Université Claude Bernard Lyon 1 - automne 2009
Licence Sciences, Technologies, Santé - mention mathématiques

UE Math III Algèbre - MAT2002L

Planche d'exercices I

- MISE EN BOUCHE -

Exercice 1. Trouver des bases de l'espace des lignes et de l'espace des colonnes de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Quelles sont les dimensions des noyaux de l'application linéaire représentée par $\mathbf{A}$ et de celle représentée par sa transposée. Déterminer des bases de ces noyaux.

Exercice 2. Soit $\mathcal{T}^s$ (resp. $\mathcal{T}^i$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\mathcal{T}^s$ et $\mathcal{T}^i$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}^s + \mathcal{T}^i$. Cette somme est-elle directe ?
3. Quels sont les dimensions des sous-espaces $\mathcal{T}^s$ et $\mathcal{T}^i$?
4. Montrer que toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

Exercice 3. Donner les dimensions des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ suivants

i) le sous-espace vectoriel des matrices à coefficients constants,

ii) le sous-espace vectoriel des matrices diagonales,

iii) le sous-espace vectoriel des matrices symétriques,

iv) le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.

Exercice 4.* Soit Π le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + 3y + 5z = 0$ et soit Δ la droite d'équation $3x = 5y = 15z$. Notons u la projection de $\mathbb{R}^3$ sur le plan Π parallèlement à la droite Δ.

1. Écrire la matrice de l'endomorphisme u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Sans calcul, trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est la plus simple possible, i.e., ayant le plus grand nombre de coefficients nuls.

Exercice 5.* Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant $u^2 = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer que
$$E = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{id}_E).$$

2. Montrer que si $u \neq \mathrm{id}_E$ et $u \neq -\mathrm{id}_E$, alors il existe une base de E dans laquelle l'endomorphisme u est représenté par la matrice
$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}_q \end{bmatrix},$$
où $\mathbf{1}_p$ et $\mathbf{1}_q$ désignent les matrices identités de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ at $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ respectivement.

3. Montrer que les entiers p et q ne dépendent que de u.

Exercice 6.★ Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et $B = (e_1, e_2)$ une base de E. Soit u l'endomorphisme de E représenté dans la base B par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que $u^2 = 0$
2. Déterminer le rang, l'image et le noyau de u.
3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 7.★ Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\mathbf{A}^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathbf{A} + \det(\mathbf{A})\mathbf{1}_2 = 0.$$

Exercice 8. Soient $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que

$$\mathbf{A}^2 = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{1}_n.$$

1. Montrer que si μ est non nul, la matrice $\mathbf{A}$ est inversible et que

$$\mathbf{A}^{-1} = \mu^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}_n).$$

2. Montrer que pour tout entier k, la matrice $\mathbf{A}^k$ s'écrit comme une combinaison linéaire des matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{1}_n$.

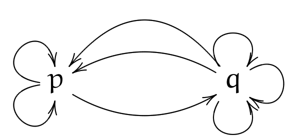
Exercice 9.★ On considère les deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{bmatrix}.$$

1. Écrire $\mathbf{A}$ comme combinaison linéaire de $\mathbf{J}$ et $\mathbf{1}_n$.
2. Calculer $\mathbf{J}^k$ et $\mathbf{A}^k$, pour tout entier k.

Exercice 10.★ Soit $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$ est de la forme $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$.
2. Combien y a-t-il de chemins de longueur 2, 3 ou 4 dans le graphe ci-dessous ?



3. Comparer les résultats avec $\mathbf{M}^2$, $\mathbf{M}^3$, $\mathbf{M}^4$ que l'on calculera à l'aide de la matrice D.
4. Déterminer, pour tout entier $k \geq 1$, le nombre de chemins de longueur k dans le graphe suivant