

PLANCHE D'EXERCICES V

- QUELQUES APPLICATIONS DE LA RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES -

**Exercice 1.** Résoudre le système différentiel

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{bmatrix},$$

pour les matrices  $\mathbf{A}$  suivantes, étudiées dans les planches précédentes,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Exercice 2.**

1. Montrer qu'une équation différentielle d'ordre  $n$  réelle (resp. complexe), donnée par

$$\frac{d^n}{dt^n}z(t) + c_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}z(t) + \dots + c_1\frac{d}{dt}z(t) + c_0z(t) = f(t),$$

où les  $c_i$  sont réels (resp. complexes) et  $f$  une fonction continue à valeurs réelles (resp. complexes), peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire à coefficients constants de la forme

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t).$$

2. Déterminer les fonctions  $x$  de  $C^3(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  solutions de l'équation

$$\frac{d^3}{dt^3}x(t) + \frac{d^2}{dt^2}x(t) - \frac{d}{dt}x(t) - x(t) = \cos t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 3.\*** On considère dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $n \geq 2$ , la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{bmatrix}$$

Déterminer la solution du système

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t),$$

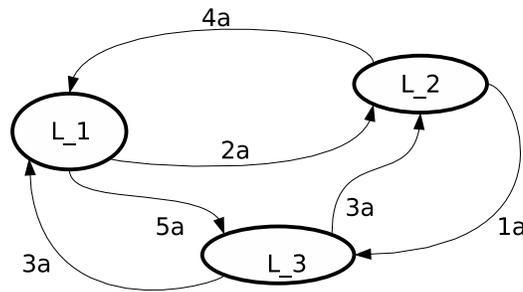
prenant en  $t = 0$  la valeur  $x_0$ , contenue dans l'hyperplan d'équation  $x_1 + \dots + x_n = 0$ .

**Exercice 4.\*** On considère la matrice réelle

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \\ 5 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de  $\mathbf{A}$  est  $P_{\mathbf{A}} = -X(X + 9)^2$ .

2. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre  $-9$ .
3. La matrice  $\mathbf{A}$  est-elle diagonalisable ?
4. Déterminer le polynôme minimal de  $\mathbf{A}$ .
5. Exprimer, en fonction de la matrice  $\mathbf{A}$ , les matrices des projections  $\pi_1$  et  $\pi_2$  de  $\mathbb{R}^3$  sur les sous-espaces caractéristiques  $\text{Ker } \mathbf{A}$  et  $\text{Ker } (\mathbf{A} + 9\mathbf{1}_3)^2$ .
6. Exprimer, en fonction de  $\mathbf{A}$  et des matrices de  $\pi_1$  et  $\pi_2$ , la matrice  $e^{t\mathbf{A}}$ , où  $t$  est un réel quelconque.
7. On considère trois lacs  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$ , chacun de volume  $V$ , reliés entre eux par un système de canaux permettant de faire circuler l'eau entre les lacs. L'eau circule avec un taux indiqué par la figure suivante.

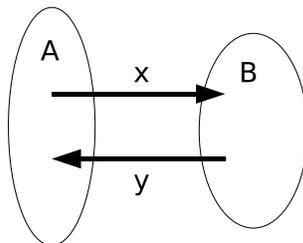


Par exemple, il circule du lac  $L_1$  au lac  $L_2$   $2a$  litres d'eau par seconde. On suppose que les échanges sont continus. Les lacs  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  contiennent, à l'instant  $t = 0$ , respectivement  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  grammes de polluant.

Déterminer la quantité de polluant dans chaque lac, lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 5.\*** Le problème de diffusion suivant apparaît dans de nombreuses situations biologiques. Considérons deux cellules contenant des composés chimiques. On souhaite étudier la concentration d'un composé injecté dans une cellule, alors que les deux cellules peuvent diffuser mutuellement ce composé.

À l'instant  $t = 0$ , on injecte une unité d'un composé chimique dans la cellule A. Le composé se diffuse selon les règles suivantes. À chaque instant  $t$ , la diffusion du composé de la cellule A vers la cellule B est de  $x$  fois la concentration du composé dans la cellule A et la diffusion du composé de la cellule B vers la cellule A est de  $y$  fois la concentration du composé dans la cellule B. On suppose  $x, y > 0$ .



1. Déterminer, à chaque instant  $t$ , la concentration du composé dans chacune des deux cellules.
2. Les concentrations du composé dans chaque cellule se stabilisent-elles au bout d'un certain temps ?

**Exercice 6.\*** On considère deux espèces A et B qui coexistent dans un même environnement naturel. On étudie deux situations d'évolution de ces espèces.

Dans une première situation, on suppose que les deux espèces sont en compétition : le nombre d'individus d'une espèce augmente proportionnellement au nombre d'individus de cette même espèce et décroît proportionnellement au nombre d'individus de l'autre espèce.

1. Si la population de chaque espèce augmente de deux fois le nombre d'individus de l'espèce et décroît d'une fois le nombre d'individus de l'autre espèce, déterminer à chaque instant

le nombre d'individus de chaque espèce lorsque initialement il y a 100 individus de l'espèce A et 200 individus de l'espèce B.

2. Est-ce qu'une des espèces est en voie d'extinction ? Si oui, au bout de combien de temps.

Dans une deuxième situation, on suppose que les deux espèces vivent en symbiose de la façon suivante. Le nombre d'individus de chaque espèce augmente d'une fois le nombre d'individus de l'autre espèce et décroît d'une fois le nombre d'individus de la même espèce.

3. Si initialement les espèces A et B sont respectivement composées de 200 et 400 individus, déterminer à chaque instant la population de chaque espèce.

4. Que se passe-t-il à long terme ?

**Exercice 7.** La suite de Fibonacci est définie par

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \text{ si } n \geq 2, \quad u_0 = u_1 = 1.$$

1. Soit  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Montrer que  $A^n = \begin{bmatrix} u_n & u_{n-1} \\ u_{n-1} & u_{n-2} \end{bmatrix}$ , pour tout  $n \geq 2$ .

2. Diagonaliser  $A$  et en déduire une formule non-récurrente pour  $u_n$ .

**Exercice 8.** Résoudre le système linéaire récurrent suivant :

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + z_{n-1} \\ y_n = y_{n-1} + z_{n-1} \\ z_n = 2z_{n-1} \end{cases}$$

avec  $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 9.\*** Dans un pays, on étudie la migration de population entre les zones rurales et les zones urbaines. Chaque année la moitié de la population des campagnes migre vers les villes, pendant qu'un quart de la population des villes va habiter dans des zones rurales.

Quel est à terme la répartition des populations entre ces deux zones géographiques. Les zones rurales seront-elles complètement désertées ?