Université Claude Bernard Lyon 1

Licence "Mathématiques et informatique"

Première année

UE Math I-ALGEBRE

Année 2009-2010

CHAPITRE 2

(Deuxième partie)

1 Relations d'équivalence et d'ordre

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la relation de congruence modulo n

$$a \equiv b[n] \Leftrightarrow n \text{ divise } b - a$$

   est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

2. En vous servant de la division euclidienne, montrer qu'il y a exactement n classes d'équivalence distinctes.

Remarque: l'ensemble quotient pour cette relation joue un rôle important en arithmétique. Il est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 2 Sur $\mathbb{R}^2$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Décrire la classe d'équivalence $(\dot{a, b})$ du couple (a, b).

3. On désigne par $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ l'ensemble quotient pour cette relation. Montrer que l'application

$$\mathbb{R}^2/\mathcal{R} \to [0, \infty[: (\dot{a, b}) \mapsto a^2 + b^2$$

   est bien définie et que c'est une bijection.

Exercice 3 Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur E en posant, pour tout $(x, x') \in E \times E$,

$$x\mathcal{R}x' \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Décrire la classe $\dot{x}$ de l' élément $x \in E$.
3. Pourquoi l'application $E/\mathcal{R} \to F : \dot{x} \mapsto f(x)$ est-elle bien définie? Montrer qu'elle est injective. Que peut-on en conclure sur l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$?

Exercice 4 Soit E un ensemble et soit A une partie de E. On définit dans $\mathcal{P}(E)$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ en posant, pour tout couple (X, Y) de parties de E :

$$X\mathcal{R}Y \Longleftrightarrow A \cap X = A \cap Y.$$

1. Expliciter les classes $\dot{\emptyset}$, $\dot{E}$, $\dot{A}$ et $\dot{C_E A}$.
2. Montrer que si $B = A \cap X$, alors B est l'unique représentant de $\dot{X}$ contenu dans A.
3. Expliciter une bijection entre $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ et $\mathcal{P}(A)$.

Exercice 5 Soit $\mathbb{P}^*$ l'ensemble des nombres premiers strictement supérieurs à 2. On considère la relation $\mathcal{R}$ entre deux éléments de $\mathbb{P}^*$ définie par :

$$p\mathcal{R}q \Longleftrightarrow \frac{p+q}{2} \in \mathbb{P}^*.$$

La relation $\mathcal{R}$ est-elle réflexive, symétrique, transitive ?

Exercice 6 Dans $\mathbb{N}^*$, on définit une relation $<<$ en posant

$$m << n \text{ s'il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = km\,.$$

1. Montrer que $<<$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.
On considère dans la suite de l'exercice que l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est ordonné par la relation $<<$.
2. L'ensemble $\mathbb{N}^*$ possède-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?
3. Soit $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. L'ensemble A possède-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?

Exercice 7 On définit dans $\mathbb{N}^*$ la relation $<<$ en posant pour tout $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$:

$$x << y \Longleftrightarrow \text{Il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } y = x^n.$$

1. Montrer que $<<$ est une relation d'ordre (partiel) sur $\mathbb{N}^*$.
2. Soit $A = \{2, 4, 16\}$. Déterminer le plus grand élément et le plus petit élément de A.

Exercice 8 Dans $\mathbb{R}^2$, on définit la relation $<<$ en posant $(x, y) << (x', y') \Leftrightarrow x < x'$ ou $x = x'$ et $y \leq y'$.

1. Montrer que $<<$ est un ordre. Est-il total?

2. Déterminer l'ensemble des majorants et des minorants du singleton $\{(a, b)\}$ et représenter les dans $\mathbb{R}^2$.

3. Soit $X = \{(a, b), (c, d)\}$. Déterminer Sup X et Inf X.

Exercice 9 Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation réflexive et transitive sur E.

1. Montrer que la relation $\mathcal{E}$ définie sur E par

$$a\,\mathcal{E}\,b \quad \Longleftrightarrow \quad (a\,\mathcal{R}\,b \text{ et } b\,\mathcal{R}\,a)$$

   est une relation d'équivalence.

2. Soit Q l'ensemble quotient $E/\mathcal{E}$. Sur Q, on définit une relation $<<$ par

$$A << B \text{ s'il existe } a \in A \text{ et } b \in B \text{ tels que } a\,\mathcal{R}\,b\,.$$

   Montrer que $<<$ est une relation d'ordre sur Q.