

**9.3.5 Exercice.** — On considère la matrice de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  suivante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a^2 & a^2 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & a^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de la matrice  $\mathbf{A} - (1 - a)\mathbf{1}_4$ . En déduire que  $1 - a$  est valeur propre de la matrice  $\mathbf{A}$ .
2. Si  $a = 0$ , la matrice  $\mathbf{A}$  est-elle diagonalisable ?  
Dans la suite de l'exercice, on suppose que le réel  $a$  est non nul.
3. Déterminer toutes les valeurs propres de  $\mathbf{A}$ . La matrice  $\mathbf{A}$  est-elle diagonalisable ?
4. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de  $\mathbf{A}$ .
5. Exprimer en fonction de  $\mathbf{A}$  les projecteurs spectraux de  $\mathbf{A}$ .

**9.3.6 Exercice.** — On considère la matrice suivante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de  $\mathbf{A}$ .
2. Déterminer les sous-espaces propres de la matrice  $\mathbf{A}$ .
3. Calculer les projecteurs spectraux de la matrice  $\mathbf{A}$ .
4. Déterminer une matrice diagonalisable  $\mathbf{D}$  et une matrice nilpotente  $\mathbf{N}$  telles que  $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N}$ .

**9.3.7 Exercice.** — Même exercice avec les matrices suivantes

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -4 & -7 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Décomposition spectrale des matrices

### Sommaire

1	Préliminaires . . . . .	1
2	Les espaces spectraux . . . . .	3
3	Exercices . . . . .	10
4	Décomposition spectrale géométrique . . . . .	13
5	Décomposition spectrale algébrique . . . . .	16
6	Calcul de la décomposition spectrale algébrique . . . . .	21

### § 1 Préliminaires

**9.1.1. Diagonalisation par blocs.** — Dans les chapitres précédents, nous avons vu qu'une matrice  $\mathbf{A}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  n'est pas toujours diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Nous allons montrer dans ce chapitre que si le polynôme caractéristique de la matrice  $\mathbf{A}$  est scindé, alors il est toujours possible de la « diagonaliser par blocs » dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , autrement dit, que la matrice  $\mathbf{A}$  est semblable à une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{B}_p \end{bmatrix},$$

où les  $\mathbf{B}_i$  sont des blocs carrés.

D'après le théorème de caractérisation des matrices diagonalisables, théorème 7.4.1, diagonaliser une matrice  $\mathbf{A}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  revient à trouver une décomposition de l'espace  $\mathbb{K}^n$  en une somme directe

$$\mathbb{K}^n = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$$

de sous-espaces propres associées aux valeurs propres de  $\mathbf{A}$ ,  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $E_{\lambda_i} = \text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)$ . Diagonaliser une matrice  $\mathbf{A}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  par blocs consiste à trouver une décomposition de l'espace  $\mathbb{K}^n$  en une somme directe

$$\mathbb{K}^n = N_1 \oplus \dots \oplus N_p,$$

de sous-espaces vectoriels  $N_i$  de  $\mathbb{K}^n$  stables par  $\mathbf{A}$ ,  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,

$$\mathbf{A}x \in N_i \quad \text{implique} \quad \mathbf{A}x \in N_i,$$

On montre que ceci est équivalent à dire que la matrice  $\mathbf{A}$  est semblable à une matrice diagonale par blocs, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{B}_p \end{bmatrix},$$

où, pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\mathbf{B}_i$  est une matrice de  $\mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ , avec  $n_i = \dim(N_{\lambda_i})$ .

**9.1.2. Matrices strictement triangulaire.** — On appelle matrice *strictement triangulaire supérieure* (resp. *inférieure*) une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) dont les coefficients diagonaux sont tous nuls.

**9.1.3 Proposition.** — Toute matrice strictement triangulaire est nilpotente.

*Preuve.* Soit  $\mathbf{T}$  une matrice strictement triangulaire de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Sa diagonale étant nulle, le spectre de  $\mathbf{T}$  est réduit à  $\{0\}$ . Ainsi, le polynôme caractéristique de  $\mathbf{T}$  est

$$p_{\mathbf{T}} = (-1)^n x^n.$$

Le polynôme minimal de  $\mathbf{T}$  est donc de la forme  $x^k$ , avec  $1 \leq k \leq n$ . Autrement dit,  $\mathbf{T}$  est nilpotente.  $\square$

Nous avons de nombreuses caractérisations des matrices nilpotentes :

**9.1.4 Proposition.** — Soit  $\mathbf{A}$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  non nulle. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) la matrice  $\mathbf{A}$  est nilpotente,
- ii) le polynôme minimal de  $\mathbf{A}$  est de la forme  $x^r$ , avec  $r > 0$ ,
- iii) le polynôme caractéristique de  $\mathbf{A}$  est  $(-1)^n x^n$ ,
- iv) la puissance  $n$ -ième de  $\mathbf{A}$  est nulle,
- v) le spectre de  $\mathbf{A}$  est réduit à  $\{0\}$ ,
- vi) la matrice  $\mathbf{A}$  est semblable à une matrice strictement triangulaire,
- vii)  $\text{trace}(\mathbf{A}^k) = 0$ , pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

- 9.3.1 Exercice.** — Trouver une relation de Bézout entre les polynômes  $f_1$  et  $f_2$ , avec
1.  $f_1 = x^2 + 2x - 1$ ,  $f_2 = x + 2$ ,
  2.  $f_1 = x^4 + 2x^3 - x$ ,  $f_2 = x^3 + 5$ ,
  3.  $f_1 = x^2 + 2x - 1$ ,  $f_2 = x + 2$ ,
  4.  $f_1 = x - 1$ ,  $f_2 = x + 2$ ,
  5.  $f_1 = x + 1$ ,  $f_2 = x^2 - 2x + 1$ ,
  6.  $f_1 = x^4 - 1$ ,  $f_2 = x^3 + 2$ .

**9.3.2 Exercice.** — En calculant une identité de Bézout, décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{C}(x)$  les fractions suivantes

1.  $\frac{10x^3}{(x^2 + 1)(x^2 - 4)}$ ,
2.  $\frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}{x^3 - 1}$ ,
3.  $\frac{(x^2 + x + 1)^2}{(x^2 + 4)^2}$ ,
4.  $\frac{(x^2 + 1)(x^2 - 2)^2}{(x^2 + 1)(x^2 - 2)^2}$ .

**9.3.3 Exercice.** — Soit  $\mathbf{A}$  la matrice de  $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$  donnée par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de  $\mathbf{A}$ .

2. Montrer que la matrice  $\mathbf{A}$  est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix}$$

où  $\mathbf{T}_1$  et  $\mathbf{T}_2$  sont deux matrices triangulaires supérieures.

3. Exhiber la matrice de passage.

**9.3.4 Exercice.** — Soit  $\mathbf{A}$  la matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer en fonction de  $\mathbf{A}$  les projecteurs spectraux de  $\mathbf{A}$ .
2. Exprimer, pour tout entier  $k \geq 0$ , la matrice  $\mathbf{A}^k$  en fonction de  $\mathbf{A}$ .
3. Calculer la matrice de  $\mathbf{A}^k$ .
4. Répondre aux mêmes questions avec les matrices suivantes :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

On a donc

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On obtient

$$\mathbf{D} = \Pi_1 + 2\Pi_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{D}$$

d'où

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice  $\mathbf{D}$  est diagonalisable (on peut vérifier que son polynôme minimal est  $(x-2)(x-1)$ ) et la matrice  $\mathbf{N}$  est nilpotente, on a  $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ .

**9.2.12. Exemple.** — Soit  $\mathbf{A}$  la matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  donnée par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

On calcule le polynôme caractéristique  $p_{\mathbf{A}} = -(x-1)(x+3)^2$  et le polynôme minimal  $m_{\mathbf{A}} = (x-1)(x+3)$ . Ce dernier étant scindé et n'ayant que des racines simples, la matrice  $\mathbf{A}$  est diagonalisable et il existe une décomposition :

$$\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_{-3}.$$

Notons,  $\Pi_1$  et  $\Pi_{-3}$  les matrices des projecteurs spectraux  $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow E_1$  et  $\pi_{-3} : \mathbb{R}^3 \rightarrow E_{-3}$  exprimées dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Les matrices  $\Pi_1$  et  $\Pi_{-3}$  vérifient les deux relations :

$$\begin{cases} \mathbf{1}_3 = \Pi_1 + \Pi_{-3} \\ \mathbf{A} = \Pi_1 - 3\Pi_{-3} \end{cases}$$

qui s'écrivent sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_{-3} \end{bmatrix}$$

D'où

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

On en déduit :

$$\Pi_1 = \frac{1}{4}\mathbf{A} + \frac{3}{4}\mathbf{1}_3, \quad \Pi_{-3} = -\frac{1}{4}\mathbf{A} + \frac{1}{4}\mathbf{1}_3. \quad (9.7)$$

## § 3 Exercices

**Rappels sur l'identité de Bézout.** — Rappelons que des polynômes  $f_1, \dots, f_s$  de  $\mathbb{K}[x]$  sont premiers entre eux dans leur ensemble, si les seuls polynômes qui divisent simultanément les polynômes  $f_1, \dots, f_s$  sont de degré nul. Le théorème de Bézout, cf. théorème 1.5.13, montre que les polynômes  $f_1, \dots, f_s$  de  $\mathbb{K}[x]$  sont premiers entre eux dans leur ensemble si, et seulement si, il existe des polynômes  $u_1, \dots, u_s$  de  $\mathbb{K}[x]$ , vérifiant l'identité de Bézout :

$$f_1 u_1 + \dots + f_s u_s = 1.$$

*Preuve.* Si  $\mathbf{A}$  est nilpotente, il existe un entier  $q$  tel que le polynôme  $x^q$  soit annulateur de  $\mathbf{A}$ , par suite, le polynôme minimal de  $\mathbf{A}$  est de la forme  $x^r$ , où  $r$  est l'indice de nilpotence de la matrice  $\mathbf{A}$ . Ainsi **i**) implique **ii**). Par ailleurs, **ii**) implique **iii**), **iii**) implique **iv**) et **iv**) implique **v**) sont immédiates. Supposons que le spectre de  $\mathbf{A}$  soit réduit à  $\{0\}$ , i.e., 0 est la seule valeur propre de  $\mathbf{A}$ . La matrice  $\mathbf{A}$  est trigonalisable et semblable à une matrice strictement triangulaire supérieure  $\mathbf{T}$ , i.e.

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{TP},$$

avec  $\mathbf{P}$  inversible. D'où **v**) implique **vi**). L'implication **vi**) implique **i**) est donnée par la proposition 9.1.3. L'équivalence de **vii**) avec les autres propriétés est une conséquence immédiate de la proposition 7.1.9.  $\square$

## § 2 Les espaces spectraux

**9.2.1. Premier exemple : le cas d'une matrice diagonalisable.** — Soit  $\mathbf{A}$  la matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $\mathbf{A}$  est  $p_{\mathbf{A}} = -(x-4)(x-1)^2$  et son polynôme minimal est  $m_{\mathbf{A}} = (x-4)(x-1)$ . La matrice  $\mathbf{A}$  est alors diagonalisable. Il existe donc une décomposition de l'espace  $\mathbb{R}^3$  en somme directe de sous-espaces propres :

$$\mathbb{R}^3 = E_4 \oplus E_1.$$

La valeur propre 4 étant de multiplicité algébrique 1, on a  $\dim(E_4) = 1$ . On en déduit que  $\dim(E_1) = 2$ .

Déterminons les projections de l'espace  $\mathbb{R}^3$  sur les sous-espaces propres  $E_4$  et  $E_1$ . Nous noterons

$$\pi_4 : \mathbb{R}^3 \rightarrow E_4$$

la projection de  $\mathbb{R}^3$  sur le sous-espace  $E_4$  parallèlement au sous-espace  $E_1$  et

$$\pi_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow E_1$$

la projection de  $\mathbb{R}^3$  sur  $E_1$  parallèlement à  $E_4$ . Ces deux projections sont entièrement caractérisées par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \pi_4^2 &= \pi_4, \quad \pi_1^2 = \pi_1, \quad \pi_4 \pi_1 = \pi_1 \pi_4 = 0, \quad \text{et} \quad \text{Id}_{\mathbb{R}^3} = \pi_4 + \pi_1, \\ \text{Im}(\pi_4) &= E_4, \quad \text{Ker}(\pi_4) = E_1, \quad \text{Im}(\pi_1) = E_1, \quad \text{Ker}(\pi_1) = E_4 \end{aligned} \quad (9.1)$$

On notera  $\Pi_4$  et  $\Pi_1$  les matrices des projections  $\pi_4$  et  $\pi_1$  exprimées dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Nous allons voir que l'on peut exprimer ces deux matrices en fonction de la matrice  $\mathbf{A}$ .

Les polynômes  $x-4$  et  $x-1$  sont premiers entre eux. D'après l'identité de Bézout, cf. théorème 1.5.13, il existe deux polynômes  $h_1$  et  $h_2$  de  $\mathbb{R}[x]$  vérifiant l'équation suivante

$$(x-4)h_1 + (x-1)h_2 = 1.$$

Un calcul élémentaire nous permet de déterminer les polynômes  $h_1$  et  $h_2$ , on a :

$$(x-4)\left(-\frac{1}{3}\right) + (x-1)\left(\frac{1}{3}\right) = 1. \quad (9.2)$$

Montrons que

$$\Pi_4 = \frac{3}{1}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3) \quad \text{et} \quad \Pi_1 = -\frac{3}{1}(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}_3).$$

Supposons  $\Pi_4$  et  $\Pi_1$  ainsi définis et montrons qu'ils satisfont les relations 9.1. De l'équation 9.2, on déduit que

$$(9.3) \quad \Pi_4 + \Pi_1 = \mathbf{I}_3.$$

Montrons que

$$\text{Ker}(\Pi_4) = E_4 \quad \text{et} \quad \text{Im}(\Pi_4) = E_4.$$

Comme  $\Pi_4 = \frac{3}{1}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3)$ , la première égalité est immédiate. Pour la seconde égalité, supposons  $y \in \text{Im}(\Pi_4)$ , il existe alors un vecteur  $x$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que

$$y = \Pi_4(x) = \frac{3}{1}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3)(x).$$

Par ailleurs,

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}_3)\frac{3}{1}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3)(x) = \frac{3}{1}m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})(x) = \mathbf{0}.$$

Par suite,  $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}_3)(y) = \mathbf{0}$ , d'où  $y \in E_4$ .

Inversement, si  $y \in E_4$ , d'après (9.3) on a  $y = \Pi_4(y) + \Pi_1(y)$ . Or

$$\Pi_1(y) = -\frac{3}{1}(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}_3)(y) = \mathbf{0}.$$

Donc  $y = \Pi_4(y)$ , par suite  $y \in \text{Im}(\Pi_4)$ . Ainsi,  $\text{Im}(\Pi_4) = E_4$ .

De la même façon, on montre que

$$\text{Ker}(\Pi_1) = E_4 \quad \text{et} \quad \text{Im}(\Pi_1) = E_1.$$

Les relations  $\Pi_4\Pi_1 = \Pi_1\Pi_4 = \mathbf{0}$  se déduisent immédiatement du fait que

$$\Pi_4\Pi_1 = \frac{3}{1}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3) \left( -\frac{3}{1}(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}_3) \right) = -\frac{9}{1}m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

Les relations  $\Pi_4^2 = \Pi_4$ ,  $\Pi_1^2 = \Pi_1$  sont une conséquence immédiate des relations (9.3) et  $\Pi_4\Pi_1 = \Pi_1\Pi_4 = \mathbf{0}$ .

En multipliant les deux membres de la relation (9.3) à gauche par la matrice  $\mathbf{A}$ , on obtient la décomposition suivante de la matrice  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}\Pi_4 + \mathbf{A}\Pi_1.$$

Comme pour tout vecteur  $x$  de  $E_4$ , on a  $\mathbf{A}x = 4x$  et  $\Pi_4x = x$ , on en déduit que

$$\mathbf{A}\Pi_4 = 4\Pi_4.$$

Par ailleurs, on a de façon similaire  $\mathbf{A}\Pi_1 = \Pi_1$ . Ainsi,

$$(9.4) \quad \mathbf{A} = 4\Pi_4 + \Pi_1.$$

La décomposition (9.4) de la matrice  $\mathbf{A}$  est appelée la *décomposition spectrale* de  $\mathbf{A}$ . On montrera dans la suite que cette décomposition de la matrice  $\mathbf{A}$  est très utile pour avoir des expressions simples de puissances de  $\mathbf{A}$ . En particulier, pour tout entier  $k$ , on montrera que

$$\mathbf{A}^k = 4^k\Pi_4 + \Pi_1.$$

soit

$$\Pi_2 = \mathbf{I}_3 - (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3)^2 = -\mathbf{A}^2 + 4\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3.$$

$$\Pi_2 = \mathbf{I}_3 - \Pi_1,$$

Notons que l'on aurait pu aussi obtenir  $\Pi_2$  par la relation :

$$\Pi_2 = g_2(\mathbf{A})h_2(\mathbf{A}) = (-\mathbf{A} + 3\mathbf{I}_3)(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3).$$

de  $\mathbb{R}^3$  :

La projection  $\pi_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow N_2$  sur  $N_2$  parallèlement à  $N_1$  a pour matrice dans la base canonique

$$\Pi_1 = g_1(\mathbf{A})h_1(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3)^2.$$

La projection  $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow N_1$  sur l'espace spectral  $N_1 = \text{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3)$  parallèlement à  $N_2 = \text{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3)^2$  a pour matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\mathbf{I} = g_1h_1 + g_2h_2.$$

on a

$$h_1 = \mathbf{I}, \quad g_1 = (x - 2)^2, \quad h_2 = -x + 3, \quad g_2 = x - 1,$$

En posant

$$\frac{1}{1} = \frac{(x-1)(x-2)^2}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{x-1}{x-2} + \frac{x-2}{(x-2)^2},$$

$$\frac{1}{-1} = \frac{x-1}{-x+3} + \frac{x-1}{-2}.$$

On considère le polynôme annulateur  $g = (x - 1)(x - 2)^2$ . On a :

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3) \oplus \text{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3)^2.$$

Déterminons les projecteurs sur les espaces spectraux associés à la décomposition :

diagonalisables.

Son polynôme caractéristique est  $p_{\mathbf{A}} = -(x - 1)(x - 2)^2$ . Le polynôme  $(x - 1)(x - 2)^2$  n'est pas annulateur de  $\mathbf{A}$ , donc le polynôme minimal de  $\mathbf{A}$  est  $m_{\mathbf{A}} = (x - 1)(x - 2)^2$  et  $\mathbf{A}$  n'est pas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**9.2.11. Exemple.** — On considère la matrice  $\mathbf{A}$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définie par

On vérifie, qu'ainsi définis, pour tout  $i$ ,  $\Pi_{\lambda_i}$  est la matrice du projecteur spectral  $\pi_{\lambda_i}$  de  $\mathbb{K}^n$  sur le sous-espace spectral  $N_{\lambda_i}$  exprimée dans la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

$$\Pi_{\lambda_i} = g_i(\mathbf{A})h_i(\mathbf{A}).$$

**Étape 3 :** On pose alors, pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,

$$\mathbf{I} = g_1h_1 + \dots + g_ph_p.$$

Par suite,

$$\frac{1}{1} = \frac{g}{h_1} = \frac{g}{h_1} + \frac{\lambda_1^{n_1}(x - \dots)}{h_p} + \dots + \frac{\lambda_p^{n_p}(x - \dots)}{h_p}.$$

On a alors

Donc  $\mathbf{x} = \Pi_{\lambda_i} \mathbf{x} \in \text{Im}(\Pi_{\lambda_i})$  et  $N_{\lambda_i} \subseteq \text{Im}(\Pi_{\lambda_i})$ .

Montrons la seconde égalité. Si  $i \neq j$ , le polynôme  $(x - \lambda_j)^{n_j}$  divise  $g_i$ , donc pour tout  $\mathbf{x} \in N_{\lambda_j}$ , on a  $\Pi_i \mathbf{x} = g_i(\mathbf{A})h_i(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Donc  $N_{\lambda_j} \subseteq \text{Ker}(\Pi_{\lambda_i})$  si  $i \neq j$ . Par suite

$$\bigoplus_{j \neq i} N_{\lambda_j} \subseteq \text{Ker}(\Pi_{\lambda_i}).$$

Inversement, soit  $\mathbf{x} \in \text{Ker}(\Pi_{\lambda_i})$ . Comme  $\mathbf{x} = \Pi_{\lambda_1} \mathbf{x} + \dots + \mathbf{0} + \dots + \Pi_{\lambda_p} \mathbf{x}$ , on a  $\mathbf{x} \in \bigoplus_{j \neq i} N_{\lambda_j}$ .

On montre ainsi la proposition.  $\square$

**9.2.9 Théorème (Décomposition spectrale algébrique).** — Soit  $\mathbf{A}$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont le polynôme caractéristique  $p_{\mathbf{A}}$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ . Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres de  $\mathbf{A}$ . Il existe une décomposition

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N},$$

où  $\mathbf{D}$  est une matrice diagonalisable et  $\mathbf{N}$  est une matrice nilpotente qui commute, i.e.,  $\mathbf{D}\mathbf{N} = \mathbf{N}\mathbf{D}$ .

De plus, les matrices  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{N}$  sont des polynômes en  $\mathbf{A}$  et la matrice  $\mathbf{D}$  est donnée par

$$\mathbf{D} = \lambda_1 \Pi_{\lambda_1} + \dots + \lambda_p \Pi_{\lambda_p},$$

où  $\Pi_{\lambda_1}, \dots, \Pi_{\lambda_p}$  désignent les projecteurs spectraux de la matrice  $\mathbf{A}$ .

La preuve de ce théorème est admise. La fin de cette section présente une méthode permettant de calculer la décomposition du théorème 9.2.9.

**9.2.10. Calcul de la décomposition spectrale algébrique.** — Soit  $\mathbf{A}$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de spectre  $\text{spec}(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ . Étant donné un polynôme annulateur

$$g = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_p)^{n_p}$$

de  $\mathbf{A}$ , déterminons les projecteurs spectraux  $\Pi_{\lambda_1}, \dots, \Pi_{\lambda_p}$  de la matrice  $\mathbf{A}$ . En pratique, on prendra pour  $g$  le polynôme caractéristique  $p_{\mathbf{A}}$ , ou bien le polynôme minimal  $m_{\mathbf{A}}$ .

**Étape 1 :** On décompose la fraction rationnelle  $\frac{1}{g}$  en éléments simples dans le corps des fractions rationnelles  $\mathbb{K}(x)$  :

$$\frac{1}{g} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{i,j}}{(x - \lambda_i)^j}.$$

**Étape 2 :** On pose ensuite

$$h_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j} (x - \lambda_i)^{n_i - j} \quad \text{et} \quad g_i = \frac{1}{(x - \lambda_i)^{n_i}} g = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p (x - \lambda_j)^{n_j}.$$

Les matrices des projecteurs  $\pi_1$  et  $\pi_4$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  sont

$$\Pi_4 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi_1 = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

On notera que  $\text{rg}(\Pi_4) = 1 = \text{trace}(\Pi_4)$  et que  $\text{rg}(\Pi_1) = 2 = \text{trace}(\Pi_2)$ .

**9.2.2. Deuxième exemple : le cas d'une matrice non diagonalisable.** — Considérons la matrice suivante de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $\mathbf{A}$  est  $p_{\mathbf{A}} = (x - 2)^3(x - 3)$ , son polynôme minimal est  $m_{\mathbf{A}} = (x - 2)^2(x - 3)$ . La matrice  $\mathbf{A}$  n'est donc pas diagonalisable.

En appliquant le lemme des noyaux, théorème 8.3.5, au polynôme minimal, on obtient la décomposition :

$$\mathbb{R}^4 = \text{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_4)^2 \oplus E_3,$$

où  $E_3$  est le sous-espace propre associé à la valeur propre 3. Notons

$$N_2 = \text{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_4)^2.$$

La dimension de  $E_3$  est majorée par la multiplicité algébrique de la valeur propre 3. On a donc  $\dim(E_3) = 1$  et par suite  $\dim(N_2) = 3$ .

Déterminons la matrice de la projection  $\pi_2$  de  $\mathbb{R}^4$  sur  $N_2$  parallèlement à  $E_3$  et celle de la projection  $\pi_3$  de  $\mathbb{R}^4$  sur  $E_3$  parallèlement à  $N_2$ , exprimées dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .

Les polynômes  $(x - 2)^2$  et  $x - 3$  sont premiers entre eux ; on établit une relation de Bézout :

$$(x - 2)^2 + (x - 3)(-x + 1) = 1.$$

Posons

$$\Pi_2 = (\mathbf{A} - 3\mathbf{1}_4)(-\mathbf{A} + \mathbf{1}_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Pi_3 = (\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_4)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi définis,  $\Pi_2$  et  $\Pi_3$  satisfont :

$$\Pi_2^2 = \Pi_2, \quad \Pi_3^2 = \Pi_3, \quad \Pi_2 \Pi_3 = \Pi_3 \Pi_2 = 0, \quad \mathbf{1}_4 = \Pi_2 + \Pi_3.$$

De plus, on a

$$\text{Im}(\Pi_2) = N_2, \quad \text{Ker}(\Pi_2) = E_3, \quad \text{Im}(\Pi_3) = E_3, \quad \text{Ker}(\Pi_3) = N_2.$$

Ainsi, les matrices  $\Pi_2$  et  $\Pi_3$  sont bien celles des projections sur les sous-espaces  $N_2$  et  $E_3$  respectivement.

Posons

$$\mathbf{D} = 2\Pi_2 + 3\Pi_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a  $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N}$ . Ainsi,  $\mathbf{A}$  s'écrit comme la somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente. Nous montrons dans ce chapitre que cette décomposition est unique.

**9.2.3. Sous-espace spectral.** — Soit  $\mathbf{A}$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont le polynôme caractéristique est scindé :

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n(x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_p)^{n_p},$$

avec  $\lambda_i \neq \lambda_j$  si  $i \neq j$  et  $n_1 + \cdots + n_p = n$ . Le sous-espace vectoriel  $\text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^{n_i}$  de  $\mathbb{K}^n$  est appelé le *sous-espace spectral* de  $\mathbf{A}$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ . On le notera  $N_{\lambda_i}$ .

**9.2.4 Proposition.** — Soient  $\mathbf{A}$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $\mathbf{A}$ . Le sous-espace propre  $E_{\lambda}$  est un sous-espace vectoriel du sous-espace spectral  $N_{\lambda}$ .

*Preuve.* Cela découle immédiatement du fait que pour toute matrice carrée  $\mathbf{A}$ , on a la suite d'inclusions de sous-espaces

$$\text{Ker}(\mathbf{A}) \subset \text{Ker}(\mathbf{A}^2) \subset \cdots \subset \text{Ker}(\mathbf{A}^k) \subset \cdots$$

□

**9.2.5 Théorème.** — Soit  $\mathbf{A}$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont le polynôme caractéristique est scindé avec

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n(x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_p)^{n_p},$$

avec  $\lambda_i \neq \lambda_j$  si  $i \neq j$ ,  $n_1 + \cdots + n_p = n$ . Alors, les sous-espaces spectraux de  $\mathbf{A}$  satisfont, pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , les assertions suivantes :

**i)**  $\mathbb{K}^n = N_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus N_{\lambda_p}$ ,

**ii)**  $N_{\lambda_i}$  est stable par  $\mathbf{A}$ ,

**iii)**  $\dim(N_{\lambda_i}) = n_i$ .

L'assertion **i)** découle du théorème de Cayley-Hamilton 8.5.1. Le polynôme caractéristique  $p_{\mathbf{A}}$  est annulateur de la matrice  $\mathbf{A}$ . La décomposition **i)** est une conséquence immédiate du lemme de décomposition en noyaux, appliquée à la factorisation du polynôme  $p_{\mathbf{A}}$  en facteurs irréductibles.

Montrons **ii)**. Soit  $\mathbf{x}$  un vecteur de  $N_{\lambda_i}$ . Alors  $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^{n_i} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ , donc

$$\mathbf{A}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^{n_i} \mathbf{x} = (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^{n_i} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

d'où  $\mathbf{A} \mathbf{x} \in N_{\lambda_i}$ .

Nous admettrons la preuve de l'assertion **iii)**.

**9.2.6. Projecteurs spectraux.** — Soit  $\mathbf{A}$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont le polynôme caractéristique est scindé :

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n(x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_p)^{n_p},$$

avec  $\lambda_i \neq \lambda_j$  si  $i \neq j$ ,  $n_1 + \cdots + n_p = n$ . D'après le théorème 9.2.5, on a une décomposition

$$\mathbb{K}^n = N_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus N_{\lambda_p}.$$

**9.2.7. Définition.** — La projection  $\pi_{\lambda_i}$  sur le sous-espace spectral  $N_{\lambda_i}$  parallèlement au sous-espace  $\bigoplus_{j=1, j \neq i}^p N_{\lambda_j}$  est appelée *projecteur spectral associé à la valeur propre*  $\lambda_i$ . On notera  $\Pi_{\lambda_i}$  la matrice du projecteur spectral  $\pi_{\lambda_i}$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

**9.2.8 Proposition.** — Les projecteurs spectraux  $\Pi_{\lambda_1}, \dots, \Pi_{\lambda_p}$  sont des polynômes en la matrice  $\mathbf{A}$ .

*Preuve.* Soit  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Notons

$$g_i = \prod_{j=1, j \neq i}^p (x - \lambda_j)^{n_j}.$$

Si  $i \neq j$ , le polynôme  $g = g_i g_j = (-1)^{n_p} p_{\mathbf{A}}$  est annulateur de la matrice  $\mathbf{A}$ . Les polynômes  $g_1, \dots, g_p$  sont premiers entre eux dans leur ensemble. D'après le théorème de Bézout, il existe des polynômes  $h_1, \dots, h_p$  de  $\mathbb{K}[x]$  tels que

$$g_1 h_1 + \cdots + g_p h_p = 1.$$

Par suite,

$$g_1 \Pi_{\lambda_1} (\mathbf{A}) h_1 (\mathbf{A}) + \cdots + g_p \Pi_{\lambda_p} (\mathbf{A}) h_p (\mathbf{A}) = \mathbf{1}_n.$$

Pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , posons

$$\Pi_{\lambda_i} = g_i (\mathbf{A}) h_i (\mathbf{A}).$$

De la relation (9.5), on déduit que

$$\mathbf{1}_n = \Pi_{\lambda_1} + \cdots + \Pi_{\lambda_p}.$$

(9.6)

D'autre part, si  $j \neq i$ , le polynôme  $g_i g_j = g$  est annulateur de  $\mathbf{A}$ , donc :

$$\Pi_{\lambda_i} \circ \Pi_{\lambda_j} = g_i (\mathbf{A}) h_i (\mathbf{A}) g_j (\mathbf{A}) h_j (\mathbf{A})$$

$$= g_i (\mathbf{A}) h_i (\mathbf{A}) h_j (\mathbf{A}) g_j (\mathbf{A})$$

$$= \mathbf{0}.$$

Il nous reste à montrer que

$$\text{Im}(\Pi_{\lambda_i}) = N_{\lambda_i}, \quad \text{Ker}(\Pi_{\lambda_i}) = \bigoplus_{j=1, j \neq i}^p N_{\lambda_j}.$$

Montrons la première égalité. Soit  $\mathbf{y} = \Pi_{\lambda_i} \mathbf{x} \in \text{Im}(\Pi_{\lambda_i})$ , on a  $\mathbf{y} = g_i (\mathbf{A}) h_i (\mathbf{A}) \mathbf{x}$  et

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^{n_i} \mathbf{y} = (x - \lambda_i)^{n_i} g_i (\mathbf{A}) h_i (\mathbf{A}) \mathbf{x}$$

$$= g_i (\mathbf{A}) g (\mathbf{A}) \mathbf{x}$$

$$= \mathbf{0}.$$

Donc  $\mathbf{y} \in N_{\lambda_i}$  et  $\text{Im}(\pi_{\lambda_i}) \subseteq N_{\lambda_i}$ .

Inversement, soit  $\mathbf{x} \in N_{\lambda_i}$ . On a  $\mathbf{x} = \Pi_{\lambda_1} \mathbf{x} + \cdots + \Pi_{\lambda_p} \mathbf{x}$ . Par ailleurs, si  $i \neq j$  le polynôme  $(x - \lambda_i)^{n_i}$  divise  $g_j$ . On a alors

$$\Pi_{\lambda_j} \mathbf{x} = g_j (\mathbf{A}) h_j (\mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \text{si } i \neq j.$$