Université Claude Bernard Lyon 1

Licence "Mathématiques et informatique"

Première année

UE Math I-ALGEBRE

Année 2009-2010

CHAPITRE 2

(Troisième partie)

1 Dénombrement

Exercice 1

Démontrer la formule du binôme

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}$ et de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Exercice 2 Evaluer

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}.$$

Ind: on pourra utiliser $(1+x)^n$ *ou encore déterminer, pour un ensemble fini* E, $\sum_{A \in P(E)} \mid A \mid$ *en observant que* $\mid A \mid = \mid E \mid - \mid C_E A \mid$.

Exercice 3 Soient $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$. Montrer sans calcul que

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \cdots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

Ind: on pourra par exemple dénombrer les suites strictement croissantes de $m+1$ *entiers parmi* $1, 2, \ldots, n+1$, *dont le dernier terme vaut successivement* $m+1, m+2, ..., n+1$.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les couples d'entiers $(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que

$$(1)\ n_1 + n_2 \leq n, \qquad (2)\ n_1 + n_2 = n.$$

Mêmes questions pour les triplets $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$. Pouvez-vous généraliser aux cas des $m-$uplets?

Exercice 5 Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Combien y-a-t-il de mots de longueur n en un alphabet A de m lettres?

Exercice 6 Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il y a $n!$ bijections de E vers E.

Exercice 7 Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y-a-t-il de relations binaires sur E? De relations binaires réflexives? symétriques? réflexives et symétriques?

Exercice 8 On considère l'application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie pour tout (n, m) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par:

$$g(n, m) = \frac{(n + m)(n + m + 1)}{2} + m.$$

1. Montrer que si deux couples (n_1, m_1) et (n_2, m_2) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vérifiant $n_1 + m_1 < n_2 + m_2$, alors on a $g((n_1, m_1)) < g((n_2, m_2))$.
2. Montrer que g est injective.
3. Montrer que g est surjective.
4. En déduire que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.