Université Claude Bernard Lyon 1 - automne 2009
Licence Sciences, Technologies, Santé - mention mathématiques

UE Math III Algèbre - MAT2002L

PLANCHE D'EXERCICES III

- POLYNÔME MINIMAL - THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON -

Exercice 1.* Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes, où $a \neq b$:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

Exercice 2.* Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme nilpotent de E.

1. Sans utiliser le polynôme minimal, montrer que le polynôme caractéristique de u est $p_u = (-1)^n X^n$. Comment procéder avec le polynôme minimal ?
2. Par récurrence, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ soit triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.
3. Inversement, montrer que tout endomorphisme de E dont la matrice dans une base $\mathcal{B}$ de E est triangulaire avec des 0 sur la diagonale est nilpotente d'indice de nilpotence $p \leqslant n$.

Exercice 3.* Soit $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 1$.

1. Montrer que u est linéaire.
2. Calculer u^2 et en déduire que u est diagonalisable.

Exercice 4.* Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les matrices réelles suivantes soient diagonalisables :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}.$$

Exercice 5.*

1. Soit $\mathbf{J}$ une matrice complexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

1.1. Calculer $\mathbf{J}^p$ pour tout entier $p \in \{1, \dots, n\}$.
1.2. En déduire que $\mathbf{J}$ est diagonalisable.
1.3. Montrer que $\mathbf{1}_n, \mathbf{J}, \dots, \mathbf{J}^{n-1}$ sont linéairement indépendants.

1.4. Déterminer le polynôme minimal de $\mathbf{J}$.
1.5. Calculer les valeurs propres de $\mathbf{J}$.
1.6. Diagonaliser $\mathbf{J}$ en exhibant la matrice de passage.
2. Soit $\mathbf{A}$ la matrice circulante complexe suivante :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \dots & a_n & a_1 \end{bmatrix}$$

2.1. Exprimer $\mathbf{A}$ comme un polynôme en la matrice $\mathbf{J}$.
2.2. Montrer que pour tout polynôme Q, $Q(\mathbf{J})$ est diagonalisable et que

$$\mathrm{Sp}(Q(\mathbf{J})) = \{Q(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathbf{J})\}.$$

2.3. En déduire que $\mathbf{A}$ est diagonalisable et calculer les valeurs propres de $\mathbf{A}$.
2.4. Calculer le déterminant de $\mathbf{A}$.

Exercice 6.* Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'application linéaire trace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à toute matrice associe la somme de ses coefficients diagonaux.
1. Déterminer l'image de la trace et la dimension de son noyau.
2. Montrer qu'on a une somme directe :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker\ trace} \oplus \mathrm{Vect}(\mathbf{1}_n).$$

Soit u l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$u(\mathbf{A}) = \mathbf{A} + \mathrm{trace}(\mathbf{A})\mathbf{1}_n.$$

3. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Est-il inversible ?

Exercice 7.* Soit u un endomorphisme inversible d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
1. Montrer que 0 ne peut pas être valeur propre de u.
2. En déduire que u^{-1} est un polynôme en u. [On pourra utiliser le fait que le polynôme X ne divise pas le polynôme caractéristique de u.]

Exercice 8.* Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
1. Montrer que si P est premier avec le polynôme minimal m_u de u alors l'endomorphisme $P(u)$ est inversible.
2. Inversement, montrer que si $P(u)$ est inversible, alors les polynômes P et m_u sont premiers entre eux.

Exercice 9. Soient u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que la restriction de u au sous-espace F est un endomorphisme diagonalisable de F.

Exercice 10. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. On considère deux sous-espaces vectoriel F et G de E stables par u tels que

$$E = F \oplus G.$$

Si m_F et m_G désignent les polynômes minimaux des restrictions de u à F et G respectivment, montrer que le polynôme minimal m_u de u est donné par

$$m_u = \mathrm{ppcm}(m_F, m_G).$$

Exercice 11.★ Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $X^3 = X$.

Exercice 12.★ L'objectif est de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation

$$X^3 + X = 0. \tag{1}$$

Soit $\mathbf{A}$ une matrice non nulle satisfaisant la relation (1).

1. Montrer que
$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker } \mathbf{A} \oplus \text{Ker } (\mathbf{A}^2 + \mathbf{1}_3).$$
2. Déterminer le polynôme minimal de $\mathbf{A}$.
3. Montrer que si $\mathbf{x}$ n'appartient pas à Ker $\mathbf{A}$, alors $(\mathbf{x}, \mathbf{Ax})$ est libre.
4. Montrer que Ker A est de dimension 1. En déduire que A est semblable à la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 13.★ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et P le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par

$$P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \ldots - a_1X - a_0.$$

La matrice compagnon du polynôme P est la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

On note u l'endomorphisme de E représenté par la matrice $\mathbf{A}$ dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E fixée.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de u est $p_u = (-1)^n P$.
2. Sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, montrer que le polynôme P est annulateur de u.
3. En déduire que P est le polynôme minimal de u.

Soient v un endomorphisme de E et $\mathbf{x}$ un vecteur non nul de E. Soit p le plus grand entier tel que la famille $\mathcal{B}_\mathbf{x} = (\mathbf{x}, v(\mathbf{x}), \ldots, v^p(\mathbf{x}))$ soit libre.

4. Montrer que le sous-espace

$$E_\mathbf{x} = \text{Vect}(\mathbf{x}, v(\mathbf{x}), \ldots, v^p(\mathbf{x})),$$

est stable par v.

5. Montrer que la matrice dans la base $\mathcal{B}_\mathbf{x}$ de la restriction de l'endomorphisme v au sous-espace $E_\mathbf{x}$ est une matrice compagnon.
6. Écrire le polynôme associé à cette matrice compagnon.
7. En déduire que le polynôme caractéristique de v vérifie $p_v(\mathbf{x}) = 0$.
8. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 14.★ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Un endomorphisme u de E est dit cyclique s'il existe un vecteur $\mathbf{x}$ de E tel que la famille $\mathcal{B}_\mathbf{x} = (\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \ldots, u^{n-1}(\mathbf{x}))$ soit une base de E.

1. Écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_\mathbf{x}$ est une matrice compagnon.
2. Montrer qu'un endomorphisme cyclique possède une unique matrice compagon.
3. Montrer qu'un endomorphisme cyclique de E est diagonalisable si et seulement s'il possède n valeurs propres distinctes.

Exercice 15. Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On note $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel formé des endomorphismes de E. Pour tout endomorphisme u de E, on définit l'application

$$\begin{aligned} D_u : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ f &\longmapsto u \circ f. \end{aligned}$$

1. Montrer que D_u est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n et tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$(D_u)^n(f) = u^n \circ f.$$

En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, on a

$$P(D_u) = D_{P(u)}.$$

3. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si D_u est diagonalisable.
4. Soient $(\mathbf{e}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E et u un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $(\mathbf{e}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est notée M. Soit $(\mathbf{e}_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une base de $\mathcal{L}(E)$ définie par

$$\mathbf{e}_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k}\mathbf{e}_i,$$

où $\delta_{j,k} = 1$ si $j = k$ et $\delta_{j,k} = 0$ si $j \neq k$. Montrer que la matrice de D_u dans la base

$$(\mathbf{e}_{1,1}, \dots, \mathbf{e}_{n,1}, \mathbf{e}_{1,2}, \dots, \mathbf{e}_{n,2}, \dots, \mathbf{e}_{1,n}, \dots, \mathbf{e}_{n,n}),$$

s'écrit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & & & 0 \\ & \mathbf{M} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{M} \end{bmatrix}.$$

Dans la suite, on suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. On considère la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}(E)$, formée des endomorphismes représentés dans la base canonique par les matrices E_i suivantes :

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soit u l'endomorphisme de E représenté dans la base canonique par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Montrer que u est diagonalisable.
6. Écrire la matrice de D_u dans la base $\mathcal{B}$.
7. Diagonaliser D_u.