{n_p},$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, $n_1 + \cdots + n_p = n$. D'après le théorème 9.2.5, on a une décomposition

$$\mathbb{K}^n = N_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus N_{\lambda_p}.$$

9.2.7. Définition. — La projection π_{λ_i} sur le sous-espace spectral N_{λ_i} parallèlement au sous-espace $\bigoplus_{j=1, j \neq i}^p N_{\lambda_j}$ est appelée *projecteur spectral associé à la valeur propre* λ_i . On notera Π_{λ_i} la matrice du projecteur spectral π_{λ_i} dans la base canonique de \mathbb{K}^n .

9.2.8 Proposition. — Les projecteurs spectraux $\Pi_{\lambda_1}, \dots, \Pi_{\lambda_p}$ sont des polynômes en la matrice \mathbf{A} .

Preuve. Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Notons

$$g_i = \prod_{j=1, j \neq i}^p (x - \lambda_j)^{n_j}.$$

Si $i \neq j$, le polynôme $g = g_i g_j = (-1)^{n_p} p_{\mathbf{A}}$ est annulateur de la matrice \mathbf{A} . Les polynômes g_1, \dots, g_p sont premiers entre eux dans leur ensemble. D'après le théorème de Bézout, il existe des polynômes h_1, \dots, h_p de $\mathbb{K}[x]$ tels que

$$g_1 h_1 + \cdots + g_p h_p = 1.$$

Par suite,

$$g_1 \Pi_{\lambda_1} (\mathbf{A}) h_1 (\mathbf{A}) + \cdots + g_p \Pi_{\lambda_p} (\mathbf{A}) h_p (\mathbf{A}) = \mathbf{1}_n.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, posons

$$\Pi_{\lambda_i} = g_i (\mathbf{A}) h_i (\mathbf{A}).$$

De la relation (9.5), on déduit que

$$\mathbf{1}_n = \Pi_{\lambda_1} + \cdots + \Pi_{\lambda_p}.$$

(9.6)

D'autre part, si $j \neq i$, le polynôme $g_i g_j = g$ est annulateur de \mathbf{A} , donc :

$$\Pi_{\lambda_i} \circ \Pi_{\lambda_j} = g_i (\mathbf{A}) h_i (\mathbf{A}) g_j (\mathbf{A}) h_j (\mathbf{A})$$

$$= g_i (\mathbf{A}) g_j (\mathbf{A}) h_i (\mathbf{A}) h_j (\mathbf{A})$$

$$= \mathbf{0}.$$

Il nous reste à montrer que

$$\text{Im}(\Pi_{\lambda_i}) = N_{\lambda_i}, \quad \text{Ker}(\Pi_{\lambda_i}) = \bigoplus_{j=1, j \neq i}^p N_{\lambda_j}.$$

Montrons la première égalité. Soit $\mathbf{y} = \Pi_{\lambda_i} \mathbf{x} \in \text{Im}(\Pi_{\lambda_i})$, on a $\mathbf{y} = g_i (\mathbf{A}) h_i (\mathbf{A}) \mathbf{x}$ et

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^{n_i} \mathbf{y} = (x - \lambda_i)^{n_i} g_i (\mathbf{A}) h_i (\mathbf{A}) \mathbf{x}$$

$$= g_i (\mathbf{A}) g (\mathbf{A}) \mathbf{x}$$

$$= \mathbf{0}.$$

Donc $\mathbf{y} \in N_{\lambda_i}$ et $\text{Im}(\pi_{\lambda_i}) \subseteq N_{\lambda_i}$.

Inversement, soit $\mathbf{x} \in N_{\lambda_i}$. On a $\mathbf{x} = \Pi_{\lambda_1} \mathbf{x} + \cdots + \Pi_{\lambda_p} \mathbf{x}$. Par ailleurs, si $i \neq j$ le polynôme

$$\Pi_{\lambda_j} \mathbf{x} = g_j (\mathbf{A}) h_j (\mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \text{si } i \neq j.$$