In this Maple sheet, we compute the Lax matrices using the asymptotics of the wave functions and the local diagonalization for the Painlevé 2 equation.

We first use the expression of the coefficients of the spectral curve in terms of the irregular times and monodromies.

```
> restart:
CoherenceEquation1:=tinfty10+tinfty20;
tinfty20:=-tinfty10:
Pinfty42 := tinfty13*tinfty23;
Pinfty32 := tinfty12*tinfty23+tinfty13*tinfty22;
Pinfty22 := tinfty12*tinfty22+tinfty13*tinfty21+tinfty11*
tinfty23;
Pinfty12 := tinfty20*tinfty13+tinfty12*tinfty21+tinfty10*
tinfty23+tinfty11*tinfty22;
Pinfty01 := -tinfty11-tinfty21;
Pinfty11 := -tinfty12-tinfty22;
Pinfty21 := -tinfty13-tinfty23;
P1:=x-> Pinfty01+Pinfty11*x+Pinfty21*x^2:
P2:=x-> Pinfty02+Pinfty12*x+Pinfty22*x^2+Pinfty32*x^3+Pinfty42*
x^4:
```

$$CoherenceEquation1 := tinfty10 + tinfty20 \tag{1}$$
$$Pinfty42 := tinfty13\, tinfty23$$
$$Pinfty32 := tinfty12\, tinfty23 + tinfty13\, tinfty22$$
$$Pinfty22 := tinfty11\, tinfty23 + tinfty12\, tinfty22 + tinfty13\, tinfty21$$
$$Pinfty12 := -tinfty10\, tinfty13 + tinfty10\, tinfty23 + tinfty11\, tinfty22 + tinfty12\, tinfty21$$
$$Pinfty01 := -tinfty11 - tinfty21$$
$$Pinfty11 := -tinfty12 - tinfty22$$
$$Pinfty21 := -tinfty13 - tinfty23$$

Study of the asymptotics at infinity

```
> logPsi1Infty:=-tinfty13/3/h*lambda^3-tinfty12/2/h*lambda^2-
tinfty11/h*lambda-tinfty10/h*ln(lambda)+A10-A12/(2-1)/lambda^(2
-1)-A13/(3-1)/lambda^(3-1)-A14/(4-1)/lambda^(4-1)-A15/(5-1)
/lambda^(5-1)-A16/(6-1)/lambda^(6-1)-A17/(7-1)/lambda^(7-1)   ;
logPsi2Infty:=-tinfty23/3/h*lambda^3-tinfty22/2/h*lambda^2-
tinfty21/h*lambda-tinfty20/h*ln(lambda)-1*ln(lambda)+A20-A22/(2
-1)/lambda^(2-1)-A23/(3-1)/lambda^(3-1)-A24/(4-1)/lambda^(4-1)-
A25/(5-1)/lambda^(5-1)-A26/(6-1)/lambda^(6-1)-A27/(7-1)/lambda^(7
-1)   ;
Llogpsi1Infty:=-Ltinfty13/3/h*lambda^3-Ltinfty12/2/h*lambda^2-
Ltinfty11/h*lambda-Ltinfty10/h*ln(lambda)+LA10-LA12/(2-1)/lambda^
(2-1)-LA13/(3-1)/lambda^(3-1)-LA14/(4-1)/lambda^(4-1)-LA15/(5-1)
/lambda^(5-1)-LA16/(6-1)/lambda^(6-1)-LA17/(7-1)/lambda^(7-1)   ;
Llogpsi2Infty:=-Ltinfty23/3/h*lambda^3-Ltinfty22/2/h*lambda^2-
```

```
Ltinfty21/h*lambda-Ltinfty20/h*ln(lambda)+LA20-LA22/(2-1)/lambda^
(2-1)-LA23/(3-1)/lambda^(3-1)-LA24/(4-1)/lambda^(4-1)-LA25/(5-1)
/lambda^(5-1)-LA26/(6-1)/lambda^(6-1)-LA27/(7-1)/lambda^(7-1)  ;
Lpsi1Infty := exp(1/h*(-tinfty13/3*lambda^3-tinfty12/2*lambda^2-
tinfty11*lambda-tinfty10*ln(lambda)+h*A10-h*A12/lambda-1/2*h*
A13/lambda^2-1/3*h*A14/lambda^3-1/4*h*A15/lambda^4-1/5*h*
A16/lambda^5-1/6*h*A17/lambda^6))*1/h*(-Ltinfty13/3*lambda^3-
Ltinfty12/2*lambda^2-Ltinfty11*lambda-Ltinfty10*ln(lambda)+h*LA10
-h*LA12/lambda-1/2*h*LA13/lambda^2-1/3*h*LA14/lambda^3-1/4*h*
LA15/lambda^4-1/5*h*LA16/lambda^5-1/6*h*LA17/lambda^6);
Lpsi2Infty := exp(1/h*(-tinfty23/3*lambda^3-tinfty22/2*lambda^2-
tinfty21*lambda-tinfty20*ln(lambda)-h*ln(lambda)+h*A20-h*
A22/lambda-1/2*h*A23/lambda^2-1/3*h*A24/lambda^3-1/4*h*
A25/lambda^4-1/5*h*A26/lambda^5-1/6*h*A27/lambda^6))*1/h*(-
Ltinfty23/3*lambda^3-Ltinfty22/2*lambda^2-Ltinfty21*lambda-
Ltinfty20*ln(lambda)+h*LA20-h*LA22/lambda-1/2*h*LA23/lambda^2
-1/3*h*LA24/lambda^3-1/4*h*LA25/lambda^4-1/5*h*LA26/lambda^5-1/6*
h*LA27/lambda^6);
psi1Infty:=exp(logPsi1Infty);
psi2Infty:=exp(logPsi2Infty);
dpsi1dlambdaInfty:=diff(psi1Infty,lambda):
dpsi2dlambdaInfty:=diff(psi2Infty,lambda):
d2psi1dlambda2Infty:=diff(psi1Infty,lambda$2):
d2psi2dlambda2Infty:=diff(psi2Infty,lambda$2):


WronskianLambdaInfty:=h*factor(psi1Infty*dpsi2dlambdaInfty-
psi2Infty*dpsi1dlambdaInfty):
WronskianLambdabisInfty:=h*simplify(factor( (diff(logPsi2Infty,
lambda)-diff(logPsi1Infty,lambda))*exp(logPsi1Infty+logPsi2Infty)
)):

WronskianTildeLambdaInfty:=h^3*factor(dpsi2dlambdaInfty*
d2psi1dlambda2Infty-dpsi1dlambdaInfty*d2psi2dlambda2Infty):
```

$$logPsi1Infty := -\frac{1}{3}\frac{tinfty13\,\lambda^3}{h} - \frac{1}{2}\frac{tinfty12\,\lambda^2}{h} - \frac{tinfty11\,\lambda}{h} - \frac{tinfty10\ln(\lambda)}{h} + A10 - \frac{A12}{\lambda} - \frac{1}{2}\frac{A13}{\lambda^2} - \frac{1}{3}\frac{A14}{\lambda^3} - \frac{1}{4}\frac{A15}{\lambda^4} - \frac{1}{5}\frac{A16}{\lambda^5} - \frac{1}{6}\frac{A17}{\lambda^6} \quad \textbf{(2)}$$

$$logPsi2Infty := -\frac{1}{3}\frac{tinfty23\,\lambda^3}{h} - \frac{1}{2}\frac{tinfty22\,\lambda^2}{h} - \frac{tinfty21\,\lambda}{h} + \frac{tinfty10\ln(\lambda)}{h} - \ln(\lambda)$$

$$+A20-\frac{A22}{\lambda}-\frac{1}{2}\frac{A23}{\lambda^2}-\frac{1}{3}\frac{A24}{\lambda^3}-\frac{1}{4}\frac{A25}{\lambda^4}-\frac{1}{5}\frac{A26}{\lambda^5}-\frac{1}{6}\frac{A27}{\lambda^6}$$

$$Llogpsi1Infty := -\frac{1}{3}\frac{Ltinfty13\,\lambda^3}{h}-\frac{1}{2}\frac{Ltinfty12\,\lambda^2}{h}-\frac{Ltinfty11\,\lambda}{h}-\frac{Ltinfty10\ln(\lambda)}{h}+LA10-\frac{LA12}{\lambda}-\frac{1}{2}\frac{LA13}{\lambda^2}-\frac{1}{3}\frac{LA14}{\lambda^3}-\frac{1}{4}\frac{LA15}{\lambda^4}-\frac{1}{5}\frac{LA16}{\lambda^5}-\frac{1}{6}\frac{LA17}{\lambda^6}$$

$$Llogpsi2Infty := -\frac{1}{3}\frac{Ltinfty23\,\lambda^3}{h}-\frac{1}{2}\frac{Ltinfty22\,\lambda^2}{h}-\frac{Ltinfty21\,\lambda}{h}-\frac{Ltinfty20\ln(\lambda)}{h}+LA20-\frac{LA22}{\lambda}-\frac{1}{2}\frac{LA23}{\lambda^2}-\frac{1}{3}\frac{LA24}{\lambda^3}-\frac{1}{4}\frac{LA25}{\lambda^4}-\frac{1}{5}\frac{LA26}{\lambda^5}-\frac{1}{6}\frac{LA27}{\lambda^6}$$

$$Lpsi1Infty := 1\Bigg/\left(h\,e^{\frac{1}{h}\left(-\frac{1}{3}tinfty13\,\lambda^3-\frac{1}{2}tinfty12\,\lambda^2-tinfty11\,\lambda-tinfty10\ln(\lambda)+h\,A10-\frac{h\,A12}{\lambda}-\frac{1}{2}\frac{h\,A13}{\lambda^2}-\frac{1}{3}\frac{h\,A14}{\lambda^3}-\frac{1}{4}\frac{h\,A15}{\lambda^4}-\frac{1}{5}\frac{h\,A16}{\lambda^5}-\frac{1}{6}\frac{h\,A17}{\lambda^6}\right)}\left(-\frac{1}{3}Ltinfty13\,\lambda^3-\frac{1}{2}Ltinfty12\,\lambda^2-Ltinfty11\,\lambda-Ltinfty10\ln(\lambda)+h\,LA10-\frac{h\,LA12}{\lambda}-\frac{1}{2}\frac{h\,LA13}{\lambda^2}-\frac{1}{3}\frac{h\,LA14}{\lambda^3}-\frac{1}{4}\frac{h\,LA15}{\lambda^4}-\frac{1}{5}\frac{h\,LA16}{\lambda^5}-\frac{1}{6}\frac{h\,LA17}{\lambda^6}\right)\right)$$

$$Lpsi2Infty := 1\Bigg/\left(h\,e^{\frac{1}{h}\left(-\frac{1}{3}tinfty23\,\lambda^3-\frac{1}{2}tinfty22\,\lambda^2-tinfty21\,\lambda+tinfty10\ln(\lambda)-h\ln(\lambda)+h\,A20-\frac{h\,A22}{\lambda}-\frac{1}{2}\frac{h\,A23}{\lambda^2}-\frac{1}{3}\frac{h\,A24}{\lambda^3}-\frac{1}{4}\frac{h\,A25}{\lambda^4}-\frac{1}{5}\frac{h\,A26}{\lambda^5}-\frac{1}{6}\frac{h\,A27}{\lambda^6}\right)}\left(-\frac{1}{3}Ltinfty23\,\lambda^3-\frac{1}{2}Ltinfty22\,\lambda^2-Ltinfty21\,\lambda-Ltinfty20\ln(\lambda)+h\,LA20-\frac{h\,LA22}{\lambda}-\frac{1}{2}\frac{h\,LA23}{\lambda^2}-\frac{1}{3}\frac{h\,LA24}{\lambda^3}-\frac{1}{4}\frac{h\,LA25}{\lambda^4}-\frac{1}{5}\frac{h\,LA26}{\lambda^5}-\frac{1}{6}\frac{h\,LA27}{\lambda^6}\right)\right)$$

$$psi1Infty := e^{-\frac{1}{3}\frac{tinfty13\,\lambda^3}{h}-\frac{1}{2}\frac{tinfty12\,\lambda^2}{h}-\frac{tinfty11\,\lambda}{h}-\frac{tinfty10\ln(\lambda)}{h}+A10-\frac{A12}{\lambda}-\frac{1}{2}\frac{A13}{\lambda^2}-\frac{1}{3}\frac{A14}{\lambda^3}-\frac{1}{4}\frac{A15}{\lambda^4}-\frac{1}{5}\frac{A16}{\lambda^5}-\frac{1}{6}\frac{A17}{\lambda^6}}$$

$$psi2Infty := e^{-\frac{1}{3}\frac{tinfty23\,\lambda^3}{h}-\frac{1}{2}\frac{tinfty22\,\lambda^2}{h}-\frac{tinfty21\,\lambda}{h}+\frac{tinfty10\ln(\lambda)}{h}-\ln(\lambda)+A20-\frac{A22}{\lambda}-\frac{1}{2}\frac{A23}{\lambda^2}}$$

$$-\frac{1}{3}\frac{A24}{\lambda^3}-\frac{1}{4}\frac{A25}{\lambda^4}-\frac{1}{5}\frac{A26}{\lambda^5}-\frac{1}{6}\frac{A27}{\lambda^6}$$

Expression of the Lax matrix L

Shape of L_{2,1} at infinity.

```
> L21Infty:=factor(simplify
  (WronskianTildeLambdaInfty/WronskianLambdabisInfty)):
  L21InftyOrderlambda5:=factor(-residue(L21Infty/lambda^6,lambda=
  infinity));
  L21InftyOrderlambda4:=factor(-residue(L21Infty/lambda^5,lambda=
  infinity));
  L21InftyOrderlambda3:=factor(-residue(L21Infty/lambda^4,lambda=
  infinity));
  L21InftyOrderlambda2:=factor(-residue(L21Infty/lambda^3,lambda=
  infinity));
  L21InftyOrderlambda1:=factor(-residue(L21Infty/lambda^2,lambda=
  infinity));
  L21InftyOrderlambda0:=factor(-residue(L21Infty/lambda^1,lambda=
  infinity));
```

$$L21InftyOrderlambda5 := 0 \tag{1.1}$$
$$L21InftyOrderlambda4 := -tinfty13\ tinfty23$$
$$L21InftyOrderlambda3 := -tinfty12\ tinfty23 - tinfty13\ tinfty22$$
$$L21InftyOrderlambda2 := -tinfty11\ tinfty23 - tinfty12\ tinfty22 - tinfty13\ tinfty21$$
$$L21InftyOrderlambda1 := -h\ tinfty13 + tinfty10\ tinfty13 - tinfty10\ tinfty23 - tinfty11\ tinfty22 - tinfty12\ tinfty21$$
$$L21InftyOrderlambda0 := \frac{1}{-tinfty23 + tinfty13}\big(A12\ h\ tinfty13\ tinfty23 - A12\ h\ tinfty23^2 + A22\ h\ tinfty13^2 - A22\ h\ tinfty13\ tinfty23 - h\ tinfty12\ tinfty13 + h\ tinfty13\ tinfty22 + tinfty10\ tinfty12\ tinfty13 - tinfty10\ tinfty12\ tinfty23 - tinfty10\ tinfty13\ tinfty22 + tinfty10\ tinfty22\ tinfty23 - tinfty11\ tinfty13\ tinfty21 + tinfty11\ tinfty21\ tinfty23\big)$$

We conclude that L_{2,1} behaves at infinity like
-tinfty13*tinfty23*lambda^4-(tinfty22*tinfty13+tinfty23*tinfty12)*lambda^3-(tinfty21*tinfty13+tinfty23*tinfty11+tinfty22*tinfty12)*lambda^2-(tinfty13*tinfty20+tinfty21*tinfty12+tinfty23*tinfty10+tinfty22*tinfty11+tinfty13*h)*lambda +O(1)
In other words:
L_{2,1}= -P_2(lambda)+Pinfty02+C -h*lambda*tinfty13+ O(1)

```
> factor(simplify(L21InftyOrderlambda4*lambda^4+
  L21InftyOrderlambda3*lambda^3+L21InftyOrderlambda2*lambda^2+
  L21InftyOrderlambda1*lambda- (-P2(lambda)+Pinfty02-h*lambda*
  tinfty13)));
```

$$0 \tag{1.2}$$

Shape of L_{2,2} at infinity.

```
> L22Infty:=factor(h*simplify(diff(WronskianLambdabisInfty,
  lambda)/WronskianLambdabisInfty)):
```

```
L22InftyOrderlambda5:=factor(-residue(L22Infty/lambda^6,lambda=
infinity));
L22InftyOrderlambda4:=factor(-residue(L22Infty/lambda^5,lambda=
infinity));
L22InftyOrderlambda3:=factor(-residue(L22Infty/lambda^4,lambda=
infinity));
L22InftyOrderlambda2:=factor(-residue(L22Infty/lambda^3,lambda=
infinity));
L22InftyOrderlambda1:=factor(-residue(L22Infty/lambda^2,lambda=
infinity));
L22InftyOrderlambda0:=factor(-residue(L22Infty/lambda^1,lambda=
infinity));
L22InftyOrderlambdaMinus1:=factor(-residue(L22Infty/lambda^0,
lambda=infinity));
L22InftyOrderlambdaMinus2:=factor(-residue(L22Infty/lambda^
(-1),lambda=infinity));
```

$$L22InftyOrderlambda5 := 0 \qquad (1.3)$$
$$L22InftyOrderlambda4 := 0$$
$$L22InftyOrderlambda3 := 0$$
$$L22InftyOrderlambda2 := -tinfty13 - tinfty23$$
$$L22InftyOrderlambda1 := -tinfty12 - tinfty22$$
$$L22InftyOrderlambda0 := -tinfty11 - tinfty21$$
$$L22InftyOrderlambdaMinus1 := h$$
$$L22InftyOrderlambdaMinus2 := \frac{1}{-tinfty23 + tinfty13}\left(h\left(A12\ tinfty13 - A12\ tinfty23 + A22\ tinfty13 - A22\ tinfty23 - tinfty12 + tinfty22\right)\right)$$

We deduce that L_{2,2} behaves at infinity like -(tinfty13+tinfty23)*lambda^2 -(tinfty12+tinfty22)*lambda +h/lambda +O(1/lambda^2) =P1(lambda) +h/lambda+O(1/lambda^2)

Conclusion: Using the additional apparent singularities and the definition of the Darboux coordinates, we conclude that L_{2,2}= P_1(lambda) +h/(lambda-q), L_{2,1}= -P_2(lambda)+Pinfty02+C -h*lambda*tinfty13 -p*h/(lambda-q)

```
> L21Form:=-P2(lambda)+Pinfty02 -h*lambda*tinfty13- p*h/(lambda-
q);
L22Form:=P1(lambda)  +h/(lambda-q);
```

$$L21Form := -\left(-tinfty10\ tinfty13 + tinfty10\ tinfty23 + tinfty11\ tinfty22 + tinfty12\ tinfty21\right)\lambda - \left(tinfty11\ tinfty23 + tinfty12\ tinfty22 + tinfty13\ tinfty21\right)\lambda^2 - \left(tinfty12\ tinfty23 + tinfty13\ tinfty22\right)\lambda^3 - tinfty13\ tinfty23\ \lambda^4 - h\ \lambda\ tinfty13 - \frac{p\ h}{\lambda - q} \qquad (1.4)$$

$$L22Form := -tinfty11 - tinfty21 + \left(-tinfty12 - tinfty22\right)\lambda + \left(-tinfty13 - tinfty23\right)\lambda^2 + \frac{h}{\lambda - q}$$

Auxiliary matrix A

We define the operator \mathcal{L}=\hbar (alpha13\partial_{t_{\infty^{(1)},3} +alpha23\partial_{t_{\infty^{(2)},3}+alpha12\partial_{t_{\infty^{(1)},2} +alpha22\partial_{t_{\infty^{(2)},2}+alpha11\partial_{t_{\infty^{(1)},1} +alpha21\partial_{t_{\infty^{(2)},1}))

```
> WronskianLInfty:=factor(psi1Infty*Lpsi2Infty-psi2Infty*
  Lpsi1Infty):
  A12Infty:=factor(simplify(WronskianLInfty/WronskianLambdaInfty)
  ):
```

We test the alternative formulas for A_{1,2} and A_{1,1}

```
> Y1Infty:=h*factor(dpsi1dlambdaInfty/psi1Infty):
  Y2Infty:=h*factor(dpsi2dlambdaInfty/psi2Infty):
  Z1Infty:=factor(Lpsi1Infty/psi1Infty):
  Z2Infty:=factor(Lpsi2Infty/psi2Infty):
  A12bisInfty:=factor(simplify((Z2Infty-Z1Infty)/(Y2Infty-
  Y1Infty))):
  A11Infty:=factor(simplify( (Y2Infty*Z1Infty-Y1Infty*Z2Infty)/
  (Y2Infty-Y1Infty) )):
  factor(simplify(A12bisInfty-A12Infty));
```

$$0 \tag{2.1}$$

We define the coefficients of the operator \mathcal{L}.

```
> Ltinfty13:=h*alpha13:
  Ltinfty23:=h*alpha23:
  Ltinfty12:=h*alpha12:
  Ltinfty22:=h*alpha22:
  Ltinfty11:=h*alpha11:
  Ltinfty21:=h*alpha21:
  Ltinfty10:=0:
  Ltinfty20:=0:
```

Asymptotic of A_{1,2} at infinity.

```
> A12InftyLambda3:=factor(-residue(A12Infty/lambda^4,lambda=
  infinity));
  A12InftyLambda2:=factor(-residue(A12Infty/lambda^3,lambda=
  infinity));
  A12InftyLambda1:=factor(-residue(A12Infty/lambda^2,lambda=
  infinity));
  A12InftyLambda0:=factor(-residue(A12Infty/lambda^1,lambda=
```

```
infinity));
A12InftyLambdaMoins1:=factor(-residue(A12Infty/lambda^0,lambda=
infinity));
A12InftyLambdaMoins2:=factor(-residue(A12Infty/lambda^(-1),
lambda=infinity)):
```

$$A12InftyLambda3 := 0 \quad (2.2)$$
$$A12InftyLambda2 := 0$$
$$A12InftyLambda1 := \frac{1}{3}\frac{\alpha 13-\alpha 23}{-tinfty23+tinfty13}$$
$$A12InftyLambda0 := \frac{1}{6}\frac{1}{(-tinfty23+tinfty13)^2}(3\ \alpha 12\ tinfty13-3\ \alpha 12\ tinfty23 -2\ \alpha 13\ tinfty12+2\ \alpha 13\ tinfty22-3\ \alpha 22\ tinfty13+3\ \alpha 22\ tinfty23+2\ \alpha 23\ tinfty12 -2\ \alpha 23\ tinfty22)$$
$$A12InftyLambdaMoins1 := \frac{1}{6}\frac{1}{(-tinfty23+tinfty13)^3}(6\ \alpha 11\ tinfty13^2 -12\ \alpha 11\ tinfty13\ tinfty23+6\ \alpha 11\ tinfty23^2-3\ \alpha 12\ tinfty12\ tinfty13 +3\ \alpha 12\ tinfty12\ tinfty23+3\ \alpha 12\ tinfty13\ tinfty22-3\ \alpha 12\ tinfty22\ tinfty23 -2\ \alpha 13\ tinfty11\ tinfty13+2\ \alpha 13\ tinfty11\ tinfty23+2\ \alpha 13\ tinfty12^2 -4\ \alpha 13\ tinfty12\ tinfty22+2\ \alpha 13\ tinfty13\ tinfty21-2\ \alpha 13\ tinfty21\ tinfty23 +2\ \alpha 13\ tinfty22^2-6\ \alpha 21\ tinfty13^2+12\ \alpha 21\ tinfty13\ tinfty23-6\ \alpha 21\ tinfty23^2 +3\ \alpha 22\ tinfty12\ tinfty13-3\ \alpha 22\ tinfty12\ tinfty23-3\ \alpha 22\ tinfty13\ tinfty22 +3\ \alpha 22\ tinfty22\ tinfty23+2\ \alpha 23\ tinfty11\ tinfty13-2\ \alpha 23\ tinfty11\ tinfty23 -2\ \alpha 23\ tinfty12^2+4\ \alpha 23\ tinfty12\ tinfty22-2\ \alpha 23\ tinfty13\ tinfty21 +2\ \alpha 23\ tinfty21\ tinfty23-2\ \alpha 23\ tinfty22^2)$$

We thus deduce that **A_{1,2}=(alpha13-alpha23)/3/(tinfty13-tinfty23)*lambda+nu+mu/(lambda-q). Expressions of (mu,nu) are obtained below.**

```
> A12Form:=(alpha13-alpha23)/3/(-tinfty23+tinfty13)*lambda+nu+
  mu/(lambda-q);
  simplify(-residue(A12Form/lambda^2,lambda=infinity)-
  A12InftyLambda1);
  solve({factor(-residue(A12Form/lambda,lambda=infinity))=
  A12InftyLambda0,factor(-residue(A12Form,lambda=infinity))=
  factor(A12InftyLambdaMoins1)},{mu,nu});

  mu := -1/6*(-2*alpha23*tinfty21*tinfty23+3*alpha22*tinfty13*
  tinfty22+3*alpha22*tinfty23*tinfty12-3*alpha22*tinfty23*
  tinfty22-12*alpha21*tinfty13*tinfty23+12*alpha11*tinfty13*
  tinfty23+2*alpha13*tinfty11*tinfty13-2*alpha13*tinfty11*
  tinfty23-2*alpha13*tinfty21*tinfty13+2*alpha13*tinfty21*
  tinfty23-2*alpha23*tinfty11*tinfty13+2*alpha23*tinfty11*
  tinfty23+2*alpha23*tinfty21*tinfty13+4*alpha13*tinfty22*
```

```
tinfty12-4*alpha23*tinfty22*tinfty12+3*alpha12*tinfty13*
tinfty12-3*alpha12*tinfty13*tinfty22-3*alpha12*tinfty23*
tinfty12+3*alpha12*tinfty23*tinfty22-3*alpha22*tinfty13*
tinfty12-6*alpha11*tinfty23^2-2*alpha13*tinfty12^2-2*alpha13*
tinfty22^2+2*alpha23*tinfty12^2+2*alpha23*tinfty22^2+6*alpha21*
tinfty13^2+6*alpha21*tinfty23^2-6*alpha11*tinfty13^2)/(-
tinfty23^3+3*tinfty13*tinfty23^2-3*tinfty23*tinfty13^2+
tinfty13^3);
nu := 1/6*(3*alpha22*tinfty23-3*alpha22*tinfty13-3*alpha12*
tinfty23+3*alpha12*tinfty13-2*alpha23*tinfty22+2*alpha23*
tinfty12+2*alpha13*tinfty22-2*alpha13*tinfty12)/(tinfty23^2-2*
tinfty13*tinfty23+tinfty13^2);
```

$$A12Form := \frac{1}{3}\,\frac{(\alpha 13 - \alpha 23)\,\lambda}{-tinfty23 + tinfty13} + \nu + \frac{\mu}{\lambda - q} \tag{2.3}$$

$$0$$

$$\left\{\mu = \frac{1}{6}\,\left(6\,\alpha 11\,tinfty13^2 - 12\,\alpha 11\,tinfty13\,tinfty23 + 6\,\alpha 11\,tinfty23^2 - 3\,\alpha 12\,tinfty12\,tinfty13 + 3\,\alpha 12\,tinfty12\,tinfty23 + 3\,\alpha 12\,tinfty13\,tinfty22 - 3\,\alpha 12\,tinfty22\,tinfty23 - 2\,\alpha 13\,tinfty11\,tinfty13 + 2\,\alpha 13\,tinfty11\,tinfty23 + 2\,\alpha 13\,tinfty12^2 - 4\,\alpha 13\,tinfty12\,tinfty22 + 2\,\alpha 13\,tinfty13\,tinfty21 - 2\,\alpha 13\,tinfty21\,tinfty23 + 2\,\alpha 13\,tinfty22^2 - 6\,\alpha 21\,tinfty13^2 + 12\,\alpha 21\,tinfty13\,tinfty23 - 6\,\alpha 21\,tinfty23^2 + 3\,\alpha 22\,tinfty12\,tinfty13 - 3\,\alpha 22\,tinfty12\,tinfty23 - 3\,\alpha 22\,tinfty13\,tinfty22 + 3\,\alpha 22\,tinfty22\,tinfty23 + 2\,\alpha 23\,tinfty11\,tinfty13 - 2\,\alpha 23\,tinfty11\,tinfty23 - 2\,\alpha 23\,tinfty12^2 + 4\,\alpha 23\,tinfty12\,tinfty22 - 2\,\alpha 23\,tinfty13\,tinfty21 + 2\,\alpha 23\,tinfty21\,tinfty23 - 2\,\alpha 23\,tinfty22^2\right) \Big/ \left(tinfty13^3 - 3\,tinfty13^2\,tinfty23 + 3\,tinfty13\,tinfty23^2 - tinfty23^3\right), \nu = \frac{1}{6}\,\frac{1}{tinfty13^2 - 2\,tinfty13\,tinfty23 + tinfty23^2}\left(3\,\alpha 12\,tinfty13 - 3\,\alpha 12\,tinfty23 - 2\,\alpha 13\,tinfty12 + 2\,\alpha 13\,tinfty22 - 3\,\alpha 22\,tinfty13 + 3\,\alpha 22\,tinfty23 + 2\,\alpha 23\,tinfty12 - 2\,\alpha 23\,tinfty22\right)\right\}$$

$$\mu := -\frac{1}{6}\,\big(-6\,\alpha 11\,tinfty13^2 + 12\,\alpha 11\,tinfty13\,tinfty23 - 6\,\alpha 11\,tinfty23^2 + 3\,\alpha 12\,tinfty12\,tinfty13 - 3\,\alpha 12\,tinfty12\,tinfty23 - 3\,\alpha 12\,tinfty13\,tinfty22 + 3\,\alpha 12\,tinfty22\,tinfty23 + 2\,\alpha 13\,tinfty11\,tinfty13 - 2\,\alpha 13\,tinfty11\,tinfty23 - 2\,\alpha 13\,tinfty12^2 + 4\,\alpha 13\,tinfty12\,tinfty22 - 2\,\alpha 13\,tinfty13\,tinfty21 + 2\,\alpha 13\,tinfty21\,tinfty23 - 2\,\alpha 13\,tinfty22^2 + 6\,\alpha 21\,tinfty13^2 - 12\,\alpha 21\,tinfty13\,tinfty23 + 6\,\alpha 21\,tinfty23^2 - 3\,\alpha 22\,tinfty12\,tinfty13 + 3\,\alpha 22\,tinfty12\,tinfty23 + 3\,\alpha 22\,tinfty13\,tinfty22 - 3\,\alpha 22\,tinfty22\,tinfty23 - 2\,\alpha 23\,tinfty11\,tinfty13 + 2\,\alpha 23\,tinfty11\,tinfty23 + 2\,\alpha 23\,tinfty12^2 - 4\,\alpha 23\,tinfty12\,tinfty22 + 2\,\alpha 23\,tinfty13\,tinfty21 - 2\,\alpha 23\,tinfty21\,tinfty23 + 2\,\alpha 23\,tinfty22^2\big) \Big/ \big(tinfty13^3 - 3\,tinfty13^2\,tinfty23 + 3\,tinfty13\,tinfty23^2 - tinfty23^3\big)$$

$$\nu := \frac{1}{6}\,\frac{1}{tinfty13^2 - 2\,tinfty13\,tinfty23 + tinfty23^2}\,\big(3\,\alpha 12\,tinfty13 - 3\,\alpha 12\,tinfty23 - 2\,\alpha 13\,tinfty12 + 2\,\alpha 13\,tinfty22 - 3\,\alpha 22\,tinfty13 + 3\,\alpha 22\,tinfty23 + 2\,\alpha 23\,tinfty12 - 2\,\alpha 23\,tinfty22\big)$$

Study of A_{1,1} at infinity

```
> A11InftyLambda4:=factor(-residue(A11Infty/lambda^5,lambda=
infinity));
A11InftyLambda3:=factor(-residue(A11Infty/lambda^4,lambda=
infinity));
A11InftyLambda2:=factor(-residue(A11Infty/lambda^3,lambda=
infinity));
A11InftyLambda1:=factor(-residue(A11Infty/lambda^2,lambda=
infinity));
A11InftyLambda0:=factor(-residue(A11Infty/lambda^1,lambda=
infinity)):
A11InftyLambdaMoins1:=factor(-residue(A11Infty/lambda^0,lambda=
infinity)):
```

$$A11InftyLambda4 := 0 \qquad \textbf{(2.4)}$$

$$A11InftyLambda3 := \frac{1}{3}\,\frac{\alpha 13\,tinfty23 - \alpha 23\,tinfty13}{-tinfty23 + tinfty13}$$

$$A11InftyLambda2 := \frac{1}{6}\,\frac{1}{(-tinfty23 + tinfty13)^2}\,\big(3\,\alpha 12\,tinfty13\,tinfty23 - 3\,\alpha 12\,tinfty23^2 - 2\,\alpha 13\,tinfty12\,tinfty23 + 2\,\alpha 13\,tinfty13\,tinfty22 - 3\,\alpha 22\,tinfty13^2 + 3\,\alpha 22\,tinfty13\,tinfty23 + 2\,\alpha 23\,tinfty12\,tinfty23 - 2\,\alpha 23\,tinfty13\,tinfty22\big)$$

$$A11InftyLambda1 := \frac{1}{6}\,\frac{1}{(-tinfty23 + tinfty13)^3}\,\big(6\,\alpha 11\,tinfty13^2\,tinfty23 - 12\,\alpha 11\,tinfty13\,tinfty23^2 + 6\,\alpha 11\,tinfty23^3 - 3\,\alpha 12\,tinfty12\,tinfty13\,tinfty23 + 3\,\alpha 12\,tinfty12\,tinfty23^2 + 3\,\alpha 12\,tinfty13^2\,tinfty22 - 3\,\alpha 12\,tinfty13\,tinfty22\,tinfty23 - 2\,\alpha 13\,tinfty11\,tinfty13\,tinfty23 + 2\,\alpha 13\,tinfty11\,tinfty23^2 + 2\,\alpha 13\,tinfty12^2\,tinfty23 - 2\,\alpha 13\,tinfty12\,tinfty13\,tinfty22 - 2\,\alpha 13\,tinfty12\,tinfty22\,tinfty23$$

$$+2\,\alpha 13\,tinfty13^2\,tinfty21-2\,\alpha 13\,tinfty13\,tinfty21\,tinfty23+2\,\alpha 13\,tinfty13\,tinfty22^2$$
$$-6\,\alpha 21\,tinfty13^3+12\,\alpha 21\,tinfty13^2\,tinfty23-6\,\alpha 21\,tinfty13\,tinfty23^2$$
$$+3\,\alpha 22\,tinfty12\,tinfty13\,tinfty23-3\,\alpha 22\,tinfty12\,tinfty23^2-3\,\alpha 22\,tinfty13^2\,tinfty22$$
$$+3\,\alpha 22\,tinfty13\,tinfty22\,tinfty23+2\,\alpha 23\,tinfty11\,tinfty13\,tinfty23$$
$$-2\,\alpha 23\,tinfty11\,tinfty23^2-2\,\alpha 23\,tinfty12^2\,tinfty23+2\,\alpha 23\,tinfty12\,tinfty13\,tinfty22$$
$$+2\,\alpha 23\,tinfty12\,tinfty22\,tinfty23-2\,\alpha 23\,tinfty13^2\,tinfty21$$
$$+2\,\alpha 23\,tinfty13\,tinfty21\,tinfty23-2\,\alpha 23\,tinfty13\,tinfty22^2\Big)$$

We deduce that A_{1,1}=1/3*(alpha13*tinfty23-alpha23*tinfty13)/(tinfty13-tinfty23)*lambda^3+c2*lambda^2+c1*lambda +c0+ rho/(lambda-q). Expressions of (c_1,c_2) are obtained below.

```
> A11Form:=1/3*(alpha13*tinfty23-alpha23*tinfty13)/(tinfty13-tinfty23)*lambda^3+c2*lambda^2+c1*lambda +c0+ rho/(lambda-q);

simplify(-residue(A11Form/lambda^4,lambda=infinity)-A11InftyLambda3);
solve({factor(-residue(A11Form/lambda^3,lambda=infinity))=A11InftyLambda2,factor(-residue(A11Form/lambda^2,lambda=infinity))=A11InftyLambda1},{c2,c1});
```

$$A11Form := \frac{1}{3}\,\frac{(\alpha 13\,tinfty23-\alpha 23\,tinfty13)\,\lambda^3}{-tinfty23+tinfty13}+c2\,\lambda^2+c1\,\lambda+c0+\frac{\rho}{\lambda-q} \qquad \textbf{(2.5)}$$

$$0$$

$$\Big\{c1=\frac{1}{6}\,\big(6\,\alpha 11\,tinfty13^2\,tinfty23-12\,\alpha 11\,tinfty13\,tinfty23^2+6\,\alpha 11\,tinfty23^3$$
$$-3\,\alpha 12\,tinfty12\,tinfty13\,tinfty23+3\,\alpha 12\,tinfty12\,tinfty23^2+3\,\alpha 12\,tinfty13^2\,tinfty22$$
$$-3\,\alpha 12\,tinfty13\,tinfty22\,tinfty23-2\,\alpha 13\,tinfty11\,tinfty13\,tinfty23$$
$$+2\,\alpha 13\,tinfty11\,tinfty23^2+2\,\alpha 13\,tinfty12^2\,tinfty23-2\,\alpha 13\,tinfty12\,tinfty13\,tinfty22$$
$$-2\,\alpha 13\,tinfty12\,tinfty22\,tinfty23+2\,\alpha 13\,tinfty13^2\,tinfty21$$
$$-2\,\alpha 13\,tinfty13\,tinfty21\,tinfty23+2\,\alpha 13\,tinfty13\,tinfty22^2-6\,\alpha 21\,tinfty13^3$$
$$+12\,\alpha 21\,tinfty13^2\,tinfty23-6\,\alpha 21\,tinfty13\,tinfty23^2+3\,\alpha 22\,tinfty12\,tinfty13\,tinfty23$$
$$-3\,\alpha 22\,tinfty12\,tinfty23^2-3\,\alpha 22\,tinfty13^2\,tinfty22+3\,\alpha 22\,tinfty13\,tinfty22\,tinfty23$$
$$+2\,\alpha 23\,tinfty11\,tinfty13\,tinfty23-2\,\alpha 23\,tinfty11\,tinfty23^2-2\,\alpha 23\,tinfty12^2\,tinfty23$$
$$+2\,\alpha 23\,tinfty12\,tinfty13\,tinfty22+2\,\alpha 23\,tinfty12\,tinfty22\,tinfty23$$

$-2\ \alpha 23\ tinfty13^2\ tinfty21 + 2\ \alpha 23\ tinfty13\ tinfty21\ tinfty23 - 2\ \alpha 23\ tinfty13\ tinfty22^2) \Big/$

$(tinfty13^3 - 3\ tinfty13^2\ tinfty23 + 3\ tinfty13\ tinfty23^2 - tinfty23^3),\ c2$

$= \frac{1}{6}\ \frac{1}{tinfty13^2 - 2\ tinfty13\ tinfty23 + tinfty23^2}\ (3\ \alpha 12\ tinfty13\ tinfty23 - 3\ \alpha 12\ tinfty23^2$
$- 2\ \alpha 13\ tinfty12\ tinfty23 + 2\ \alpha 13\ tinfty13\ tinfty22 - 3\ \alpha 22\ tinfty13^2$
$+ 3\ \alpha 22\ tinfty13\ tinfty23 + 2\ \alpha 23\ tinfty12\ tinfty23 - 2\ \alpha 23\ tinfty13\ tinfty22)\}$

```
> c1 := factor(-(2*alpha13*tinfty11*tinfty13*tinfty23-2*alpha13*
tinfty11*tinfty23^2-2*alpha13*tinfty12^2*tinfty23+2*alpha13*
tinfty12*tinfty13*tinfty22+2*alpha13*tinfty12*tinfty22*tinfty23
-2*alpha13*tinfty13^2*tinfty21+2*alpha13*tinfty13*tinfty21*
tinfty23-2*alpha13*tinfty13*tinfty22^2-2*alpha23*tinfty11*
tinfty13*tinfty23+2*alpha23*tinfty11*tinfty23^2+2*alpha23*
tinfty12^2*tinfty23-2*alpha23*tinfty12*tinfty13*tinfty22-2*
alpha23*tinfty12*tinfty22*tinfty23+2*alpha23*tinfty13^2*
tinfty21-2*alpha23*tinfty13*tinfty21*tinfty23+2*alpha23*
tinfty13*tinfty22^2+3*alpha12*tinfty12*tinfty13*tinfty23-3*
alpha12*tinfty12*tinfty23^2-3*alpha12*tinfty13^2*tinfty22+3*
alpha12*tinfty13*tinfty22*tinfty23-3*alpha22*tinfty12*tinfty13*
tinfty23+3*alpha22*tinfty12*tinfty23^2+3*alpha22*tinfty13^2*
tinfty22-3*alpha22*tinfty13*tinfty22*tinfty23-6*alpha11*
tinfty13^2*tinfty23+12*alpha11*tinfty13*tinfty23^2-6*alpha11*
tinfty23^3+6*alpha21*tinfty13^3-12*alpha21*tinfty13^2*
tinfty23+6*alpha21*tinfty13*tinfty23^2)/(6*(tinfty13^3-3*
tinfty13^2*tinfty23+3*tinfty13*tinfty23^2-tinfty23^3)));
c2 := factor(-(2*alpha13*tinfty12*tinfty23-2*alpha13*tinfty13*
tinfty22-2*alpha23*tinfty12*tinfty23+2*alpha23*tinfty13*
tinfty22-3*alpha12*tinfty13*tinfty23+3*alpha12*tinfty23^2+3*
alpha22*tinfty13^2-3*alpha22*tinfty13*tinfty23)/(6*(tinfty13^2
-2*tinfty13*tinfty23+tinfty23^2)));
```

$c1 := \frac{1}{6}\ \frac{1}{(-tinfty23 + tinfty13)^3}\ (6\ \alpha 11\ tinfty13^2\ tinfty23 - 12\ \alpha 11\ tinfty13\ tinfty23^2$ **(2.6)**
$+ 6\ \alpha 11\ tinfty23^3 - 3\ \alpha 12\ tinfty12\ tinfty13\ tinfty23 + 3\ \alpha 12\ tinfty12\ tinfty23^2$
$+ 3\ \alpha 12\ tinfty13^2\ tinfty22 - 3\ \alpha 12\ tinfty13\ tinfty22\ tinfty23$
$- 2\ \alpha 13\ tinfty11\ tinfty13\ tinfty23 + 2\ \alpha 13\ tinfty11\ tinfty23^2 + 2\ \alpha 13\ tinfty12^2\ tinfty23$
$- 2\ \alpha 13\ tinfty12\ tinfty13\ tinfty22 - 2\ \alpha 13\ tinfty12\ tinfty22\ tinfty23$
$+ 2\ \alpha 13\ tinfty13^2\ tinfty21 - 2\ \alpha 13\ tinfty13\ tinfty21\ tinfty23 + 2\ \alpha 13\ tinfty13\ tinfty22^2$
$- 6\ \alpha 21\ tinfty13^3 + 12\ \alpha 21\ tinfty13^2\ tinfty23 - 6\ \alpha 21\ tinfty13\ tinfty23^2$
$+ 3\ \alpha 22\ tinfty12\ tinfty13\ tinfty23 - 3\ \alpha 22\ tinfty12\ tinfty23^2 - 3\ \alpha 22\ tinfty13^2\ tinfty22$
$+ 3\ \alpha 22\ tinfty13\ tinfty22\ tinfty23 + 2\ \alpha 23\ tinfty11\ tinfty13\ tinfty23$

$$- 2\ \alpha23\ tinfty11\ tinfty23^2 - 2\ \alpha23\ tinfty12^2\ tinfty23 + 2\ \alpha23\ tinfty12\ tinfty13\ tinfty22$$
$$+ 2\ \alpha23\ tinfty12\ tinfty22\ tinfty23 - 2\ \alpha23\ tinfty13^2\ tinfty21$$
$$+ 2\ \alpha23\ tinfty13\ tinfty21\ tinfty23 - 2\ \alpha23\ tinfty13\ tinfty22^2\Big)$$

$$c2 := \frac{1}{6}\ \frac{1}{(-tinfty23 + tinfty13)^2}\Big(3\ \alpha12\ tinfty13\ tinfty23 - 3\ \alpha12\ tinfty23^2$$
$$- 2\ \alpha13\ tinfty12\ tinfty23 + 2\ \alpha13\ tinfty13\ tinfty22 - 3\ \alpha22\ tinfty13^2$$
$$+ 3\ \alpha22\ tinfty13\ tinfty23 + 2\ \alpha23\ tinfty12\ tinfty23 - 2\ \alpha23\ tinfty13\ tinfty22\Big)$$

> ?