Examen - durée 2h

7 janvier 2008

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

Questions générales

Démontrer les assertions suivantes dans lesquelles E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Les points indiqués pour chaque question seront attribués pour une preuve à la fois correcte et rédigée avec soin.

1. (*1 pt*) Soit Q un polynôme annulateur d'un endomorphisme u de E. Toute valeur propre de u est racine de Q.

2. (*1 pts*) Un endomorphisme de E de rang 1 est diagonalisable si et seulement s'il est de trace non nulle.

3. (*1 pts*) Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E. Si u et v commutent, i.e., tels que $u \circ v = v \circ u$, il existe une base commune de diagonalisation.

4. (*1 pts*) Deux matrice nilpotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si elles ont le même polynôme minimal.

5. (*1 pts*) Construire deux matrices non semblables de $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ ayant même polynôme caractéristique $(X-5)^4(X-4)^2$ et même polynôme minimal $(X-5)^2(X-4)$.

—

Barème : Pour les exercices suivants, les points indiqués seront accordés aux réponses à la fois correctes et argumentées de façon convaincante. Il est demandé de citer clairement les résultats du cours que vous utiliseriez.

Exercice 1

On considère la matrice réelle

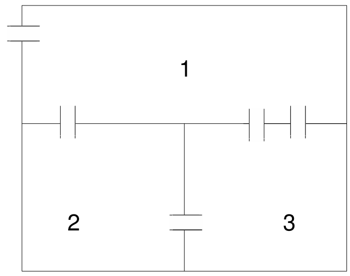
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. (*1 pt*) Montrer que 1 est valeur propre de $\mathbf{A}$. Déterminer le sous-espace propre de $\mathbf{A}$ associé.
2. (*1 pt*) Déterminer toutes les autres valeurs propres de $\mathbf{A}$.
3. (*1 pt*) La matrice $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable ?
4. (*1 pt*) Déterminer le polynôme minimal de $\mathbf{A}$.
5. (*1 pt*) Exprimer, en fonction de la matrice $\mathbf{A}$, les matrices des projections de $\mathbb{R}^3$ sur les sous-espaces propres de $\mathbf{A}$.
6. (*1 pt*) Exprimer, pour tout entier $k \geqslant 1$, la matrice $\mathbf{A}^k$ en fonction de la matrice $\mathbf{A}$.

—

Exercice 2

Un visiteur se promène dans un musée. À chaque étape de sa visite, il change de salle en prenant une porte au hasard pour passer à la salle suivante. Passionné, notre visiteur va passer le restant de ses jours à poursuivre sa visite, sans plus jamais sortir du musée. Le plan du musée ci-dessous indique la position des salles et de leurs portes :



Pour $i = 1, 2, 3$, on note $p_i(k)$ la probabilité que le visiteur se trouve dans la salle i après la k-ème étape. On note $\mathbf{p}^\top(k) = [p_1(k) \;\; p_2(k) \;\; p_3(k)]$ la distribution de probabilité après la k-ème étape. Le visiteur entre dans le musée par la porte qui donne sur la salle 1 ; à l'étape 0 il se trouve ainsi dans la salle 1.

1. (*2 pts*) Calculer la probabilité que le visiteur se trouve dans la salle 3 à la 4 ème étape.
2. (*2 pts*) Calculer la distribution de probabilité limite, i.e., lorsque $k \to +\infty$.

—

Exercice 3

1. (*1 pt*) Calculer la matrice $e^{\mathbf{J}(\lambda)}$, où $\mathbf{J}(\lambda) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ est le bloc de Jordan

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}.$$

2. (*1 pt*) Montrer que les matrices $e^{\mathbf{J}(\lambda)}$ et $\mathbf{J}(e^\lambda)$ sont semblables.
3. (*1 pt*) Soient $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est scindé et $\mathbf{J}$ sa réduite de Jordan. Montrer que $e^{\mathbf{A}}$ et $e^{\mathbf{J}}$ sont semblables.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont le polynôme caractéristique est

$$P_u = (-1)^n (X - \lambda_1)^{h_1} \; \ldots \; (X - \lambda_p)^{h_p}, \quad \text{avec } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j.$$

4. (*1 pt*) Déterminer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme e^u.
5. (*1 pt*) Montrer que le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i et le sous-espace propre de e^u associé à la valeur propre e^{λ_i} sont de même dimension.

Université Claude Bernard Lyon 1 - 2007/2008

Licence Sciences et Technologies - UE Mathématiques III, Algèbre

---

Session 2 - durée 1h30

24 janvier 2008

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

Questions générales

Démontrer les assertions suivantes dans lesquelles E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Les points indiqués pour chaque question seront attribués pour une preuve **à la fois correcte et rédigée avec soin**.

1. (*1.25 pt*) Soit Q un polynôme annulateur d'un endomorphisme u de E. Toute valeur propre de u est racine de Q.

2. (*1.25 pts*) Un endomorphisme de E de rang 1 est diagonalisable si et seulement s'il est de trace non nulle.

3. (*1.25 pts*) Deux matrice nilpotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si elles ont le même polynôme minimal.

4. (*1.25 pts*) Construire deux matrices non semblables de $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ ayant même polynôme caractéristique $(X-5)^4(X-4)^2$ et même polynôme minimal $(X-5)^2(X-4)$. Justifier la raison pour laquelle vos deux matrices ne sont pas semblables.

—

Barème : Pour les exercices suivants, les points indiqués seront accordés aux réponses **à la fois correctes et argumentées de façon convaincante**. Il est demandé de citer clairement les résultats du cours que vous utiliseriez.

Exercice 1

On considère la matrice réelle

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. (*1 pt*) Montrer que 1 est valeur propre de $\mathbf{A}$. Déterminer le sous-espace propre de $\mathbf{A}$ associé.
2. (*1 pt*) Déterminer toutes les autres valeurs propres de $\mathbf{A}$.
3. (*1 pt*) La matrice $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable ?

4. (*1 pt*) Déterminer le polynôme minimal de $\mathbf{A}$.

5. (*1.25 pt*) Exprimer, en fonction de la matrice $\mathbf{A}$, les matrices des projections de $\mathbb{R}^3$ sur les sous-espaces propres de $\mathbf{A}$.

6. (*1.25 pt*) Exprimer, pour tout entier $k \geqslant 1$, la matrice $\mathbf{A}^k$ en fonction de la matrice $\mathbf{A}$.

7. (*1.25 pt*) Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbf{A}^k$.

—

Exercice 2

1. (*1.25 pt*) Calculer la matrice $e^{\mathbf{J}(\lambda)}$, où $\mathbf{J}(\lambda) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ est le bloc de Jordan

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}.$$

2. (*1.5 pt*) Montrer que les matrices $e^{\mathbf{J}(\lambda)}$ et $\mathbf{J}(e^\lambda)$ sont semblables.

3. (*1.5 pt*) Soient $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est scindé et $\mathbf{J}$ sa réduite de Jordan. Montrer que $e^{\mathbf{A}}$ et $e^{\mathbf{J}}$ sont semblables.

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont le polynôme caractéristique est

$$P_u = (-1)^n (X - \lambda_1)^{h_1} \ \ldots \ (X - \lambda_p)^{h_p}, \quad \text{avec } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j.$$

4. (*1.5 pt*) Déterminer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme e^u.

5. (*1.5 pt*) Montrer que le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i et le sous-espace propre de e^u associé à la valeur propre e^{λ_i} sont de même dimension.

Partiel - durée 1h30

6 avril 2007

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés. Les questions de cours et les deux exercices sont indépendants.

Questions générales

Barème : les points indiqués pour chaque question seront attribués pour une preuve à la fois correcte et rédigée avec soin.

Démontrer les assertions suivantes dans lesquelles E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E.

1. (2 points) L'endomorphisme u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il existe un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ annulateur de u scindé et ne possédant que des racines simples.

2. (1,5 points) Si u est de rang 1, alors u est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr}(u) \neq 0$.

3. (1,5 points) Soit v un endomorphisme de E tel que $u \circ v = v \circ u$. Les endomorphismes u et v sont diagonalisables si et seulement si il existe une base commune de diagonalisation.

—

Barème : Pour les deux exercices suivants, un point pour chaque question, qui sera accordé aux réponses à la fois correctes et argumentées de façon convaincante. Il est demandé de citer clairement les résultats du cours que vous utiliseriez.

Exercice 1

Soient E l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^4$ et u un endomorphisme de E défini dans la base canonique par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & a^2 & a^2 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & a^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de l'endomorphisme $u-(1-a)\mathrm{id}_E$. En déduire que $1-a$ est valeur propre de u.
2. Si $a=0$, l'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Dans toute la suite, on suppose que le réel a est non nul.

3. Déterminer toutes les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
4. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de u.

5. Notons $E_1 = \mathrm{Ker}\,(u - (1-a)\mathrm{id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}\,(u - (1+3a)\mathrm{id}_E)$. Montrer que

$$E = E_1 \oplus E_2.$$

6. Exprimer en fonction de u les projections de E sur les sous-espaces E_1 et E_2.

7. Exprimer les endomorphimes u^k, $k \geqslant 1$, et e^u en fonction de ces projections et en déduire leur matrice dans la base canonique.

—

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 1$. Un endomorphisme u de E est dit cyclique s'il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

1. Montrer que si u est un endomorphisme cyclique de E, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est une matrice compagnon de la forme

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

2. Montrer qu'un endomorphisme de E ayant une matrice de la forme C dans une base de E est cyclique.

3. Déterminer le polynôme caractéristique de C.

4. Montrer qu'un endomorphisme cyclique possède une unique matrice compagnon.

Dans la suite, on suppose que u est un endomorphisme cyclique et que la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ forme une base de E, où x_0 est un vecteur de E. On note a_0, …, a_{n-1} les n scalaires tels que

$$u^n(x_0) = a_{n-1}u^{n-1}(x_0) + \ldots + a_1 u(x_0) + a_0 x_0.$$

5. Montrer que le polynôme $Q = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \ldots - a_1 X - a_0$ est annulateur de u.

6. Montrer que si 0 est valeur propre de u alors $a_0 = 0$. Calculer, dans ce cas, le rang de u.

7. Calculer, pour toute valeur propre non nulle λ de u, le rang de l'endomorphisme $u - \lambda \mathrm{id}_E$.

8. Montrer qu'un endomorphisme cyclique de E est diagonalisable si et seulement si il possède n valeurs propres distinctes.

Examen - durée 2h

8 juin 2007

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés. Les questions de cours et les deux exercices sont indépendants.

Questions générales

Barème : les points indiqués pour chaque question seront attribués pour une preuve à la fois correcte et rédigée avec soin.

Démontrer les assertions suivantes dans lesquelles E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. (*1 pt*) Si Q est un polynôme annulateur d'un endomorphisme u de E, alors toute valeur propre de u est racine de Q.

2. (*2 pts*) Si le polynôme $Q = Q_1Q_2$, où Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux, est annulateur d'un endomorphisme u de E, alors $E = \text{Ker } Q_1(u) \oplus \text{Ker } Q_2(u)$.

3. (*1.5 pts*) Soit v un endomorphisme nilpotent d'indice r de E. Il existe une suite d'inclusions strictes :

$$\text{Ker } v^0 \subsetneq \text{Ker } v \subsetneq \text{Ker } v^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \text{Ker } v^{r-1} \subsetneq \text{Ker } v^r.$$

4. (*1.5 pts*) Déterminer toutes les réduites de Jordan possibles pour un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^4$.

—

Barème : Pour les deux exercices suivants, les points indiqués seront accordés aux réponses à la fois correctes et argumentées de façon convaincante. Il est demandé de citer clairement les résultats du cours que vous utiliseriez.

Exercice 1

On considère la matrice réelle

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \\ 5 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

1. (*1 pt*) Montrer que le polynôme caractéristique de A est $P_A = -X(X+9)^2$.
2. (*1 pt*) Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre -9.

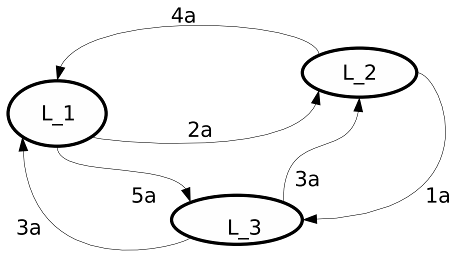
3. (*1 pt*) La matrice A est-elle diagonalisable ?

4. (*1 pt*) Déterminer le polynôme minimal de A.

5. (*1 pt*) Exprimer, en fonction de la matrice A, les matrices des projections π_1 et π_2 de $\mathbb{R}^3$ sur les sous-espaces caractéristiques Ker A et Ker $(A + 9\mathbf{1}_3)^2$.

6. (*1 pt*) Exprimer, en fonction de A et des matrices de π_1 et π_2, la matrice e^{tA}, où t est un réel quelconque.

7. (*3 pts*) On considère trois lacs L_1, L_2 et L_3, chacun de volume V, reliés entre eux par un système de canaux permettant de faire circuler l'eau entre les lacs. L'eau circule avec un taux indiqué par la figure suivante.



Par exemple, il circule du lac L_1 au lac L_2 $2a$ litres d'eau par seconde. On suppose que les échanges sont continus. Les lacs L_1, L_2, L_3 contiennent, à l'instant $t = 0$, respectivement q_1, q_2, q_3 grammes de polluant.

Déterminer la quantité de polluant dans chaque lac, lorsque t tend vers $+\infty$.

—

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. Dans tout cet exercice, on suppose que 0 est racine simple du polynôme minimal de u.

1. (*1 pt*) Montrer que les blocs de Jordan de la réduite de Jordan de u, associés à la valeur propre 0, sont tous de taille 1×1.

2. (*1 pt*) Montrer que la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 0 est égal à l'ordre de multiplicité de 0 dans le polynôme caractéristique de u.

3. (*1 pt*) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

où le premier bloc diagonal est nul et le second bloc diagonal B est inversible.

4. (*1 pt*) Montrer que Ker $u^2 =$ Ker u.

5. (*1 pt*) Montrer que $E =$ Ker $u \oplus$ Im u.

6. (*1 pts*) Soit v un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{C}[X]$ annulateur de v et tel que $Q(0) = 0$ et $Q'(0) \neq 0$. Montrer que

$$E = \text{Ker } v \oplus \text{Im } v.$$

Examen - durée 1h30

27 juin 2007

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés. Les questions générales et les deux exercices sont indépendants.

Questions générales

Barème : les points indiqués pour chaque question seront attribués pour une preuve à la fois correcte et rédigée avec soin.

Dans les assertions suivantes, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E.

1. (*2 pts*) Montrer que u est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de u scindé et ne possédant que des racines simples.

2. (*2 pts*) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E stables par u tels que $E = F \oplus G$. Montrer que le polynôme minimal de u est le ppcm des polynômes minimaux des restrictions de u à F et G.

3. (*1.5 pts*) Montrer que deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si elles ont le même polynôme minimal.

4. (*1.5 pts*) Construire deux matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ nilpotentes, ayant le même polynôme minimal et qui ne sont pas semblables.

5. (*2 pts*) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui possèdent le même polynôme caractéristique

$$P = (X - \lambda_1)^{h_1} \dots (X - \lambda_p)^{h_p}$$

et le même polynôme minimal. Montrer que si, pour tout i, $h_i \leqslant 3$, alors les matrices A et B sont semblables. [On pourra utiliser l'assertion 3.]

—

Barème : Pour les deux exercices suivants, les points indiqués seront accordés aux réponses à la fois correctes et argumentées de façon convaincante. Il est demandé de citer clairement les résultats du cours que vous utiliseriez.

Exercice 1

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

1. (*1 pt*) Déterminer le rang de l'endomorphisme $u - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}$, en déduire le polynôme caractéristique de u

2. (*1 pt*) Montrer que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}\,(u - 14\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}) \oplus \mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$

3. (*1 pt*) Exprimer, en fonction de u, les projections de $\mathbb{R}^4$ sur les sous-espaces $\mathrm{Ker}\,(u - 14\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$ et $\mathrm{Ker}\,(u - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$.

6. (*1 pt*) Déterminer dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ la matrice de u^n, où n est un entier naturel, et la matrice de e^u.

—

Exercice 2

1. (*1 pt*) Déterminer la réduite de Jordan dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

où a est un réel non nul.

2. Dans cette partie, $A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ où a est un réel non nul.

2.1. (*0.5 pt*) Montrer que $A = B^3 + B^2 + B$, où $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2.2. (*1.5 pts*) Déterminer la réduite de Jordan de B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

2.3. (*2 pts*) En déduire la réduite de Jordan de A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

3. (*2 pts*) Déduire de ce qui précède la réduite de Jordan dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & a & a \\ b & b & a \end{bmatrix},$$

où a et b sont des réels non nul distincts.

Partiel - durée 2h

13 novembre 2006

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés. Les questions de cours et les deux exercices sont indépendants.

Questions de cours

Répondre par vrai ou faux. Dans le cas où l'assertion est fausse justifier votre réponse. Barème : un point pour chaque question correcte et argumentée et moins un point pour une réponse incorrecte ou une absence de réponse.

1. La rotation de $\mathbb{R}^2$ de centre l'origine d'angle $\frac{\pi}{4}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Un endomorphisme de rang un admettant une unique valeur propre nulle est diagonalisable.
3. La restriction d'un endomorphisme trigonalisable u à un sous-espace vectoriel stable par u est un endomorphisme trigonalisable.
4. Toutes les racines d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme sont des valeurs propres de cet endomorphisme.
5. Il existe des endomorphismes non nuls, diagonalisables et nilpotents.

—

Barème : Pour les deux exercices suivants, un point pour chaque question, qui sera accordé aux réponses à la fois correctes et argumentées de façon convaincante.

Exercice 1

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$\begin{pmatrix} a & -b & a \\ -b & a & a \\ 2b & 2b & b-a \end{pmatrix},$$

telle que $a+b$ est non nul.

1. Montrer que le polynôme $(X-(a+b))(X+(a+b))$ est annulateur de u.
2. Montrer que l'endomorphisme u est diagonalisable.
3. Quelles sont les valeurs propres de u ? Montrer que

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\,(u-(a+b)\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}\,(u+(a+b)\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}).$$

4. Exprimer en fonction de u la projection π_1 sur le sous-espace Ker $(u-(a+b)\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ parallèlement à Ker $(u+(a+b)\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ et la projection π_2 sur Ker $(u+(a+b)\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ parallèlement à Ker $(u-(a+b)\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

5. Déterminer le rang de π_1 et π_2. Quelle est la dimension des sous-espaces propres de u ?

6. Déterminer le polynôme caractéristique de u.

7. Exprimer u^n et e^u en fonction des projections π_1 et π_2.

8. Déterminer les matrices des endomorphismes u^n et e^u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

—

Exercice 2

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u, v deux endomorphismes de E.

1. Montrer que si 0 est valeur propre de $u \circ v$ alors 0 est aussi valeur propre de $v \circ u$.

2. Donner un exemple d'endomorphismes u et v tels que les sous-espaces Ker $(u \circ v)$ et Ker $(v \circ u)$ ne soient pas de même dimension.

Pour la suite de l'exercice, on suppose que $u \circ v$ possède une valeur propre non nulle λ.

3. Montrer que λ est valeur propre de $v \circ u$.

4. On note $E_\lambda^{u \circ v}$ le sous-espace propre de $u \circ v$ associé à la valeur propre λ et $E_\lambda^{v \circ u}$ le sous-espace propre de $v \circ u$ associé à la valeur propre λ. Montrer que $u(E_\lambda^{v \circ u})$ est un sous-espace vectoriel de $E_\lambda^{u \circ v}$ et que $v(E_\lambda^{u \circ v})$ est un sous-espace vectoriel de $E_\lambda^{v \circ u}$.

5. Montrer que la restriction de u à $E_\lambda^{v \circ u}$ est injective. En déduire que

$$\dim E_\lambda^{v \circ u} \leqslant \dim E_\lambda^{u \circ v}.$$

6. Déduire des questions précédentes que

$$\dim E_\lambda^{v \circ u} = \dim E_\lambda^{u \circ v}.$$

7. On suppose que u et v sont des isomorphismes. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ne possèdent pas de valeurs propres nulles.

8. En déduire que si u et v sont des isomorphismes alors $u \circ v$ est diagonalisable si et seulement si $v \circ u$ est diagonalisable.

Examen - durée 2h

5 janvier 2007

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés. Les questions de cours et les deux exercices sont indépendants.

Questions de cours

Répondre par vrai ou faux. Dans le cas où l'assertion est fausse justifier votre réponse. Barème : un point pour chaque question correcte et argumentée, moins un point pour une réponse incorrecte et zero point pour une absence de réponse.

1. Toute transformation orthogonale de $\mathbb{R}^3$ de déterminant 1 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension 2 ayant le même polynôme caractéristique scindé et le même polynôme minimal n'ont pas la même réduite de Jordan.

3. Deux endomorphismes de même rang, même déterminant, même trace ayant les mêmes polynômes caractéristiques sont semblables.

4. Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les polynômes caractéristiques sont scindés sont semblables si et seulement si elles ont même réduite de Jordan à l'ordre des blocs près.

5. Il existe des endomorphismes non nuls, diagonalisables et nilpotents.

—

Barème : Pour les deux exercices suivants, un point pour chaque question, qui sera accordé aux réponses à la fois correctes et argumentées de façon convaincante.

Exercice 1

On considère l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on note $|| \, ||$ la norme associée. On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On rappelle que si $y = (y_1, y_2, y_3)$ et $x = (x_1, x_2, x_3)$ sont exprimés dans la base B, alors

$$y \wedge x = (y_2x_3 - y_3x_2, y_3x_1 - y_1x_3, y_1x_2 - y_2x_1).$$

1.1 Montrer que, pour tout vecteur y de $\mathbb{R}^3$, l'application $u_y : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $u_y(x) = y \wedge x$ est un endomorphisme de E.

1.2 Montrer que la matrice de l'endomorphisme u_y dans la base B est

$$A_y = \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Dans toute la suite de l'exercice $y = (y_1, y_2, y_3)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $||y|| = 1$. On notera A la matrice A_y.

2.1. Calculer le polynôme caractéristique de A.

2.2 Montrer que le polynôme $X^3 + X$ est annulateur de A. Déterminer les valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de la matrice A.

2.3. Exprimer en fonction de A les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ des projecteurs sur les sous-espaces propres de A associés à chaque valeur propre complexe de A.

2.4. Exprimer, pour tout réel t, la matrice e^{tA} en fonction de ces projecteurs.

2.5. En déduire, pour tout réel t, la relation suivante

$$e^{tA} = \mathbf{1}_3 + \sin(t)A + (1 - \cos(t))A^2,$$

où $\mathbf{1}_3$ désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

—

Exercice 2

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E vérifiant $u^3 = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer que $X^2 + X + 1$ divise le polynôme $X^3 - 1$. Donner toutes les valeurs possibles du polynôme minimal de u.

2. On suppose que $n = 2$ et que u n'est pas l'identité.

2.1. Montrer que u ne possède pas de valeur propre réelle.

2.2. Montrer que, pour tout vecteur non nul x de E, le couple $(x, u(x))$ forme une base de E. Écrire la matrice de u dans cette base.

3. On suppose que $n = 3$.

3.1. Montrer que u possède au moins une valeur propre réelle.

3.2. Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}\ (u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\ (u^2 + u + \mathrm{id}_E).$$

3.3. Dans le cas où $u \neq \mathrm{id}_E$, montrer que le polynôme minimal de u est $X^3 - 1$.

3.4. Calculer la dimension des sous-espaces $\mathrm{Ker}\ (u - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}\ (u^2 + u + \mathrm{id}_E)$.

3.5. En considérant les restrictions de l'endomorphisme u aux sous-espaces $\mathrm{Ker}\ (u - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}\ (u^2 + u + \mathrm{id}_E)$ et en utilisant la partie 2, construire une base de E dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Université Claude Bernard Lyon 1 - 2005/2006

Licence Sciences et Technologies - UE Mathématiques IV, Algèbre

---

Partiel - durée 1h30

6 avril 2006

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés. Les deux exercices sont indépendants. Barème : un point pour chaque question, qui sera accordé aux réponses à la fois correctes et argumentées de façon convaincante.

Exercice 1

On considère la matrice complexe

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la somme des valeurs propres de M ?
2. Quel est le produit des valeurs propres de M ?
3. Montrer que, si son déterminant n'est pas nul, M est diagonalisable.
4. Montrer que, si son déterminant est nul, M n'est diagonalisable que si elle est nulle.
5. Montrer que M est diagonalisable sauf si elle est de rang un.
6. On suppose maintenant que M est réelle ; à quelle condition est-elle diagonalisable par un changement de base réel ?

Exercice 2

On considère un entier $n \geqslant 2$, et la matrice U carrée, à n lignes et n colonnes, dont tous les coefficients sont égaux à 1. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont U est la matrice dans la base canonique.

1. Montrer que U est diagonalisable, et que ses espaces propres, correspondant à ses diverses valeurs propres, sont orthogonaux.
2. Quel est le rang de U et quelle est la dimension de l'image de f ?
3. Quelle est la dimension du noyau de f ?
4. Quelle est la multiplicité de la valeur propre nulle de f ?
5. Montrer que f possède une unique valeur propre λ non nulle, qui est simple.
6. Quelle est la trace de U et quelle est la valeur de λ ?
7. Quel est le polynôme caractéristique de U ?
8. Donner une équation définissant le noyau de f.
9. Trouver un vecteur propre de f pour la valeur propre λ.
10. Soit $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n)$ la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$ dont U est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$; exprimer la valeur de φ.
11. Soit $q(x_1, x_2, ..., x_n)$ la forme quadratique dont φ est la forme polaire ; exprimer la valeur de q .
12. Quel est le rang de q ?
13. Exprimer q comme le carré d'une forme linéaire.
14. Quelle est la signature de q ?

Partiel - durée 2h

1 juin 2006

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés. Les trois exercices sont indépendants. Barème : un point pour chaque question, qui sera accordé aux réponses à la fois correctes <u>et</u> argumentées de façon convaincante.

Exercice 1

1. Montrer qu'une matrice qui annule le polynôme $(X-1)(X-2)$ a ses valeurs propres contenues dans l'ensemble $\{1,2\}$.

2. Montrer qu'une matrice qui annule le polynôme $(X-1)(X-2)$ est diagonalisable.

3. Quelles sont les valeurs propres d'une matrice non diagonale qui annule le polynôme $(X-1)(X-2)$?

4. Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

annule le polynôme $(X-1)(X-2)$.

5. Grâce à l'identité $1 = (X-1) - (X-2)$, exprimer en fonction de A les matrices P_1 du projecteur sur E_1 parallèlement à E_2, et P_2 du projecteur sur E_2 parallèlement à E_1, où E_1 est l'espace propre de A pour sa valeur propre 1 et E_2 l'espace propre de A pour sa valeur propre 2.

6. Quels sont les rangs de P_1 et de P_2 ? Quelles sont les dimensions de E_1 et de E_2 ? Quel est le polynôme caractéristique de A ?

7. Exprimer A^n et e^A en fonction de P_1 et de P_2.

Exercice 2

On considère la matrice B carrée d'ordre $n+1$ dont toutes les lignes valent $(1\ 1\ \ldots\ 1\ \ -n)$, ainsi que l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans lui-même que B représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

1. Quel est le rang de B et quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} f$.

2. Quelle est la somme des valeurs propres de B ? Montrer que toutes les valeurs propres de f sont égales.

3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4. Calculer B^m pour $m \geqslant 2$.

5. Calculer e^{tB}.

6. Déterminer trois fonctions $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $\gamma(t)$ telles que

$$\alpha'(t) = \beta'(t) = \gamma'(t) = \alpha(t) + \beta(t) - 2\gamma(t)$$

et $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 1$ et $\gamma(0) = 2$.

7. Montrer que si M est une matrice carrée d'ordre n nilpotente les solutions du système différentiel

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

sont des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Exercice 3

1. Montrer que la forme quadratique

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 2z^2$$

définit une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$.

2. Ecrire la matrice de q et la forme polaire de q.

3. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ orthonormée pour q.

4. Trouver la projection orthogonale, au sens de q, du vecteur (x, y, z) sur le plan (Ox, Oy).

5. Quels sont les espaces propres de la matrice de q ?

6. Quels sont les axes de symétrie de l'ellipsoïde d'équation $q(x, y, z) = 1$, lorsque l'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de la norme euclidienne usuelle ?

7. Quels sont les axes de symétrie de l'ellipsoïde d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, lorsque l'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de la norme euclidienne associée à q ?

Université Claude Bernard Lyon 1 - 2005/2006

Licence Sciences et Technologies - UE Mathématiques IV, Algèbre

---

Examen (session 2) - durée 1h30

29 juin 2006

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés. Les deux exercices sont indépendants. Les points de chaque question ne seront accordés qu'aux réponses à la fois correctes <u>et</u> argumentées de façon convaincante.

Exercice 1

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, qui est représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix}$$

1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. Montrer que $n-1$ est une valeur propre de f.
3. Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre $n-1$.
4. Quel est l'ordre de multiplicité de la valeur propre $n-1$?
5. Calculer la trace de la matrice A. En déduire la valeur de toutes les valeurs propres de f.
6. Déterminer le polynôme minimal de f.
7. Montrer que l'endomorphisme f est inversible et déterminer l'inverse de f.
8. Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 3x + y + z, \\ \frac{dy}{dt} &= x + 3y + z, \\ \frac{dz}{dt} &= x + y + 3z, \end{cases}$$

où $x, y, z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont trois fonctions dérivables vérifiant $x(0) = 1$, $y(0) = z(0) = 0$.

Exercice 2

Soit q la forme quadratique sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ définie dans la base canonique par

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4(xy + xz + yz).$$

1. Écrire la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et la forme polaire de q.
2. Décomposer q en somme de carrés linéairement indépendants.
3. Déterminer le rang et la signature de q.
4. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q et écrire la matrice de q dans cette base.
5. Existe-t-il dans le plan $x = y$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à lui-même pour la forme quadratique q ?
6. La forme quadratique définit-elle une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$?
7. Montrer que 3 est une valeur propre de la matrice de la forme quadratique q et déterminer tous les sous-espaces propres de cette matrice.
8. Diagonaliser la matrice de la forme quadratique q dans une base orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

Université Claude Bernard Lyon 1 - 2005/2006

Licence Science et Technologies - UE Mathématiques IV, Algèbre

---

Partiel - durée 1h30

17 novembre 2005

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

Question de cours

On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif. Expliquer les relations qu'il existe entre l'espace vectoriel E, son dual et son bidual.

Problème

Les trois parties du problème sont indépendantes et peuvent être traitées séparément dans l'ordre de votre choix. Dans les parties 1 et 2, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et u est un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique P_u est scindé :

$$P_u = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{h_i}.$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, N_i désigne le sous-espace caractéristique $\mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{id})^{h_i}$. On rappelle que $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_p$.

Partie 1

Soient d et n deux applications de E dans E définies pour tout $x \in N_i$, $i \in \{1, \dots, p\}$, par

$$d(x) = \lambda_i x, \qquad n(x) = u(x) - \lambda_i x.$$

1. Montrer que d et n sont des endomorphismes de E.

2. Montrer que d est diagonalisable.

3. Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on désigne par n_i la restriction de n au sous-espace N_i. Montrer que, pour tout i, n_i est nilpotente. En déduire que n est nilpotente.

4. En déduire que, pour tout endomorphisme u de E dont le polynôme caractéristique est scindé, il existe des endomorphismes d et n de E vérifiant les trois assertions suivantes :

(1) d est diagonalisable et n est nilpotent,
(2) $u = d + n$,
(3) $d \circ n = n \circ d$.

Partie 2

Il s'agit de montrer l'unicité de la décomposition de l'endomorphisme u donnée en question 4.

Soient d' et n' des endomorphismes de E vérifiant les assertions (1), (2) et (3) de la question 4.

5. A l'aide des relations (2) et (3), montrer que $u \circ d' = d' \circ u$.

6. En déduire que N_i est stable par d'.

7. Montrer les relations suivantes :

$$\textbf{i)}\ d \circ d' = d' \circ d, \qquad \textbf{ii)}\ n \circ n' = n' \circ n, \qquad \textbf{iii)}\ n - n' = d' - d.$$

8. Déduire de la question 6 que les endomorphismes d et d' sont diagonalisables dans une même base. En déduire que $d' - d$ est diagonalisable.

9. Soient h et h' les indices de nilpotence de n et n'. En utilisant la relation **ii)**, calculer $(n - n')^{h+h'}$. En déduire que $n - n'$ est nilpotente.

10. Montrer qu'un endomorphisme nilpotent et diagonalisable est nul. En déduire que $n = n'$ et que $d = d'$.

Partie 3

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de u

2. Déterminer une base $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de u dans la base B soit formée de blocs triangulaires :

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Décomposer la matrice $[u]_B$ en la somme d'une matrice diagonale D' et d'une matrice nilpotente N'.

4. En déduire une matrice diagonalisable D et une matrice nilpotente N telles que

$$A = D + N.$$

Examen - durée 2h

6 janvier 2006

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés. On accordera une grande importance à la concision, à la clarté et à la précision de la rédaction. Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1 (7 points)

Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une forme quadratique définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x) = x_1^2 + 7x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 10x_2x_3 + 2x_1x_3.$$

1. Décomposer q en carrés de formes linéaires indépendantes. En déduire le rang et la signature de q.

2. Diagonaliser q dans une base q-orthogonale B en exhibant la matrice de passage de la base canonique à la base B.

3. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur v de coordonnées $(1, 1, 1)$ dans la base canonique. Déterminer l'orthogonal $F^\perp$ du sous-espace F selon q.

Exercice 2 (7 points)

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On note $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel formé des endomorphismes de E. Pour tout endomorphisme u de E, on définit l'application

$$\begin{aligned} D_u : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ f &\longmapsto u \circ f. \end{aligned}$$

1. Montrer que D_u est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

2. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$(D_u)^n(f) = u^n \circ f.$$

En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, on a

$$P(D_u) = D_{P(u)}. \tag{1}$$

3. En utilisant la relation (1), montrer que si u est diagonalisable alors D_u est diagonalisable.

4. Inversement, en utilisant la relation (1), montrer que si D_u est diagonalisable alors u est diagonalisable.

5. Soient $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E et u un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est notée M. Soit $(e_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une base de $\mathcal{L}(E)$ définie par

$$e_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k}e_i,$$

où $\delta_{j,k} = 1$ si $j = k$ et $\delta_{j,k} = 0$ si $j \neq k$. Montrer que la matrice de D_u dans la base

$$(e_{1,1}, \ldots, e_{n,1}, e_{1,2}, \ldots, e_{n,2}, \ldots, e_{1,n}, \ldots, e_{n,n}),$$

s'écrit

$$\begin{pmatrix} M & & & 0 \\ & M & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (6 points)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension 3. On rappelle qu'un endomorphisme f de E est autoadjoint si, pour tous $x, y \in E$,

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle.$$

1. Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de E. Soient $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ deux vecteurs de E. Calculer $\langle x, y\rangle$ en fonction des coordonnées x_i et y_i de x et y.

2. Soit f un endomorphisme audoajoint de E. On note λ_m la plus petite valeur propre de f et λ_M la plus grande valeur propre de f. En utilisant une base orthonormée adéquate, montrer que, pour tout $x \in E$,

$$\lambda_m||x||^2 \leqslant \langle f(x), x\rangle \leqslant \lambda_M||x||^2.$$

3. Soit g un endomorphisme quelconque de E. On note g^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans une base orthonormée B de E est ${}^t[g]_B$. Montrer que l'endomorphisme $f = \frac{1}{2}(g + g^*)$ est autoadjoint. Soient λ une valeur propre de g, λ_m la plus petite valeur propre de f et λ_M la plus grande valeur propre de f. Montrer que

$$\lambda_m \leqslant \lambda \leqslant \lambda_M.$$

4. En déduire que si g est un endomorphisme antisymétrique de E, i.e. vérifiant $g^* = -g$, alors l'ensemble $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(g)$ des valeurs propres réelles de g est soit vide, soit réduit à $\{0\}$.

5. Soit g un endomorphisme antisymétrique de E, montrer que $\mathrm{id}_E + g$ est inversible et que $(\mathrm{id}_E - g)(\mathrm{id}_E + g)^{-1}$ est orthogonal.

Examen - durée 1h30

23 janvier 2007

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés. Les deux exercices sont indépendants.
Barème : pour les deux exercices, un point pour chaque question, qui sera accordé aux réponses à la fois correctes et argumentées de façon convaincante.

Exercice 1

Dans cet exercice, E désigne un espace vectoriel réel de dimension 3.

1. Soit u un endomorphisme nilpotent de E, i.e., il existe un entier p tel que $u^p = 0$.

1.1. Montrer que le polynôme caractéristique de u est $P_u(X) = -X^3$.

1.2 Donner toutes les réduites de Jordan possibles pour u, à l'ordre des blocs près.

1.3 On suppose que le polynôme minimal de u est $m_u(X) = X^3$. Montrer qu'il existe un vecteur non nul x de E tel que $B = (x, u(x), u^2(x))$ est une base de E.

1.4 Écrire la matrice de u dans la base B.

2. Soit u un endomorphisme de E dont la réduite de Jordan est formée d'un seul bloc

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

2.1 Montrer que l'endomorphisme $v = u - \lambda \mathrm{id}_E$ est nilpotent.

2.2 Construire une base de E dans laquelle la matrice de u est $J(\lambda)$.

3. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

3.1 Calculer le polynôme caractéristique de u. Montrer que le polynôme minimal de u est $m_u(X) = (X+2)^3$.

3.2 Déterminer une réduite de Jordan de u.

3.3. Construire une base de Jordan de u.

Exercice 2

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$, on note $||\ ||$ la norme associée.

Un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ est dit antisymétrique s'il vérifie, pour tous vecteurs x, y de $\mathbb{R}^n$, la relation suivante
$$\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle.$$

1. Soit u un endomorphisme antisymétrique de $\mathbb{R}^n$.

1.1 Montrer que, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, on a $\langle x, u(x)\rangle = 0$.

1.2. Montrer que si u admet une valeur propre réelle elle est nulle.

1.3. Montrer que la matrice A de l'endomorphisme u dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ est antisymétrique, c'est-à-dire vérifie $A^t = -A$.

1.4. Montrer que $\det(A) = (-1)^n \det(A)$. En déduire que si n est impair alors u ne peut être un isomorphisme.

1.5. Montrer que l'orthogonal de Ker u est le sous-espace Im u. En déduire que

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u.$$

1.6. Montrer que la restriction de l'endomorphisme u au sous-espace Im u est un isomorphisme.

1.7. En déduire, en utilisant la question 1.4., que u est de rang pair.

2. On suppose dans cette partie que $n = 3$. Soit $y = (y_1, y_2, y_3)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $||y|| = 1$ et soit u l'endomorphisme antisymétrique de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1. Montrer que le polynôme $X^3 + X$ est annulateur de u.

2.2. Montrer que
$$E = \text{Ker}\,(u) \oplus \text{Ker}\,(u^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3}).$$

2.3 Déduire de la question 1.1. que si x n'appartient pas à Ker (u), alors $(x, u(x))$ est libre.

2.4. Calculer Ay et montrer que Ker (u) est de dimension 1.

2.5. Construire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Examen - durée 1h30

25 janvier 2007

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés. Les deux exercices sont indépendants.
Barème : pour les deux exercices, un point pour chaque question, qui sera accordé aux réponses à la fois correctes et argumentées de façon convaincante.

Exercice 1

1. Soient E un espace vectoriel réel de dimension $n > 1$ et u un endomorphisme nilpotent de E, i.e., il existe un entier p tel que $u^p = 0$.

1.1. Montrer que le polynôme caractéristique de u est $P_u(X) = (-1)^n X^n$.

1.2. On suppose que le polynôme minimal de u est $m_u(X) = X^n$. Montrer qu'il existe un vecteur non nul x de E tel que $B = (x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.

1.3. Écrire la matrice de u dans la base B.

2. On suppose que E est de dimension 3.

Montrer que deux endomorphismes de E ayant le même polynôme caractéristique scindé et le même polynôme minimal ont la même réduite de Jordan à l'ordre des blocs près.

3. On suppose que E est de dimension 4.

3.1. Donner toutes les réduites de Jordan possibles, à l'ordre des blocs près, d'un endomorphisme nilpotent de E.

3.2. Construire deux endomorphismes u et v de E ayant le même polynôme caractéristique $P_u = P_v = X^4$, le même polynôme minimal $m_u = m_v = X^2$ et qui n'ont pas la même réduite de Jordan.

4. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique par la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & 2 & 6 \\ -7 & -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

4.1.Calculer le polynôme caractéristique de u. Montrer que le polynôme minimal de u est $m_u(X) = (X-1)(X-2)^3$.

4.2. Déterminer une réduite de Jordan de u.

4.3. Construire une base de Jordan de u.

EXERCICE 2

1. Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et e^A son exponentielle.

1.1. Montrer que $(e^A)^\perp = e^{A^\perp}$, où $A^\perp$ désigne la matrice transposée de la matrice A.

1.2. Montrer que si A est antisymétrique, i.e., $A^\perp = -A$, alors la matrice e^{tA} est orthogonale pour tout réel t.

1.3. Calculer la dérivée
$$\frac{d}{dt}\left[(e^{tA})^\perp e^{tA}\right].$$

1.4. En déduire que si la matrice e^{tA} est orthogonale pour tout réel t, alors la matrice A est antisymétrique.

2. On suppose que $n = 2$.

2.1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$, où θ est un réel. Calculer e^A.

2.2. Donner une interprétation géométrique de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté par la matrice e^A dans la base canonique.

2.3. Soit $B = \begin{pmatrix} \rho & -\theta \\ \theta & \rho \end{pmatrix}$, où ρ et θ sont deux réels. Diagonaliser dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ la matrice B.

2.4. Calculer e^B.

2.5. Trouver une solution X dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de l'équation $e^X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. On suppose que $n = 3$. On considère la matrice réelle
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.1. Calculer le polynôme caractéristique de A.

3.2. Diagonaliser dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ la matrice A en donnant une matrice de passage.

3.3. Calculer, pour tout réel t, la matrice e^{tA}.

3.4. Donner une interprétation géométrique de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice e^{tA} dans la base canonique.