Matrices structurées

Matrices de Toeplitz par blocs Toeplitz.

Houssam Khalil

02/03/06

Matrices structurées

Une matrice A de taille $n \times n$ est structurée si :

1. elle dépend de $O(n)$ paramétres à la place de n^2 coefficients.
2. Ces coefficients sont distribuées d'une manière qui nous permet de travailler "simplement" avec cette matrice.

Matrices structurées

Une matrice A de taille $n \times n$ est structurée si :

1. elle dépend de $O(n)$ paramétres à la place de n^2 coefficients.
2. Ces coefficients sont distribuées d'une manière qui nous permet de travailler "simplement" avec cette matrice.

Exemples

1. Matrice de Toeplitz : $T = (t_{i-j})_{i,j}$.
2. Matrice de Hankel : $H = (h_{i+j})_{i,j}$.
3. Matrice de Vandermonde $V = (x_i^{j-1})_{i,j}$
4. Matrice de Cauchy : $C = (\frac{1}{x_i - y_j})_{i,j}$

Toeplitz, $T = (t_{i-j})_{i,j}$

$$\begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & \dots & t_{-n+1} \\ t_1 & t_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{-1} \\ t_{n-1} & \dots & t_1 & t_0 \end{pmatrix}$$

Hankel, $H = (h_{i+j})_{i,j}$

$$\begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{n-1} \\ h_1 & \dots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \dots & h_{2n-3} \\ h_{n-1} & \dots & h_{2n-3} & h_{2n-2} \end{pmatrix}$$

Vandermonde, $V = (x_i^{j-1})_{i,j}$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Cauchy, $C = (\frac{1}{x_i - y_j})_{i,j}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{x_1-y_1} & \dots & \frac{1}{x_1-y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{x_n-y_1} & \dots & \frac{1}{x_n-y_n} \end{pmatrix}$$

Structure de déplacement

Matrices structurées

A est dite structurée si il existe 2 matrices "simples" (creuses) M et N telles que $\mathrm{rg}(\nabla_{M,N}(A)) = \alpha$ (resp $\mathrm{rg}(\Delta_{M,N}(A)) = \alpha$), avec α "petit" ou indépendant de n.

Structure de déplacement

Matrices structurées

A est dite structurée si il existe 2 matrices "simples" (creuses) M et N telles que $\mathrm{rg}(\nabla_{M,N}(A)) = \alpha$ (resp $\mathrm{rg}(\Delta_{M,N}(A)) = \alpha$), avec α "petit" ou indépendent de n.

avec

Opérateurs et rang de déplacement

1. $\nabla_{M,N}(A) = A - MAN^T = GF^T$, G, F de taille $n \times \alpha$.
2. $\Delta_{M,N}(A) = MA - AN$.

Le plus petit α tel que $\mathrm{rg}(\nabla_{M,N}(A)) = \alpha$, s'appelle le $\{M, N\}$ rang de déplacement de A. On le notera $\mathrm{rg}_{M,N}(A)$.

On définit :

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a :

On définit :

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a :

- $\nabla_{Z,Z}(T) = \begin{pmatrix} t_0 & \dots & t_{-n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n-1} & \dots & 0 \end{pmatrix}$. $\mathrm{rg}(\nabla_{Z,Z}(T)) = 2$.

On définit :

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a :

- $\nabla_{Z,Z}(T) = \begin{pmatrix} t_0 & \dots & t_{-n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n-1} & \dots & 0 \end{pmatrix}$. $\mathrm{rg}(\nabla_{Z,Z}(T)) = 2.$
- $\nabla_{Z^T,Z}(H) = \begin{pmatrix} h_0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n-1} & \dots & h_{2n-2} \end{pmatrix}$. $\mathrm{rg}(\nabla_{Z^T,Z}(H)) = 2.$

On définit $D_x = diag(x_1, \dots, x_n)$.

- $\Delta_{D_x,D_y}(C) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. $\mathrm{rg}(\Delta_{D_x,D_y}(C)) = 1$.
- $\Delta_{D_x,Z}(V) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$. $\mathrm{rg}(\Delta_{D_x,Z}(V)) = 1$.

On définit $D_x = diag(x_1, \ldots, x_n)$.

- $\Delta_{D_x,D_y}(C) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$. $\mathrm{rg}(\Delta_{D_x,D_y}(C)) = 1$.
- $\Delta_{D_x,Z}(V) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$. $\mathrm{rg}(\Delta_{D_x,Z}(V)) = 1$.

formes de base

Type Toeplitz	$\mathrm{rg}(\Delta_{Z,Z}(A)) \ll n$
Type Hankel	$\mathrm{rg}(\Delta_{Z^T,Z}(A)) \ll n$
Type Cauchy	$\mathrm{rg}(\Delta_{D_x,D_y}(A)) \ll n$
Type Vandermonde	$\mathrm{rg}(\Delta_{D_x,Z}(A)) \ll n$

Propriétés

- $\Delta_{M,N}(A+B) = \Delta_{M,N}(A) + \Delta_{M,N}(B)$.
- $\nabla_{M,N}(A+B) = \nabla_{M,N}(A) + \nabla_{M,N}(B)$.
- $\Delta_{L,N}(AB) = \Delta_{L,M}(A)B + A\Delta_{M,N}(B)$.
- $\nabla_{L,N}(AB) = \nabla_{L,M}(A)B + LA\Delta_{M,N}(B)$.
- $\Delta_{N,M}(A^{-1}) = -A^{-1}\Delta_{M,N}(A)A^{-1}$.
- $\nabla_{N,M}(A^{-1}) = NA^{-1}\nabla_{M,N}(A)N^{-1}A^{-1}$.

Propriétés

- $\Delta_{M,N}(A+B) = \Delta_{M,N}(A) + \Delta_{M,N}(B)$.
- $\nabla_{M,N}(A+B) = \nabla_{M,N}(A) + \nabla_{M,N}(B)$.
- $\Delta_{L,N}(AB) = \Delta_{L,M}(A)B + A\Delta_{M,N}(B)$.
- $\nabla_{L,N}(AB) = \nabla_{L,M}(A)B + LA\Delta_{M,N}(B)$.
- $\Delta_{N,M}(A^{-1}) = -A^{-1}\Delta_{M,N}(A)A^{-1}$.
- $\nabla_{N,M}(A^{-1}) = NA^{-1}\nabla_{M,N}(A)N^{-1}A^{-1}$.

Proposition

- $\mathrm{rg}_{M,N}(A+B) \leq \mathrm{rg}_{M,N}(A) + \mathrm{rg}_{M,N}(B)$.
- $\mathrm{rg}_{L,N}(AB) \leq \mathrm{rg}_{L,M}(A) + \mathrm{rg}_{M,N}(B)$.
- $\mathrm{rg}_{N,M}(A^{-1}) = \mathrm{rg}_{M,N}(A)$.

Propriétés

- $\Delta_{M,N}(A+B) = \Delta_{M,N}(A) + \Delta_{M,N}(B)$.
- $\nabla_{M,N}(A+B) = \nabla_{M,N}(A) + \nabla_{M,N}(B)$.
- $\Delta_{L,N}(AB) = \Delta_{L,M}(A)B + A\Delta_{M,N}(B)$.
- $\nabla_{L,N}(AB) = \nabla_{L,M}(A)B + LA\Delta_{M,N}(B)$.
- $\Delta_{N,M}(A^{-1}) = -A^{-1}\Delta_{M,N}(A)A^{-1}$.
- $\nabla_{N,M}(A^{-1}) = NA^{-1}\nabla_{M,N}(A)N^{-1}A^{-1}$.

Proposition

- $\mathrm{rg}_{M,N}(A+B) \leq \mathrm{rg}_{M,N}(A) + \mathrm{rg}_{M,N}(B)$.
- $\mathrm{rg}_{L,N}(AB) \leq \mathrm{rg}_{L,M}(A) + \mathrm{rg}_{M,N}(B)$.
- $\mathrm{rg}_{N,M}(A^{-1}) = \mathrm{rg}_{M,N}(A)$.
- Le complément de Schur a le même type de déplacement que A et de rang de déplacement $\leq$ celui de A.

Multiplication rapide

A est structurée

Si la matrice A est de Toeplitz, de Hankel, de Cauchy, ou de Vandermonde. En utilisant l'algorithme *FFT* on peut faire la multiplication matrice-vecteur de taille n en $\mathcal{O}(n \ln^r n)$, avec $r = 1$ ou 2.

Multiplication rapide

A est structurée

Si la matrice A est de Toeplitz, de Hankel, de Cauchy, ou de Vandermonde. En utilisant l'algorithme *FFT* on peut faire la multiplication matrice-vecteur de taille n en $\mathcal{O}(n \ln^r n)$, avec $r = 1$ ou 2.

A	rang de déplacement	cout de multiplication par v
typeToeplitz	α	$\mathcal{O}(\alpha n \ln n)$
typeHankel	α	$\mathcal{O}(\alpha n \ln n)$
typeVandermonde	α	$\mathcal{O}(\alpha n \ln^2 n)$
typeCauchy	α	$\mathcal{O}(\alpha n \ln^2 n)$

Résolution des système linéaires

$$Tv = b$$

Algorithmes standards	$\mathcal{O}(n^3)$
Algorithmes rapides	$\mathcal{O}(n^2)$
Algoritmes super rapides	$\mathcal{O}(n \ln^2 n)$

Résolution des système linéaires

$$Tv = b$$

Algorithmes standards	$\mathcal{O}(n^3)$
Algorithmes rapides	$\mathcal{O}(n^2)$
Algoritmes super rapides	$\mathcal{O}(n \ln^2 n)$

Types des algorithmes rapides

1. Schur $\longrightarrow A = LU$, en $\mathcal{O}(n^2)$.

Résolution des système linéaires

$$Tv = b$$

Algorithmes standards	$\mathcal{O}(n^3)$
Algorithmes rapides	$\mathcal{O}(n^2)$
Algoritmes super rapides	$\mathcal{O}(n \ln^2 n)$

Types des algorithmes rapides

1. Schur $\longrightarrow A = LU$, en $\mathcal{O}(n^2)$.
2. Levinson $\longrightarrow A^{-1} = LU$, en $\mathcal{O}(n^2)$.

Algorithme de Schur

$\Delta_{M,N}(A) = G_1 F_1^T$

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} d_1 & u_1 \\ l_1 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{d_1} l_1 & 1_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & u_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = L_1 U_1$$

avec $A_2 = A_{22} - \frac{1}{d_1} l_1 u_1$ est le complément de Schur de d_1.

Algorithme de Schur

$\Delta_{M,N}(A) = G_1 F_1^T$

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} d_1 & u_1 \\ l_1 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{d_1} l_1 & 1_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & u_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = L_1 U_1$$

avec $A_2 = A_{22} - \frac{1}{d_1} l_1 u_1$ est le complément de Schur de d_1.

1. Algorithme naïf :

   A_1

Algorithme de Schur

$\Delta_{M,N}(A) = G_1 F_1^T$

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} d_1 & u_1 \\ l_1 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{d_1} l_1 & 1_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & u_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = L_1 U_1$$

avec $A_2 = A_{22} - \frac{1}{d_1} l_1 u_1$ est le complément de Schur de d_1.

1. Algorithme naïf :

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 \\ \downarrow & & \\ \{l_1, u_1\} & & \end{array}$$

Algorithme de Schur

$\Delta_{M,N}(A) = G_1 F_1^T$

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} d_1 & u_1 \\ l_1 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{d_1} l_1 & 1_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & u_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = L_1 U_1$$

avec $A_2 = A_{22} - \frac{1}{d_1} l_1 u_1$ est le complément de Schur de d_1.

1. Algorithme naïf :

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & & \\ \{l_1, u_1\} & & \{l_2, u_2\} & & \dots & \end{array}$$

Algorithme de Schur

$\Delta_{M,N}(A) = G_1 F_1^T$

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} d_1 & u_1 \\ l_1 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{d_1} l_1 & 1_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & u_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = L_1 U_1$$

avec $A_2 = A_{22} - \frac{1}{d_1} l_1 u_1$ est le complément de Schur de d_1.

1. Algorithme naïf :

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & A_n \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \{l_1, u_1\} & & \{l_2, u_2\} & & \dots & & \{l_n, u_n\} \end{array}$$

Algorithme de Schur

$\Delta_{M,N}(A) = G_1 F_1^T$

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} d_1 & u_1 \\ l_1 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{d_1} l_1 & 1_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & u_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = L_1 U_1$$

avec $A_2 = A_{22} - \frac{1}{d_1} l_1 u_1$ est le complément de Schur de d_1.

1. Algorithme naïf :

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & A_n \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \{l_1, u_1\} & & \{l_2, u_2\} & & \dots & & \{l_n, u_n\} \end{array}$$

2. Algorihtme de Schur généralisé :
   $\{G_1, F_1\}$

Algorithme de Schur

$$\Delta_{M,N}(A) = G_1 F_1^T$$

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} d_1 & u_1 \\ l_1 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{d_1} l_1 & 1_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & u_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = L_1 U_1$$

avec $A_2 = A_{22} - \frac{1}{d_1} l_1 u_1$ est le complément de Schur de d_1.

1. Algorithme naïf :

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & A_n \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \{l_1, u_1\} & & \{l_2, u_2\} & & \dots & & \{l_n, u_n\} \end{array}$$

2. Algorihtme de Schur généralisé :

$$\begin{array}{ccc} \{G_1, F_1\} & \longrightarrow & \{G_2, F_2\} \\ \downarrow & & \\ \{l_1, u_1\} & & \end{array}$$

Algorithme de Schur

$$\Delta_{M,N}(A) = G_1 F_1^T$$

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} d_1 & u_1 \\ l_1 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{d_1} l_1 & 1_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & u_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = L_1 U_1$$

avec $A_2 = A_{22} - \frac{1}{d_1} l_1 u_1$ est le complément de Schur de d_1.

1. Algorithme naïf :

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & A_n \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \{l_1, u_1\} & & \{l_2, u_2\} & & \dots & & \{l_n, u_n\} \end{array}$$

2. Algorihtme de Schur généralisé :

$$\begin{array}{ccccccc} \{G_1, F_1\} & \longrightarrow & \{G_2, F_2\} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \{l_1, u_1\} & & \{l_2, u_2\} & & \dots & & \end{array}$$

Algorithme de Schur

$\Delta_{M,N}(A) = G_1 F_1^T$

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} d_1 & u_1 \\ l_1 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{d_1} l_1 & 1_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & u_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = L_1 U_1$$

avec $A_2 = A_{22} - \frac{1}{d_1} l_1 u_1$ est le complément de Schur de d_1.

1. Algorithme naïf :

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & A_n \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \{l_1, u_1\} & & \{l_2, u_2\} & & \dots & & \{l_n, u_n\} \end{array}$$

2. Algorihtme de Schur généralisé :

$$\begin{array}{ccccccc} \{G_1, F_1\} & \longrightarrow & \{G_2, F_2\} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \{G_n, F_n\} \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \{l_1, u_1\} & & \{l_2, u_2\} & & \dots & & \{l_n, u_n\} \end{array}$$

Algorithmes super rapides

Algorithmes super rapides

Algorithme 1

Soit M une matrice de taille $n \times n$

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \; A, B, C, D \text{ de taille } \frac{n}{2} \times \frac{n}{2}.$$

Algorithmes super rapides

Algorithme 1

Soit M une matrice de taille $n \times n$

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \; A, B, C, D \text{ de taille } \frac{n}{2} \times \frac{n}{2}.$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BS^{-1} \\ -S^{-1}CA^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}, \; S = D - CA^{-1}B$$

Algorithmes super rapides

Algorithme 1

Soit M une matrice de taille $n \times n$

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \; A, B, C, D \text{ de taille } \frac{n}{2} \times \frac{n}{2}.$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BS^{-1} \\ -S^{-1}CA^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}, \; S = D - CA^{-1}B$$

Procedure Inv(M, n)

- Si $n = 1$, $M^{-1} := 1/M$, sinon :
- décomposer M en blocs de taille $n/2$.
- $A^{-1} := \mathrm{Inv}(A, n/2)$; $S := D - CA^{-1}B$
- $S^{-1} := \mathrm{Inv}(S, n/2)$
- Calculer $A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1}$, $-A^{-1}BS^{-1}$, $-S^{-1}CA^{-1}$

Algorithme 2

Soit $T = \begin{pmatrix} t_0 & \dots & t_{-n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & \dots & t_0 \end{pmatrix}$ une matrice de Toeplitz

Algorithme 2

Soit $T = \begin{pmatrix} t_0 & \dots & t_{-n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & \dots & t_0 \end{pmatrix}$ une matrice de Toeplitz

Système fondamental et fonction génératrice

Définitions

- Pour un vecteur $(a_i)_{i=0,\dots,m}$ on associe le polynôme $a(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ et $\hat{a}(x) = x^m a(x^{-1}) = \sum_{i=0}^{m} a_{n-i} x^i$.

Algorithme 2

Soit $T = \begin{pmatrix} t_0 & \dots & t_{-n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & \dots & t_0 \end{pmatrix}$ une matrice de Toeplitz

Système fondamental et fonction génératrice

Définitions

- Pour un vecteur $(a_i)_{i=0,\dots,m}$ on associe le polynôme $a(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ et $\hat{a}(x) = x^m a(x^{-1}) = \sum_{i=0}^{m} a_{n-i} x^i$.
- Un système fondamental de T est $\{u(x), u'(x)\}$ de degré n ; $T(u_0, \dots, u_{n-1})^T = e_1$ et $T(u'_0, \dots, u'_{n-1})^T = -(0, \dots, t_{-1})^T$, $u_n = 0, u'_n = 1$.

Algorithme 2

Soit $T = \begin{pmatrix} t_0 & \dots & t_{-n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & \dots & t_0 \end{pmatrix}$ une matrice de Toeplitz

Système fondamental et fonction génératrice

Définitions

- Pour un vecteur $(a_i)_{i=0,\dots,m}$ on associe le polynôme $a(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ et $\hat{a}(x) = x^m a(x^{-1}) = \sum_{i=0}^m a_{n-i} x^i$.
- Un système fondamental de T est $\{u(x), u'(x)\}$ de degré n ; $T(u_0, \dots, u_{n-1})^T = e_1$ et $T(u'_0, \dots, u'_{n-1})^T = -(0, \dots, t_{-1})^T$, $u_n = 0, u'_n = 1$.
- La fonction génératrice d'une matrice $M = (m_{i,j})_{i,j=0}^{p,q}$ est le polynôme $M(x, y) = \sum_{i,j=0}^{p,q} m_{i,j} x^i y^j$.

Fonction génératrice de T^{-1}

- **Théorème** $T^{-1}(x,y) = \dfrac{u(x)\hat{u'}(y) - u'(x)\hat{u}(y)}{1-xy}$.
- **Corollaire** $T^{-1} = \frac{1}{2}F_-^{-1}(D_-(u)F_-F_+^{-1}D_+(u') - D_-(u')F_-F_+^{-1}D_+(u))DF_+$.

Fonction génératrice de T^{-1}

- **Théorème** $T^{-1}(x,y) = \dfrac{u(x)\hat{u}'(y) - u'(x)\hat{u}(y)}{1-xy}$.
- **Corollaire** $T^{-1} = \frac{1}{2}F_-^{-1}(D_-(u)F_-F_+^{-1}D_+(u') - D_-(u')F_-F_+^{-1}D_+(u))DF_+$.
- **Définition** On définit $T(x) = \displaystyle\sum_{i=-n+1}^{n-1} t_i x^i$.
- **Proposition** $\{u(x), u'(x)\}$ est système fondamental de T ssi $\exists\ v(x),\ v'(x)$ de degré n avec $v_n = 1, v'_n = 0$, tels que
$$\begin{cases} T(\omega_k)u(\omega_k) + \omega_k^n v(\omega_k) = 0 & k = 0,\dots,2n-1 \\ T(\omega_k)u'(\omega_k) + \omega_k^n v'(\omega_k) = 0 & \omega_k^{2n} = 1 \end{cases}$$

Problème

$$\boxed{Tu = g}$$

$$\text{avec } T = \begin{pmatrix} t_0 & \dots & t_{-n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & \dots & t_0 \end{pmatrix}$$

$$u = (u_0, \dots, u_{n-1}), \; g = (g_0, \dots, g_{n-1})$$

Problème

$$\boxed{Tu = g}$$

$$\text{avec } T = \begin{pmatrix} t_0 & \dots & t_{-n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & \dots & t_0 \end{pmatrix}$$

$u = (u_0, \dots, u_{n-1}),\ g = (g_0, \dots, g_{n-1})$

Définition

$T(x) = \sum_{i=-n+1}^{n-1} t_i x^i, \quad u(x) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i x^i \ \tilde{T}(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} \tilde{t}_i x^i, \quad \tilde{t}_i = \begin{cases} t_i & \text{si} \quad i < n \\ t_{i-2n} & \text{si} \quad i \geq n \end{cases}$

Problème

$$\boxed{Tu = g}$$

$$\text{avec } T = \begin{pmatrix} t_0 & \dots & t_{-n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & \dots & t_0 \end{pmatrix}$$

$u = (u_0, \dots, u_{n-1}),\ g = (g_0, \dots, g_{n-1})$

Définition

$T(x) = \sum_{i=-n+1}^{n-1} t_i x^i, \quad u(x) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i x^i \ \tilde{T}(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} \tilde{t}_i x^i, \quad \tilde{t}_i = \begin{cases} t_i & \text{si} \quad i < n \\ t_{i-2n} & \text{si} \quad i \geq n \end{cases}$

$E = \{1, \dots, x^{n-1}\}$, et Π_E est la projection sur l'espace vectoriel engendré par E.

Théorème

$$Tu = g \Leftrightarrow \Pi_E(T(x)u(x)) = g(x)$$

Théorème

$$Tu = g \Leftrightarrow \Pi_E(T(x)u(x)) = g(x)$$

remarque

- $\Pi_E(T(x)u(x)) = T(x)u(x) - x^{-n}A(x) - x^n B(x)$ avec $\deg A(x) \leq n-1$ et $\deg B(x) \leq n-1$
- $\tilde{T}(\omega_j)u(\omega_j) + \omega_j^n v(\omega_j) - g(\omega_j) = 0$ pour $\omega_j^{2n} = 1$ donc $\exists w(x)$ de degré $\leq n-1$ tel que $\tilde{T}(x)u(x) + x^n v(x) + (x^{2n}-1)w(x) = g(x)$

Théorème

$Tu = g \Leftrightarrow \Pi_E(T(x)u(x)) = g(x)$

remarque

- $\Pi_E(T(x)u(x)) = T(x)u(x) - x^{-n}A(x) - x^nB(x)$ avec $\deg A(x) \leq n-1$ et $\deg B(x) \leq n-1$
- $\tilde{T}(\omega_j)u(\omega_j) + \omega_j^n v(\omega_j) - g(\omega_j) = 0$ pour $\omega_j^{2n} = 1$ donc $\exists w(x)$ de degré $\leq n-1$ tel que $\tilde{T}(x)u(x) + x^nv(x) + (x^{2n}-1)w(x) = g(x)$

Définition

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{K}[x]^3$ et $d \in \mathbb{K}[x]$ on définit

- $\mathcal{L}(a, b, c) = \{(p, q, r) \in \mathbb{K}[x]^3;\ ap + bq + cr = 0\}$
- $\mathcal{L}(a, b, c; d) = \{(p, q, r) \in \mathbb{K}[x]^3;\ ap + bq + cr = d\}$

Proposition

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{K}[x]^3$, le $\mathbb{K}[x]$-module $\mathcal{L}(a, b, c)$ est libre de rang 2.

Proposition

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{K}[x]^3$, le $\mathbb{K}[x]$-module $\mathcal{L}(a, b, c)$ est libre de rang 2.

Définition

Une $\mu-$base de $\mathcal{L}(a, b, c)$ est une base (p, q, r), (p', q', r') de $\mathcal{L}(a, b, c)$ avec $\mu = \deg(p, q, r) \leq \deg(p', q', r')$

Proposition

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{K}[x]^3$, le $\mathbb{K}[x]$-module $\mathcal{L}(a, b, c)$ est libre de rang 2.

Définition

Une $\mu-$base de $\mathcal{L}(a, b, c)$ est une base (p, q, r), (p', q', r') de $\mathcal{L}(a, b, c)$ avec $\mu = \deg(p, q, r) \leq \deg(p', q', r')$

Théorème

$\mathcal{L}(\tilde{T}(x), x^n, x^{2n} - 1)$ admet une $n-$ base avec
$n = \deg(p, q, r) = \deg(p', q', r')$

Proposition

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{K}[x]^3$, le $\mathbb{K}[x]$-module $\mathcal{L}(a, b, c)$ est libre de rang 2.

Définition

Une $\mu-$base de $\mathcal{L}(a, b, c)$ est une base (p, q, r), (p', q', r') de $\mathcal{L}(a, b, c)$ avec $\mu = \deg(p, q, r) \leq \deg(p', q', r')$

Théorème

$\mathcal{L}(\tilde{T}(x), x^n, x^{2n} - 1)$ admet une $n-$ base avec $n = \deg(p, q, r) = \deg(p', q', r')$

Proposition

$\mathcal{L}(\tilde{T}(x), x^n, x^{2n} - 1) \cap \mathbb{K}[x]_{n-1} = (0, 0, 0)$.

Théorème

u solution de $Tu = g \Leftrightarrow \exists\, v(x), w(x) \in \mathbb{K}[x]_{n-1}$ tel que

$$(u(x), v(x), w(x)) \in \mathcal{L}(\tilde{T}(x), x^n, x^{2n} - 1; g(x)) \cap \mathbb{K}[x]_{n-1}$$

Théorème

u solution de $Tu = g \Leftrightarrow \exists\, v(x), w(x) \in \mathbb{K}[x]_{n-1}$ tel que

$$(u(x), v(x), w(x)) \in \mathcal{L}(\tilde{T}(x), x^n, x^{2n} - 1; g(x)) \cap \mathbb{K}[x]_{n-1}$$

Lemme

$\mathcal{L}(\tilde{T}(x), x^n, x^{2n} - 1; g(x)) \cap \mathbb{K}[x]_{n-1}$ contient un seul élément.

Théorème

u solution de $Tu = g \Leftrightarrow \exists\, v(x), w(x) \in \mathbb{K}[x]_{n-1}$ tel que

$$(u(x), v(x), w(x)) \in \mathcal{L}(\tilde{T}(x), x^n, x^{2n} - 1; g(x)) \cap \mathbb{K}[x]_{n-1}$$

Lemme

$\mathcal{L}(\tilde{T}(x), x^n, x^{2n} - 1; g(x)) \cap \mathbb{K}[x]_{n-1}$ contient un seul élément.

Proposition

Le reste de division de $\begin{pmatrix} 0 \\ x^n g(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \\ r & r' \end{pmatrix}$ est le vecteur solution donné par le théorème précédent

Proposition

Un système fondamental de T donne une $n-$base de $\mathcal{L}(\tilde{T}(x), x^n, x^{2n}-1)$

$$T = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc}
t_{0,0} & \cdots & t_{-m+1,0} & & t_{0,-n+1} & \cdots & t_{-m+1,-n+1} \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
t_{m-1,0} & \cdots & t_{0,0} & & t_{m-1,-n+1} & \cdots & t_{0,-n+1} \\
\hline
 & & & & & & \\
\hline
t_{0,n-1} & \cdots & t_{-m+1,n-1} & & t_{0,0} & \cdots & t_{-m+1,0} \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
t_{m-1,n-1} & \cdots & t_{0,n-1} & & t_{m-1,0} & \cdots & t_{0,0}
\end{array}\right)$$

$$= (t_{\alpha-\beta})_{\alpha\in E,\beta\in E};\ E = \{(i,j);\ 0 \le i \le m-1,\ 0 \le j \le n-1\}$$

Multiplication rapide

Si v est un vecteur de taille $m.n$, $T.v$ peut se faire en $\mathcal{O}(mn \ln mn)$.

Multiplication rapide

Si v est un vecteur de taille $m.n$, $T.v$ peut se faire en $\mathcal{O}(mn \ln mn)$.

Remarques importants : Généralisation du cas scalaire

Soient T_1, T_2 2 matrices TBT de même taille.

1.
   - T_1^{-1} est structurées par blocs.
   - $T_1 T_2$ sont structurées par blocs
   - Le complement de Schur S d'une sous matrice (des blocs) est stucturé par blocs.

Multiplication rapide

Si v est un vecteur de taille $m.n$, $T.v$ peut se faire en $\mathcal{O}(mn \ln mn)$.

Remarques importants : Généralisation du cas scalaire

Soient T_1, T_2 2 matrices TBT de même taille.

1.
    - T_1^{-1} est structurées par blocs.
    - $T_1 T_2$ sont structurées par blocs
    - Le complement de Schur S d'une sous matrice (des blocs) est stucturé par blocs.
2. Ni T_1^{-1}, ni $T_1 T_2$, ni S n'ont les blocs structurés.

Problème

$$\boxed{Tu = g}$$

$$T = (t_{\alpha-\beta})_{\alpha,\beta\in E} \in \mathbb{K}^{mn\times mn},\ g = (g_\alpha)_{\alpha\in E} \text{ et } u = (u_\alpha)_{\alpha\in E}$$

Problème

$$\boxed{Tu = g}$$

$$T = (t_{\alpha-\beta})_{\alpha,\beta\in E} \in \mathbb{K}^{mn\times mn},\ g = (g_\alpha)_{\alpha\in E} \text{ et } u = (u_\alpha)_{\alpha\in E}$$

Définition

$T(x,y) = \sum_{(i,j)\in E-E} t_{i,j}x^iy^j$, $u(x,y) = \sum_{(i,j)\in E} u_{i,j}x^iy^j$
$\tilde{T}(x,y) = \sum_{(i,j)\in F} \tilde{t}_{i,j}x^iy^j$, avec

$$\tilde{t}_{i,j} = \begin{cases} t_{i,j} & \text{si } i < m, j < n \\ t_{i-2m,j} & \text{si } i \geq m, j < n \\ t_{i,j-2n} & \text{si } i < m, j \geq n \\ t_{i-2m,j-2n} & \text{si } i \geq m, j \geq n \end{cases}$$

Théorème

$$Tu = g \Leftrightarrow \Pi_E(T(x,y)u(x,y)) = g(x,y)$$

Théorème

$$Tu = g \Leftrightarrow \Pi_E(T(x,y)u(x,y)) = g(x,y)$$

Proposition

u solution de $Tu = g \Leftrightarrow \exists h_1, \ldots, h_8 \in \mathbb{K}[x,y]_{\substack{m-1\\n-1}}$;
$(u(x,y), h_1(x,y), \ldots, h_8(x,y)) \in \mathcal{L}(\tilde{T}(x,y), x^m, x^{2m}-1, y^n,$
$(x^{2m}-1)y^n, y^{2n}-1, x^m(y^{2n}-1), (x^{2m}-1)(y^{2n}-1); g(x,y))$

Théorème

$$Tu = g \Leftrightarrow \Pi_E(T(x,y)u(x,y)) = g(x,y)$$

Proposition

u solution de $Tu = g \Leftrightarrow \exists h_1, \dots, h_8 \in \mathbb{K}[x,y]_{\substack{m-1 \\ n-1}}$;
$(u(x,y), h_1(x,y), \dots, h_8(x,y)) \in \mathcal{L}(\tilde{T}(x,y), x^m, x^{2m}-1, y^n, (x^{2m}-1)y^n, y^{2n}-1, x^m(y^{2n}-1), (x^{2m}-1)(y^{2n}-1); g(x,y))$

Théorème

$(a_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{K}[x,y]^n$. le $\mathbb{K}[x,y]-$module $\mathcal{L}(a_1, \dots, a_n)$ est libre de rang $n-1$.

Théorème

$Tu = g \Leftrightarrow \Pi_E(T(x,y)u(x,y)) = g(x,y)$

Proposition

u solution de $Tu = g \Leftrightarrow \exists h_1, \ldots, h_8 \in \mathbb{K}[x,y]_{\substack{m-1 \\ n-1}}$;
$(u(x,y), h_1(x,y), \ldots, h_8(x,y)) \in \mathcal{L}(\tilde{T}(x,y), x^m, x^{2m}-1, y^n, (x^{2m}-1)y^n, y^{2n}-1, x^m(y^{2n}-1), (x^{2m}-1)(y^{2n}-1); g(x,y))$

Théorème

$(a_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{K}[x,y]^n$. le $\mathbb{K}[x,y]-$module $\mathcal{L}(a_1,\ldots,a_n)$ est libre de rang $n-1$.

Proposition

$\mathcal{L}(\mathbf{T}) \cap \mathbb{K}[x,y]_{\substack{m-1 \\ n-1}} = (0,\ldots,0)$.

Définition

Un système fondamenal de T est $\{u_1(x,y), u_2(x,y), u_3(x,y)\} \in \mathbb{K}[x,y]^{9}_{\substack{m-1\\n-1}}$;

$$\mathbf{T}.u_1 = \tilde{T}(x,y)x^m,\ \mathbf{T}.u_2 = \tilde{T}(x,y)y^n,\ \mathbf{T}.u_3 = 1$$

Définition

Un système fondamenal de T est
$\{u_1(x,y), u_2(x,y), u_3(x,y)\} \in \mathbb{K}[x,y]^9_{\substack{m-1\\n-1}}$;
$\mathbf{T}.u_1 = \tilde{T}(x,y)x^m,\ \mathbf{T}.u_2 = \tilde{T}(x,y)y^n,\ \mathbf{T}.u_3 = 1$

Définition

$\sigma_1, \ldots, \sigma_9$ est la base canonique de $\mathbb{K}[x,y]^9$

Définition

Un système fondamenal de T est $\{u_1(x,y), u_2(x,y), u_3(x,y)\} \in \mathbb{K}[x,y]^{9}_{\substack{m-1\\n-1}}$;

$\mathbf{T}.u_1 = \tilde{T}(x,y)x^m,\ \mathbf{T}.u_2 = \tilde{T}(x,y)y^n,\ \mathbf{T}.u_3 = 1$

Définition

$\sigma_1, \ldots, \sigma_9$ est la base canonique de $\mathbb{K}[x,y]^9$

Proposition

Les relations :

$$\begin{cases} \rho_1 = x^m\sigma_1 - u_1 & \rho_5 = y^n\sigma_2 - \sigma_5 \\ \rho_2 = y^n\sigma_1 - u_2 & \rho_6 = x^m\sigma_4 - \sigma_5 \\ \rho_3 = x^m\sigma_2 - \sigma_3 - u_3 & \rho_7 = x^m\sigma_5 - \sigma_6 + \sigma_4 \\ \rho_4 = y^n\sigma_4 - \sigma_7 - u_3 & \rho_8 = y^n\sigma_5 - \sigma_8 + \sigma_2 \end{cases}$$

forment une base de $\mathcal{L}(\mathbf{T})$

Remarque&Définition

On s'intéresse au calcul des coefficients de $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ de ρ_1, ρ_2, ρ_3.