In this Maple file, we compute the evolution equations for the second element of the Painlevé 2 hierarchy using the compatibility equation of the Lax system. We also obtain the expression of the Lax matrices in the geometric gauge without apparent singularities.
The deformation operator is
\mathcal{L}=\hbar (alpha14\partial_{t_{\infty^{(1)},4} +alpha24\partial_{t_{\infty^{(2)},4}+ alpha13*\partial_{t_{\infty^{(1)},3} +alpha23*\partial_{t_{\infty^{(2)},3} +alpha12*\partial_{t_{\infty^{(1)},2} +alpha22*\partial_{t_{\infty^{(2)},2}+alpha11*\partial_{t_{\infty^{(1)},1} +alpha21*\partial_{t_{\infty^{(2)},1})

Solving the compatibility equation to obtain the Hamiltonian evolutions

Summary of previous files: We have the expression for some coefficients of the Lax matrix L and of A.

```
> restart:
with(LinearAlgebra):
CoherenceEquation1 :=tinfty10+tinfty20;
tinfty20:=-tinfty10:
Pinfty01 := -tinfty11-tinfty21;
Pinfty11 := -tinfty12-tinfty22;
Pinfty21 := -tinfty13-tinfty23;
Pinfty31 := -tinfty14-tinfty24;
Pinfty62 := tinfty14*tinfty24;
Pinfty52 := tinfty13*tinfty24+tinfty14*tinfty23;
Pinfty42 := tinfty12*tinfty24+tinfty13*tinfty23+tinfty14*
tinfty22;
Pinfty32 := tinfty11*tinfty24+tinfty12*tinfty23+tinfty13*
tinfty22+tinfty14*tinfty21;
Pinfty22 := tinfty20*tinfty14+tinfty10*tinfty24+tinfty11*
tinfty23+tinfty12*tinfty22+tinfty13*tinfty21;
P1:=x-> Pinfty01+Pinfty11*x+Pinfty21*x^2+Pinfty31*x^3:
P2:=x-> Pinfty02+Pinfty12*x+Pinfty22*x^2+Pinfty32*x^3+Pinfty42*
x^4+Pinfty52*x^5+Pinfty62*x^6:
tdP2:=unapply(P2(x)-Pinfty02-Pinfty12*x,x):

mu1:= -(nu1*q2-nu2)/(q1-q2);
mu2:= (nu1*q1-nu2)/(q1-q2);
nubis:=-(1/4)*(tinfty13-tinfty23)/(tinfty14-tinfty24)^2*
(alpha14-alpha24)+1/3*(alpha13-alpha23)/(tinfty14-tinfty24):
c4bis:=1/4*(alpha14*tinfty24-alpha24*tinfty14)/(tinfty14-
tinfty24):
c3bis:=-(1/4)*(tinfty13*tinfty24-tinfty14*tinfty23)/(tinfty14-
tinfty24)^2*(alpha14-alpha24)
+1/3*(alpha13*tinfty24-alpha23*tinfty14)/(tinfty14-tinfty24):
```

```
c2bis:=-(1/4)*((tinfty14-tinfty24)*(tinfty24*tinfty12-tinfty14*
tinfty22)-(-tinfty23+tinfty13)*(tinfty13*tinfty24-tinfty14*
tinfty23))/(tinfty14-tinfty24)^3*(alpha14-alpha24)
-(1/3)*(tinfty13*tinfty24-tinfty14*tinfty23)/(tinfty14-
tinfty24)^2*(alpha13-alpha23)
+(alpha12*tinfty24-alpha22*tinfty14)/(2*(tinfty14-tinfty24)):
c1bis:=(tinfty24*alpha11-tinfty14*alpha21)/(tinfty14-tinfty24)
-(1/2)*(tinfty13*tinfty24-tinfty14*tinfty23)/(tinfty14-
tinfty24)^2*(alpha12-alpha22)
-(1/3)*((tinfty14-tinfty24)*(tinfty24*tinfty12-tinfty14*
tinfty22)-(-tinfty23+tinfty13)*(tinfty13*tinfty24-tinfty14*
tinfty23))/(tinfty14-tinfty24)^3*(alpha13-alpha23)
-1/4*(tinfty24*tinfty13^3-tinfty14*tinfty23^3+ (2*tinfty14+
tinfty24)*tinfty13*tinfty23^2-(2*tinfty24+tinfty14)*tinfty13^2*
tinfty23
-(tinfty14-tinfty24)*(2*tinfty12*tinfty24-tinfty14*tinfty22-
tinfty22*tinfty24)*tinfty13
-(tinfty14-tinfty24)*(2*tinfty22*tinfty14-tinfty14*tinfty12-
tinfty12*tinfty24)*tinfty23
+(tinfty14-tinfty24)^2*(tinfty11*tinfty24-tinfty14*tinfty21))/
(tinfty14-tinfty24)^4*(alpha14-alpha24):

nu1bis:=-(1/4)*((tinfty12-tinfty22)*(tinfty14-tinfty24) -
(tinfty13-tinfty23)^2 )/(tinfty14-tinfty24)^3*(alpha14-alpha24)
-(1/3)*(tinfty13-tinfty23)/(tinfty14-tinfty24)^2*(alpha13-
alpha23)
+(alpha12-alpha22)/(2*(tinfty14-tinfty24)):
nu2bis:=-(1/4)*((tinfty11-tinfty21)*(tinfty14-tinfty24)^2-2*
(tinfty12-tinfty22)*(tinfty14-tinfty24)*(tinfty13-tinfty23) +
(tinfty13-tinfty23)^3)/(tinfty14-tinfty24)^4*(alpha14-alpha24)
-(1/3)*((tinfty12-tinfty22)*(tinfty14-tinfty24) -(tinfty13-
tinfty23)^2)/(tinfty14-tinfty24)^3*(alpha13-alpha23)
-(1/2)*(-tinfty23+tinfty13)/(tinfty14-tinfty24)^2*(alpha12-
alpha22)
+(alpha11-alpha21)/(tinfty14-tinfty24):
c4:=c4bis:


dP1dlambda:=unapply(diff(P1(lambda),lambda),lambda):
dP2dlambda:=unapply(diff(P2(lambda),lambda),lambda):
dtdP2dlambda:=unapply(diff(tdP2(lambda),lambda),lambda):
L:=Matrix(2,2,0):
```

```
L[1,1]:=0:
L[1,2]:=1:
L[2,1]:=-P2(lambda)+Pinfty02+Pinfty12*lambda +C1*lambda+C0 -h*
lambda^2*tinfty14-p1*h/(lambda-q1)-p2*h/(lambda-q2):
L[2,2]:= P1(lambda)  +h/(lambda-q1)+h/(lambda-q2):

A:=Matrix(2,2,0):
A[1,1]:=1/4*(alpha14*tinfty24-alpha24*tinfty14)/(tinfty14-
tinfty24)*lambda^4+c3*lambda^3+c2*lambda^2+c1*lambda +c0+ rho1/
(lambda-q1)+rho2/(lambda-q2):
A[1,2]:=(alpha14-alpha24)/4/(-tinfty24+tinfty14)*lambda+nu+
mu1/(lambda-q1)+ mu2/(lambda-q2):
A[1,2]:=(alpha14-alpha24)/4/(-tinfty24+tinfty14)*lambda+nu+
(nu1*(lambda-(q1+q2))+nu2)/(lambda-q1)/(lambda-q2):
A[2,1]:=AA21(lambda):
A[2,2]:=AA22(lambda):
dAdlambda:=Matrix(2,2,0):
for i from 1 to 2 do for j from 1 to 2 do dAdlambda[i,j]:=diff
(A[i,j],lambda):  od: od:

nuinftyMinus1:=- residue(A[1,2]/lambda^2,lambda=infinity);
nuinfty0:=- residue(A[1,2]/lambda,lambda=infinity);
nuinfty1:=- residue(A[1,2]/lambda^0,lambda=infinity);
nuinfty2:=- residue(A[1,2]/lambda^(-1),lambda=infinity);
mu1:=residue(A[1,2],lambda=q1);
mu2:=residue(A[1,2],lambda=q2);

L;
A;

Q2:=unapply( -p1*(lambda-q2)/(q1-q2)-p2*(lambda-q1)/(q2-q1),
lambda):
simplify(Q2(q1));
simplify(Q2(q2));
J:=Matrix(2,2,0):
J[1,1]:=1:
J[1,2]:=0:
J[2,1]:=Q2(lambda)/(lambda-q1)/(lambda-q2):
J[2,2]:=1/(lambda-q1)/(lambda-q2):
dJdlambda:=Matrix(2,2,0):
for i from 1 to 2 do for j from 1 to 2 do dJdlambda[i,j]:=diff
(J[i,j],lambda): od: od:
```

```
LJ:=Matrix(2,2,0):
LJ[1,1]:=0:
LJ[1,2]:=0:
LJ[2,2]:=diff(J[2,2],q1)*Lq1+diff(J[2,2],p1)*Lp1+diff(J[2,2],
q2)*Lq2+diff(J[2,2],p2)*Lp2:
LJ[2,1]:=diff(J[2,1],q1)*Lq1+diff(J[2,1],p1)*Lp1+diff(J[2,1],
q2)*Lq2+diff(J[2,1],p2)*Lp2:
LJ:

checkL:=simplify(Multiply(Multiply(J,L),J^(-1))+h*Multiply
(dJdlambda,J^(-1))):
checkA:=simplify(Multiply(Multiply(J,A),J^(-1))+Multiply(LJ,J^
(-1))):
```

$$CoherenceEquation1 := tinfty10 + tinfty20 \tag{1.1}$$
$$Pinfty01 := -tinfty11 - tinfty21$$
$$Pinfty11 := -tinfty12 - tinfty22$$
$$Pinfty21 := -tinfty13 - tinfty23$$
$$Pinfty31 := -tinfty14 - tinfty24$$
$$Pinfty62 := tinfty14\, tinfty24$$
$$Pinfty52 := tinfty13\, tinfty24 + tinfty14\, tinfty23$$
$$Pinfty42 := tinfty12\, tinfty24 + tinfty13\, tinfty23 + tinfty14\, tinfty22$$
$$Pinfty32 := tinfty11\, tinfty24 + tinfty12\, tinfty23 + tinfty13\, tinfty22 + tinfty14\, tinfty21$$
$$Pinfty22 := -tinfty10\, tinfty14 + tinfty10\, tinfty24 + tinfty11\, tinfty23 + tinfty12\, tinfty22 + tinfty13\, tinfty21$$
$$\mu 1 := -\frac{v1\, q2 - v2}{q1 - q2}$$
$$\mu 2 := \frac{v1\, q1 - v2}{q1 - q2}$$
$$nuinftyMinus1 := \frac{1}{4}\, \frac{\alpha 14 - \alpha 24}{tinfty14 - tinfty24}$$
$$nuinfty0 := \nu$$
$$nuinfty1 := v1$$
$$nuinfty2 := v1\,(-q1 - q2) + v2 + v1\, q1 + v1\, q2$$
$$\mu 1 := \frac{-4\, v1\, q2\, tinfty14 + 4\, v1\, q2\, tinfty24 + 4\, v2\, tinfty14 - 4\, v2\, tinfty24}{4\, q1\, tinfty14 - 4\, q1\, tinfty24 - 4\, q2\, tinfty14 + 4\, q2\, tinfty24}$$
$$\mu 2 := \frac{-4\, v1\, q1\, tinfty14 + 4\, v1\, q1\, tinfty24 + 4\, v2\, tinfty14 - 4\, v2\, tinfty24}{-4\, q1\, tinfty14 + 4\, q1\, tinfty24 + 4\, q2\, tinfty14 - 4\, q2\, tinfty24}$$

$$\Big[\big[0,\ 1 \big],$$
$$\Big[-(-tinfty10\, tinfty14 + tinfty10\, tinfty24 + tinfty11\, tinfty23 + tinfty12\, tinfty22$$

$$+ tinfty13\, tinfty21)\, \lambda^2 - (tinfty11\, tinfty24 + tinfty12\, tinfty23 + tinfty13\, tinfty22$$

$$+ tinfty14\, tinfty21)\, \lambda^3 - (tinfty12\, tinfty24 + tinfty13\, tinfty23 + tinfty14\, tinfty22)\, \lambda^4$$

$$- (tinfty13\, tinfty24 + tinfty14\, tinfty23)\, \lambda^5 - tinfty14\, tinfty24\, \lambda^6 + C1\, \lambda + C0$$

$$- h\, \lambda^2\, tinfty14 - \frac{p1\, h}{\lambda - q1} - \frac{p2\, h}{\lambda - q2}, -tinfty11 - tinfty21 + (-tinfty12 - tinfty22)\, \lambda$$

$$+ (-tinfty13 - tinfty23)\, \lambda^2 + (-tinfty14 - tinfty24)\, \lambda^3 + \frac{h}{\lambda - q1} + \frac{h}{\lambda - q2} \Big]\Big]$$

$$\Big[\Big[\frac{1}{4}\, \frac{(\alpha 14\, tinfty24 - \alpha 24\, tinfty14)\, \lambda^4}{tinfty14 - tinfty24} + c3\, \lambda^3 + c2\, \lambda^2 + c1\, \lambda + c0 + \frac{\rho 1}{\lambda - q1}$$

$$+ \frac{\rho 2}{\lambda - q2}, \frac{1}{4}\, \frac{(\alpha 14 - \alpha 24)\, \lambda}{tinfty14 - tinfty24} + \nu + \frac{\nu 1\, (\lambda - q1 - q2) + \nu 2}{(\lambda - q1)\, (\lambda - q2)}\Big],$$

$$\Big[AA21(\lambda), AA22(\lambda)\Big]\Big]$$

$$-p1$$
$$-p2$$

The compatibility equation is \mathcal{L}L=h\partial_\lambda A+[A,L]
Since the first line of L is trivial, we may easily obtain A[2,1] et A[2,2] to obtain the full expression for A

```
> LL:=h*dAdlambda+(Multiply(A,L)-Multiply(L,A)):

  Entry11:=LL[1,1]:
  Entry12:=LL[1,2]:

  AA21:=unapply(solve(Entry11=0,AA21(lambda)),lambda):
  AA21bis:=h*dAdlambda[1,1]+A[1,2]*L[2,1]:
  simplify(AA21(lambda)-AA21bis);

  AA22:=unapply(solve(Entry12=0,AA22(lambda)),lambda):
  AA22bis:=h*dAdlambda[1,2]+A[1,1]+A[1,2]*L[2,2]:
  simplify(AA22(lambda)-AA22bis);

  simplify(Entry11);
  simplify(Entry12);
  LL:=h*dAdlambda+(Multiply(A,L)-Multiply(L,A)):
```

$$0 \quad \textbf{(1.2)}$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$

We now compute the action of \mathcal{L} on L[2,2] et L[2,1] to obtain the evolution equations

Evolution of entry L_{2,2}

```
> Entry22:=simplify(LL[2,2]):
simplify(Entry22-(h^2*diff(A[1,2],lambda$2)+2*h*diff(A[1,1],
lambda)+h*A[1,2]*diff(L[2,2],lambda)+h*L[2,2]*diff(A[1,2],
lambda)));
Entry22TermLambdaMinusq1Cube:=factor(residue(Entry22*(lambda-
q1)^2,lambda=q1));
Entry22TermLambdaMinusq1Square:=factor(residue(Entry22*(lambda-
q1),lambda=q1));
Entry22TermLambdaMinusq1:=factor(residue(Entry22,lambda=q1));

Entry22TermLambdaMinusq2Cube:=factor(residue(Entry22*(lambda-
q2)^2,lambda=q2));
Entry22TermLambdaMinusq2Square:=factor(residue(Entry22*(lambda-
q2),lambda=q2));
Entry22TermLambdaMinusq2:=factor(residue(Entry22,lambda=q2));

Entry22TermLambdaInfty5:=factor(-residue(Entry22/lambda^6,
lambda=infinity));
Entry22TermLambdaInfty4:=factor(-residue(Entry22/lambda^5,
lambda=infinity));
Entry22TermLambdaInfty3:=factor(-residue(Entry22/lambda^4,
lambda=infinity));
Entry22TermLambdaInfty2:=factor(-residue(Entry22/lambda^3,
lambda=infinity));
Entry22TermLambdaInfty1:=factor(-residue(Entry22/lambda^2,
lambda=infinity));
Entry22TermLambdaInfty0:=factor(-residue(Entry22/lambda,lambda=
infinity));
Entry22TermLambdaInftyMinus1:=factor(-residue(Entry22,lambda=
infinity));

simplify( Entry22-(Entry22TermLambdaMinusq1Square/(lambda-q1)
^2+Entry22TermLambdaMinusq1/(lambda-q1)
+Entry22TermLambdaMinusq2Square/(lambda-q2)^2+
Entry22TermLambdaMinusq2/(lambda-q2)
+Entry22TermLambdaInfty0+Entry22TermLambdaInfty1*lambda+
Entry22TermLambdaInfty2*lambda^2+Entry22TermLambdaInfty3*
lambda^3+Entry22TermLambdaInfty4*lambda^4) );
L[2,2];
```

$$0 \qquad \textbf{(1.3)}$$

$$Entry22TermLambdaMinusq1Cube := 0$$

$$Entry22TermLambdaMinusq1Square := -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(tinfty14 - tinfty24)\,(q1 - q2)}\Big(\big(4\,v1\,q1^3\,q2\,tinfty14^2 - 4\,v1\,q1^3\,q2\,tinfty24^2 + 4\,v1\,q1^2\,q2\,tinfty13\,tinfty14 - 4\,v1\,q1^2\,q2\,tinfty13\,tinfty24 + 4\,v1\,q1^2\,q2\,tinfty14\,tinfty23 - 4\,v1\,q1^2\,q2\,tinfty23\,tinfty24 - 4\,v2\,q1^3\,tinfty14^2 + 4\,v2\,q1^3\,tinfty24^2 + 4\,v1\,q1\,q2\,tinfty12\,tinfty14 - 4\,v1\,q1\,q2\,tinfty12\,tinfty24 + 4\,v1\,q1\,q2\,tinfty14\,tinfty22 - 4\,v1\,q1\,q2\,tinfty22\,tinfty24 - 4\,v2\,q1^2\,tinfty13\,tinfty14 + 4\,v2\,q1^2\,tinfty13\,tinfty24 - 4\,v2\,q1^2\,tinfty14\,tinfty23 + 4\,v2\,q1^2\,tinfty23\,tinfty24 + \alpha 14\,h\,q1^2 - \alpha 14\,h\,q1\,q2 - \alpha 24\,h\,q1^2 + \alpha 24\,h\,q1\,q2 + 4\,h\,\nu\,q1\,tinfty14 - 4\,h\,\nu\,q1\,tinfty24 - 4\,h\,\nu\,q2\,tinfty14 + 4\,h\,\nu\,q2\,tinfty24 + 4\,v1\,q2\,tinfty11\,tinfty14 - 4\,v1\,q2\,tinfty11\,tinfty24 + 4\,v1\,q2\,tinfty14\,tinfty21 - 4\,v1\,q2\,tinfty21\,tinfty24 - 4\,v2\,q1\,tinfty12\,tinfty14 + 4\,v2\,q1\,tinfty12\,tinfty24 - 4\,v2\,q1\,tinfty14\,tinfty22 + 4\,v2\,q1\,tinfty22\,tinfty24 + 4\,h\,v1\,tinfty14 - 4\,h\,v1\,tinfty24 - 4\,v2\,tinfty11\,tinfty14 + 4\,v2\,tinfty11\,tinfty24 - 4\,v2\,tinfty14\,tinfty21 + 4\,v2\,tinfty21\,tinfty24 + 8\,q1\,\rho 1\,tinfty14 - 8\,q1\,\rho 1\,tinfty24 - 8\,q2\,\rho 1\,tinfty14 + 8\,q2\,\rho 1\,tinfty24\big)\,h\Big)$$

$$Entry22TermLambdaMinusq1 := 0$$

$$Entry22TermLambdaMinusq2Cube := 0$$

$$Entry22TermLambdaMinusq2Square := -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(tinfty14 - tinfty24)\,(q1 - q2)}\Big(\big(-4\,v1\,q1\,q2^3\,tinfty14^2 + 4\,v1\,q1\,q2^3\,tinfty24^2 - 4\,v1\,q1\,q2^2\,tinfty13\,tinfty14 + 4\,v1\,q1\,q2^2\,tinfty13\,tinfty24 - 4\,v1\,q1\,q2^2\,tinfty14\,tinfty23 + 4\,v1\,q1\,q2^2\,tinfty23\,tinfty24 + 4\,v2\,q2^3\,tinfty14^2 - 4\,v2\,q2^3\,tinfty24^2 - 4\,v1\,q1\,q2\,tinfty12\,tinfty14 + 4\,v1\,q1\,q2\,tinfty12\,tinfty24 - 4\,v1\,q1\,q2\,tinfty14\,tinfty22 + 4\,v1\,q1\,q2\,tinfty22\,tinfty24 + 4\,v2\,q2^2\,tinfty13\,tinfty14 - 4\,v2\,q2^2\,tinfty13\,tinfty24 + 4\,v2\,q2^2\,tinfty14\,tinfty23 - 4\,v2\,q2^2\,tinfty23\,tinfty24 + \alpha 14\,h\,q1\,q2 - \alpha 14\,h\,q2^2 - \alpha 24\,h\,q1\,q2 + \alpha 24\,h\,q2^2 + 4\,h\,\nu\,q1\,tinfty14 - 4\,h\,\nu\,q1\,tinfty24 - 4\,h\,\nu\,q2\,tinfty14 + 4\,h\,\nu\,q2\,tinfty24 - 4\,v1\,q1\,tinfty11\,tinfty14 + 4\,v1\,q1\,tinfty11\,tinfty24 - 4\,v1\,q1\,tinfty14\,tinfty21 + 4\,v1\,q1\,tinfty21\,tinfty24 + 4\,v2\,q2\,tinfty12\,tinfty14 - 4\,v2\,q2\,tinfty12\,tinfty24 + 4\,v2\,q2\,tinfty14\,tinfty22 - 4\,v2\,q2\,tinfty22\,tinfty24 - 4\,h\,v1\,tinfty14 + 4\,h\,v1\,tinfty24 + 4\,v2\,tinfty11\,tinfty14 - 4\,v2\,tinfty11\,tinfty24 + 4\,v2\,tinfty14\,tinfty21 - 4\,v2\,tinfty21\,tinfty24 + 8\,q1\,\rho 2\,tinfty14 - 8\,q1\,\rho 2\,tinfty24 - 8\,q2\,\rho 2\,tinfty14 + 8\,q2\,\rho 2\,tinfty24\big)\,h\Big)$$

$$Entry22TermLambdaMinusq2 := 0$$

$$Entry22TermLambdaInfty5 := 0$$

$$Entry22TermLambdaInfty4 := 0$$

$$Entry22TermLambdaInfty3 := -(\alpha 14 + \alpha 24)\,h$$

$$Entry22TermLambdaInfty2 := -\frac{3}{4}\,\frac{1}{tinfty14 - tinfty24}\Big(h\,\big(4\,\nu\,tinfty14^2 - 4\,\nu\,tinfty24^2 + \alpha 14\,tinfty13 + \alpha 14\,tinfty23 - \alpha 24\,tinfty13 - \alpha 24\,tinfty23 - 8\,c3\,tinfty14 + 8\,c3\,tinfty24\big)\Big)$$

$$Entry22TermLambdaInfty1 := -\frac{1}{2}\frac{1}{tinfty14 - tinfty24}\left(h\left(4\,\nu\, tinfty13\, tinfty14 - 4\,\nu\, tinfty13\, tinfty24 + 4\,\nu\, tinfty14\, tinfty23 - 4\,\nu\, tinfty23\, tinfty24 + 4\,\nu 1\, tinfty14^2 - 4\,\nu 1\, tinfty24^2 + \alpha 14\, tinfty12 + \alpha 14\, tinfty22 - \alpha 24\, tinfty12 - \alpha 24\, tinfty22 - 8\, c2\, tinfty14 + 8\, c2\, tinfty24\right)\right)$$

$$Entry22TermLambdaInfty0 := -\frac{1}{4}\frac{1}{tinfty14 - tinfty24}\left(h\left(4\,\nu\, tinfty12\, tinfty14 - 4\,\nu\, tinfty12\, tinfty24 + 4\,\nu\, tinfty14\, tinfty22 - 4\,\nu\, tinfty22\, tinfty24 + 4\,\nu 1\, tinfty13\, tinfty14 - 4\,\nu 1\, tinfty13\, tinfty24 + 4\,\nu 1\, tinfty14\, tinfty23 - 4\,\nu 1\, tinfty23\, tinfty24 + 4\,\nu 2\, tinfty14^2 - 4\,\nu 2\, tinfty24^2 + \alpha 14\, tinfty11 + \alpha 14\, tinfty21 - \alpha 24\, tinfty11 - \alpha 24\, tinfty21 - 8\, c1\, tinfty14 + 8\, c1\, tinfty24\right)\right)$$

$$Entry22TermLambdaInftyMinus1 := 0$$

$$0$$

$$-tinfty11 - tinfty21 + (-tinfty12 - tinfty22)\,\lambda + (-tinfty13 - tinfty23)\,\lambda^2 + (-tinfty14 - tinfty24)\,\lambda^3 + \frac{h}{\lambda - q1} + \frac{h}{\lambda - q2}$$

Since the deformation operator is \hbar (alpha14\partial_{t_{\infty^{(1)},4} +alpha24\partial_{t_{\infty^{(2)},4}+alpha13*\partial_{t_{\infty^{(1)},3} +alpha23*\partial_{t_{\infty^{(2)},3}+ alpha12\partial_{t_{\infty^{(1)},2} +alpha22*\partial_{t_{\infty^{(2)},2}+alpha11*\partial_{t_{\infty^{(1)},1} +alpha21*\partial_{t_{\infty^{(2)},1}) we can compute its action on L_{2,2}.

```
> L22OrderLambda4:=factor(-residue(L[2,2]/lambda^5,lambda=
  infinity));
  L22OrderLambda3:=factor(-residue(L[2,2]/lambda^4,lambda=
  infinity));
  L22OrderLambda2:=factor(-residue(L[2,2]/lambda^3,lambda=
  infinity)):
  L22OrderLambda1:=factor(-residue(L[2,2]/lambda^2,lambda=
  infinity)):
  L22OrderLambda0:=factor(-residue(L[2,2]/lambda^1,lambda=
  infinity));
  simplify(h*(alpha14*diff(L22OrderLambda3,tinfty14)+alpha24*diff
  (L22OrderLambda3,tinfty24)+alpha13*diff(L22OrderLambda3,
  tinfty13)+alpha23*diff(L22OrderLambda3,tinfty23)+alpha12diff
  (L22OrderLambda3,tinfty12)+alpha22*diff(L22OrderLambda3,
  tinfty22)+alpha11*diff(L22OrderLambda3,tinfty11)+alpha21*diff
  (L22OrderLambda3,tinfty21))- Entry22TermLambdaInfty3);
  Equation1:=factor(simplify(h*(alpha14*diff(L22OrderLambda2,
  tinfty14)+alpha24*diff(L22OrderLambda2,tinfty24)+alpha13*diff
  (L22OrderLambda2,tinfty13)+alpha23*diff(L22OrderLambda2,
  tinfty23)+alpha12*diff(L22OrderLambda2,tinfty12)+alpha22*diff
  (L22OrderLambda2,tinfty22)+alpha11*diff(L22OrderLambda2,
  tinfty11)+alpha21*diff(L22OrderLambda2,tinfty21))-
  Entry22TermLambdaInfty2));
```

```
Equation2:=factor(simplify(h*(alpha14*diff(L22OrderLambda1,
tinfty14)+alpha24*diff(L22OrderLambda1,tinfty24)+alpha13*diff
(L22OrderLambda1,tinfty13)+alpha23*diff(L22OrderLambda1,
tinfty23)+alpha12*diff(L22OrderLambda1,tinfty12)+alpha22*diff
(L22OrderLambda1,tinfty22)+alpha11*diff(L22OrderLambda1,
tinfty11)+alpha21*diff(L22OrderLambda1,tinfty21))-
Entry22TermLambdaInfty1));
Equation3:=factor(simplify(h*(alpha14*diff(L22OrderLambda0,
tinfty14)+alpha24*diff(L22OrderLambda0,tinfty24)+alpha13*diff
(L22OrderLambda0,tinfty13)+alpha23*diff(L22OrderLambda0,
tinfty23)+alpha12*diff(L22OrderLambda0,tinfty12)+alpha22*diff
(L22OrderLambda0,tinfty22)+alpha11*diff(L22OrderLambda0,
tinfty11)+alpha21*diff(L22OrderLambda0,tinfty21))-
Entry22TermLambdaInfty0));
```

$$L22OrderLambda4 := 0 \qquad \textbf{(1.4)}$$

$$L22OrderLambda3 := -tinfty14 - tinfty24$$

$$L22OrderLambda0 := -tinfty11 - tinfty21$$

$$h\ alpha12diff(-tinfty14 - tinfty24, tinfty12)$$

$$Equation1 := -\frac{1}{4}\frac{1}{tinfty14 - tinfty24}\Big(h\,\big(-12\,\nu\,tinfty14^2 + 12\,\nu\,tinfty24^2 + 4\,\alpha 13\,tinfty14 - 4\,\alpha 13\,tinfty24 - 3\,\alpha 14\,tinfty13 - 3\,\alpha 14\,tinfty23 + 4\,\alpha 23\,tinfty14 - 4\,\alpha 23\,tinfty24 + 3\,\alpha 24\,tinfty13 + 3\,\alpha 24\,tinfty23 + 24\,c3\,tinfty14 - 24\,c3\,tinfty24\big)\Big)$$

$$Equation2 := -\frac{1}{2}\frac{1}{tinfty14 - tinfty24}\Big(h\,\big(-4\,\nu\,tinfty13\,tinfty14 + 4\,\nu\,tinfty13\,tinfty24 - 4\,\nu\,tinfty14\,tinfty23 + 4\,\nu\,tinfty23\,tinfty24 - 4\,\nu 1\,tinfty14^2 + 4\,\nu 1\,tinfty24^2 + 2\,\alpha 12\,tinfty14 - 2\,\alpha 12\,tinfty24 - \alpha 14\,tinfty12 - \alpha 14\,tinfty22 + 2\,\alpha 22\,tinfty14 - 2\,\alpha 22\,tinfty24 + \alpha 24\,tinfty12 + \alpha 24\,tinfty22 + 8\,c2\,tinfty14 - 8\,c2\,tinfty24\big)\Big)$$

$$Equation3 := -\frac{1}{4}\frac{1}{tinfty14 - tinfty24}\Big(h\,\big(-4\,\nu\,tinfty12\,tinfty14 + 4\,\nu\,tinfty12\,tinfty24 - 4\,\nu\,tinfty14\,tinfty22 + 4\,\nu\,tinfty22\,tinfty24 - 4\,\nu 1\,tinfty13\,tinfty14 + 4\,\nu 1\,tinfty13\,tinfty24 - 4\,\nu 1\,tinfty14\,tinfty23 + 4\,\nu 1\,tinfty23\,tinfty24 - 4\,\nu 2\,tinfty14^2 + 4\,\nu 2\,tinfty24^2 + 4\,\alpha 11\,tinfty14 - 4\,\alpha 11\,tinfty24 - \alpha 14\,tinfty11 - \alpha 14\,tinfty21 + 4\,\alpha 21\,tinfty14 - 4\,\alpha 21\,tinfty24 + \alpha 24\,tinfty11 + \alpha 24\,tinfty21 + 8\,c1\,tinfty14 - 8\,c1\,tinfty24\big)\Big)$$

```
> Lq1:=factor(Entry22TermLambdaMinusq1Square/h):
Lq2:=factor(Entry22TermLambdaMinusq2Square/h):
Lq1bis:=-2*rho1-P1(q1)*mu1-nu*h-nu1*h/(q1-q2)-h*(alpha14-
alpha24)/4/(tinfty14-tinfty24)*q1;
Lq2bis:=-2*rho2-P1(q2)*mu2-nu*h+nu1*h/(q1-q2)-h*(alpha14-
alpha24)/4/(tinfty14-tinfty24)*q2;
factor(simplify((Lq1-Lq1bis)));
factor(simplify((Lq2-Lq2bis)));
```

$$Lq1bis := -2\,\rho 1 - \Big(\big(-tinfty11 - tinfty21 + (-tinfty12 - tinfty22)\,q1 + (-tinfty13 - tinfty23)\,q1^2 + (-tinfty14 - tinfty24)\,q1^3\big)\,(-4\,\nu 1\,q2\,tinfty14 + 4\,\nu 1\,q2\,tinfty24 + 4\,\nu 2\,tinfty14 - 4\,\nu 2\,tinfty24)\Big) \Big/ (4\,q1\,tinfty14 - 4\,q1\,tinfty24 - 4\,q2\,tinfty14 + 4\,q2\,tinfty24) - h\,\nu - \frac{\nu 1\,h}{q1 - q2} - \frac{1}{4}\,\frac{h\,(\alpha 14 - \alpha 24)\,q1}{tinfty14 - tinfty24} \quad (1.5)$$

$$Lq2bis := -2\,\rho 2 - \Big(\big(-tinfty11 - tinfty21 + (-tinfty12 - tinfty22)\,q2 + (-tinfty13 - tinfty23)\,q2^2 + (-tinfty14 - tinfty24)\,q2^3\big)\,(-4\,\nu 1\,q1\,tinfty14 + 4\,\nu 1\,q1\,tinfty24 + 4\,\nu 2\,tinfty14 - 4\,\nu 2\,tinfty24)\Big) \Big/ (-4\,q1\,tinfty14 + 4\,q1\,tinfty24 + 4\,q2\,tinfty14 - 4\,q2\,tinfty24) - h\,\nu + \frac{\nu 1\,h}{q1 - q2} - \frac{1}{4}\,\frac{h\,(\alpha 14 - \alpha 24)\,q2}{tinfty14 - tinfty24}$$

$$0$$

$$0$$

Let us now look at \mathcal{L}[L[2,1]]

```
> Entry21:=simplify(LL[2,1]):
  simplify(Entry21-(h^2*diff(A[1,1],lambda$2)+2*h*L[2,1]*diff(A[1,2],lambda)+h*A[1,2]*diff(L[2,1],lambda)-h*L[2,2]*diff(A[1,1],lambda)));
  Entry21TermLambdaMinusq1Cube:=factor(residue(Entry21*(lambda-q1)^2,lambda=q1));
  Entry21TermLambdaMinusq1Square:=factor(residue(Entry21*(lambda-q1),lambda=q1)):
  Entry21TermLambdaMinusq1:=factor(residue(Entry21,lambda=q1)):
  Entry21TermLambdaMinusq2Cube:=factor(residue(Entry21*(lambda-q2)^2,lambda=q2));
  Entry21TermLambdaMinusq2Square:=factor(residue(Entry21*(lambda-q2),lambda=q2)):
  Entry21TermLambdaMinusq2:=factor(residue(Entry21,lambda=q2)):

  Entry21TermLambdaInfty7:=factor(-residue(Entry21/lambda^8,lambda=infinity));
  Entry21TermLambdaInfty6:=factor(-residue(Entry21/lambda^7,lambda=infinity));
  Entry21TermLambdaInfty5:=factor(-residue(Entry21/lambda^6,lambda=infinity));
  Entry21TermLambdaInfty4:=factor(-residue(Entry21/lambda^5,lambda=infinity));
  Entry21TermLambdaInfty3:=factor(-residue(Entry21/lambda^4,lambda=infinity)):
  Entry21TermLambdaInfty2:=factor(-residue(Entry21/lambda^3,lambda=infinity)):
  Entry21TermLambdaInfty1:=factor(-residue(Entry21/lambda^2,lambda=infinity)):
```

```
Entry21TermLambdaInfty0:=factor(-residue(Entry21/lambda,lambda=
infinity)):

simplify( Entry21-(Entry21TermLambdaMinusq1Cube/(lambda-q1)^3+
Entry21TermLambdaMinusq1Square/(lambda-q1)^2+
Entry21TermLambdaMinusq1/(lambda-q1)
+Entry21TermLambdaMinusq2Cube/(lambda-q2)^3+
Entry21TermLambdaMinusq2Square/(lambda-q2)^2+
Entry21TermLambdaMinusq2/(lambda-q2)
+Entry21TermLambdaInfty0+Entry21TermLambdaInfty1*lambda+
Entry21TermLambdaInfty2*lambda^2+Entry21TermLambdaInfty3*
lambda^3
+Entry21TermLambdaInfty4*lambda^4+Entry21TermLambdaInfty5*
lambda^5+Entry21TermLambdaInfty6*lambda^6
+Entry21TermLambdaInfty7*lambda^7
) );
L[2,1];
```

$$0 \qquad \textbf{(1.6)}$$

$$Entry21TermLambdaMinusq1Cube := -\frac{3\,(v1\,p1\,q2 - v2\,p1 - q1\,\rho1 + q2\,\rho1)\,h^2}{q1 - q2}$$

$$Entry21TermLambdaMinusq2Cube := \frac{3\,(v1\,p2\,q1 - v2\,p2 + q1\,\rho2 - q2\,\rho2)\,h^2}{q1 - q2}$$

$$Entry21TermLambdaInfty7 := 0$$

$$Entry21TermLambdaInfty6 := -h\,(\alpha14\,tinfty24 + \alpha24\,tinfty14)$$

$$Entry21TermLambdaInfty5 := -\frac{1}{4}\,\frac{1}{tinfty14 - tinfty24}\,(h\,(24\,\nu\,tinfty14^2\,tinfty24 - 24\,\nu\,tinfty14\,tinfty24^2 + 3\,\alpha14\,tinfty13\,tinfty24 + 7\,\alpha14\,tinfty14\,tinfty23 - 4\,\alpha14\,tinfty23\,tinfty24 + 4\,\alpha24\,tinfty13\,tinfty14 - 7\,\alpha24\,tinfty13\,tinfty24 - 3\,\alpha24\,tinfty14\,tinfty23 - 12\,c3\,tinfty14^2 + 12\,c3\,tinfty24^2))$$

$$Entry21TermLambdaInfty4 := -\frac{1}{2}\,\frac{1}{tinfty14 - tinfty24}\,(h\,(10\,\nu\,tinfty13\,tinfty14\,tinfty24 - 10\,\nu\,tinfty13\,tinfty24^2 + 10\,\nu\,tinfty14^2\,tinfty23 - 10\,\nu\,tinfty14\,tinfty23\,tinfty24 + 8\,v1\,tinfty14^2\,tinfty24 - 8\,v1\,tinfty14\,tinfty24^2 + \alpha14\,tinfty12\,tinfty24 + 3\,\alpha14\,tinfty13\,tinfty23 + 3\,\alpha14\,tinfty14\,tinfty22 - 2\,\alpha14\,tinfty22\,tinfty24 + 2\,\alpha24\,tinfty12\,tinfty14 - 3\,\alpha24\,tinfty12\,tinfty24 - 3\,\alpha24\,tinfty13\,tinfty23 - \alpha24\,tinfty14\,tinfty22 - 4\,c2\,tinfty14^2 + 4\,c2\,tinfty24^2 - 6\,c3\,tinfty13\,tinfty14 + 6\,c3\,tinfty13\,tinfty24 - 6\,c3\,tinfty14\,tinfty23 + 6\,c3\,tinfty23\,tinfty24))$$

$$0$$

$$-(-tinfty10\,tinfty14 + tinfty10\,tinfty24 + tinfty11\,tinfty23 + tinfty12\,tinfty22 + tinfty13\,tinfty21)\,\lambda^2 - (tinfty11\,tinfty24 + tinfty12\,tinfty23 + tinfty13\,tinfty22 + tinfty14\,tinfty21)\,\lambda^3 - (tinfty12\,tinfty24 + tinfty13\,tinfty23 + tinfty14\,tinfty22)\,\lambda^4$$

$$-\left(tinfty13\ tinfty24 + tinfty14\ tinfty23\right)\lambda^5 - tinfty14\ tinfty24\ \lambda^6 + C1\ \lambda + C0 - h\ \lambda^2\ tinfty14 - \frac{p1\ h}{\lambda - q1} - \frac{p2\ h}{\lambda - q2}$$

```
> rho1:=factor(solve(Entry21TermLambdaMinusq1Cube,rho1));
  simplify(Entry21TermLambdaMinusq1Cube);
  rho1bis:=-p1*mu1:
  simplify(rho1-rho1bis);
  rho2:=factor(solve(Entry21TermLambdaMinusq2Cube,rho2));
  simplify(Entry21TermLambdaMinusq2Cube);
  rho2bis:=-p2*mu2:
  simplify(rho2-rho2bis);
```

$$\rho 1 := \frac{p1\ (v1\ q2 - v2)}{q1 - q2} \quad \textbf{(1.7)}$$

$$0$$

$$0$$

$$\rho 2 := -\frac{p2\ (v1\ q1 - v2)}{q1 - q2}$$

$$0$$

$$0$$

```
> L21OrderLambda7:=-residue(L[2,1]/lambda^8,lambda=infinity);
  L21OrderLambda6:=-residue(L[2,1]/lambda^7,lambda=infinity);
  L21OrderLambda5:=-residue(L[2,1]/lambda^6,lambda=infinity);
  L21OrderLambda4:=-residue(L[2,1]/lambda^5,lambda=infinity):
  L21OrderLambda3:=-residue(L[2,1]/lambda^4,lambda=infinity):
  L21OrderLambda2:=-residue(L[2,1]/lambda^3,lambda=infinity):
  L21OrderLambda1:=-residue(L[2,1]/lambda^2,lambda=infinity):
  L21OrderLambda0:=-residue(L[2,1]/lambda^1,lambda=infinity):


  simplify(h*(alpha14*diff(L21OrderLambda6,tinfty14)+alpha24*diff
  (L21OrderLambda6,tinfty24)+alpha13*diff(L21OrderLambda6,
  tinfty13)+alpha23*diff(L21OrderLambda6,tinfty23)+alpha12diff
  (L21OrderLambda6,tinfty12)+alpha22*diff(L21OrderLambda6,
  tinfty22)+alpha11*diff(L21OrderLambda6,tinfty11)+alpha21*diff
  (L21OrderLambda6,tinfty21))- Entry21TermLambdaInfty6);

  Equation4:=factor(simplify(h*(alpha14*diff(L21OrderLambda5,
  tinfty14)+alpha24*diff(L21OrderLambda5,tinfty24)+alpha13*diff
  (L21OrderLambda5,tinfty13)+alpha23*diff(L21OrderLambda5,
  tinfty23)+alpha12*diff(L21OrderLambda5,tinfty12)+alpha22*diff
  (L21OrderLambda5,tinfty22)+alpha11*diff(L21OrderLambda5,
  tinfty11)+alpha21*diff(L21OrderLambda5,tinfty21))-
```

```
Entry21TermLambdaInfty5));
Equation5:=factor(simplify(h*(alpha14*diff(L21OrderLambda4,
tinfty14)+alpha24*diff(L21OrderLambda4,tinfty24)+alpha13*diff
(L21OrderLambda4,tinfty13)+alpha23*diff(L21OrderLambda4,
tinfty23)+alpha12*diff(L21OrderLambda4,tinfty12)+alpha22*diff
(L21OrderLambda4,tinfty22)+alpha11*diff(L21OrderLambda4,
tinfty11)+alpha21*diff(L21OrderLambda4,tinfty21))-
Entry21TermLambdaInfty4));
Equation6:=factor(simplify(h*(alpha14*diff(L21OrderLambda3,
tinfty14)+alpha24*diff(L21OrderLambda3,tinfty24)+alpha13*diff
(L21OrderLambda3,tinfty13)+alpha23*diff(L21OrderLambda3,
tinfty23)+alpha12*diff(L21OrderLambda3,tinfty12)+alpha22*diff
(L21OrderLambda3,tinfty22)+alpha11*diff(L21OrderLambda3,
tinfty11)+alpha21*diff(L21OrderLambda3,tinfty21))-
Entry21TermLambdaInfty3));
Equation7:=factor(simplify(h*(alpha14*diff(L21OrderLambda2,
tinfty14)+alpha24*diff(L21OrderLambda2,tinfty24)+alpha13*diff
(L21OrderLambda2,tinfty13)+alpha23*diff(L21OrderLambda2,
tinfty23)+alpha12*diff(L21OrderLambda2,tinfty12)+alpha22*diff
(L21OrderLambda2,tinfty22)+alpha11*diff(L21OrderLambda2,
tinfty11)+alpha21*diff(L21OrderLambda2,tinfty21))-
Entry21TermLambdaInfty2));
```

$$L21OrderLambda7 := 0 \qquad \textbf{(1.8)}$$

$$L21OrderLambda6 := -tinfty14\, tinfty24$$

$$L21OrderLambda5 := -tinfty13\, tinfty24 - tinfty14\, tinfty23$$

$$alpha12diff(-tinfty14\, tinfty24, tinfty12)\, h$$

$$Equation4 := -\frac{1}{4}\, \frac{1}{tinfty14 - tinfty24} \left(h \left(-24\, \nu\, tinfty14^2\, tinfty24 + 24\, \nu\, tinfty14\, tinfty24^2 + 4\, \alpha 13\, tinfty14\, tinfty24 - 4\, \alpha 13\, tinfty24^2 - 3\, \alpha 14\, tinfty13\, tinfty24 - 3\, \alpha 14\, tinfty14\, tinfty23 + 4\, \alpha 23\, tinfty14^2 - 4\, \alpha 23\, tinfty14\, tinfty24 + 3\, \alpha 24\, tinfty13\, tinfty24 + 3\, \alpha 24\, tinfty14\, tinfty23 + 12\, c3\, tinfty14^2 - 12\, c3\, tinfty24^2\right)\right)$$

$$Equation5 := -\frac{1}{2}\, \frac{1}{tinfty14 - tinfty24} \left(h \left(-10\, \nu\, tinfty13\, tinfty14\, tinfty24 + 10\, \nu\, tinfty13\, tinfty24^2 - 10\, \nu\, tinfty14^2\, tinfty23 + 10\, \nu\, tinfty14\, tinfty23\, tinfty24 - 8\, \nu 1\, tinfty14^2\, tinfty24 + 8\, \nu 1\, tinfty14\, tinfty24^2 + 2\, \alpha 12\, tinfty14\, tinfty24 - 2\, \alpha 12\, tinfty24^2 + 2\, \alpha 13\, tinfty14\, tinfty23 - 2\, \alpha 13\, tinfty23\, tinfty24 - \alpha 14\, tinfty12\, tinfty24 - 3\, \alpha 14\, tinfty13\, tinfty23 - \alpha 14\, tinfty14\, tinfty22 + 2\, \alpha 22\, tinfty14^2 - 2\, \alpha 22\, tinfty14\, tinfty24 + 2\, \alpha 23\, tinfty13\, tinfty14 - 2\, \alpha 23\, tinfty13\, tinfty24 + \alpha 24\, tinfty12\, tinfty24 + 3\, \alpha 24\, tinfty13\, tinfty23 + \alpha 24\, tinfty14\, tinfty22 + 4\, c2\, tinfty14^2 - 4\, c2\, tinfty24^2 + 6\, c3\, tinfty13\, tinfty14\right.\right.$$

$$- 6\, c3\, tinfty13\, tinfty24 + 6\, c3\, tinfty14\, tinfty23 - 6\, c3\, tinfty23\, tinfty24))$$

$$Equation6 := -\frac{1}{4}\, \frac{1}{tinfty14 - tinfty24} \Big(h \big(-16\, \nu\, tinfty12\, tinfty14\, tinfty24 + 16\, \nu\, tinfty12\, tinfty24^2 - 16\, \nu\, tinfty13\, tinfty14\, tinfty23 + 16\, \nu\, tinfty13\, tinfty23\, tinfty24 - 16\, \nu\, tinfty14^2\, tinfty22 + 16\, \nu\, tinfty14\, tinfty22\, tinfty24 - 12\, \nu1\, tinfty13\, tinfty14\, tinfty24 + 12\, \nu1\, tinfty13\, tinfty24^2 - 12\, \nu1\, tinfty14^2\, tinfty23 + 12\, \nu1\, tinfty14\, tinfty23\, tinfty24 - 8\, \nu2\, tinfty14^2\, tinfty24 + 8\, \nu2\, tinfty14\, tinfty24^2 + 4\, \alpha11\, tinfty14\, tinfty24 - 4\, \alpha11\, tinfty24^2 + 4\, \alpha12\, tinfty14\, tinfty23 - 4\, \alpha12\, tinfty23\, tinfty24 + 4\, \alpha13\, tinfty14\, tinfty22 - 4\, \alpha13\, tinfty22\, tinfty24 - \alpha14\, tinfty11\, tinfty24 - 5\, \alpha14\, tinfty12\, tinfty23 - 5\, \alpha14\, tinfty13\, tinfty22 - \alpha14\, tinfty14\, tinfty21 + 4\, \alpha21\, tinfty14^2 - 4\, \alpha21\, tinfty14\, tinfty24 + 4\, \alpha22\, tinfty13\, tinfty14 - 4\, \alpha22\, tinfty13\, tinfty24 + 4\, \alpha23\, tinfty12\, tinfty14 - 4\, \alpha23\, tinfty12\, tinfty24 + \alpha24\, tinfty11\, tinfty24 + 5\, \alpha24\, tinfty12\, tinfty23 + 5\, \alpha24\, tinfty13\, tinfty22 + \alpha24\, tinfty14\, tinfty21 + 4\, c1\, tinfty14^2 - 4\, c1\, tinfty24^2 + 8\, c2\, tinfty13\, tinfty14 - 8\, c2\, tinfty13\, tinfty24 + 8\, c2\, tinfty14\, tinfty23 - 8\, c2\, tinfty23\, tinfty24 + 12\, c3\, tinfty12\, tinfty14 - 12\, c3\, tinfty12\, tinfty24 + 12\, c3\, tinfty14\, tinfty22 - 12\, c3\, tinfty22\, tinfty24 \big) \Big)$$

$$Equation7 := -\frac{1}{tinfty14 - tinfty24} \Big(h \big(-3\, \nu\, tinfty11\, tinfty14\, tinfty24 + 3\, \nu\, tinfty11\, tinfty24^2 - 3\, \nu\, tinfty12\, tinfty14\, tinfty23 + 3\, \nu\, tinfty12\, tinfty23\, tinfty24 - 3\, \nu\, tinfty13\, tinfty14\, tinfty22 + 3\, \nu\, tinfty13\, tinfty22\, tinfty24 - 3\, \nu\, tinfty14^2\, tinfty21 + 3\, \nu\, tinfty14\, tinfty21\, tinfty24 - 2\, \nu1\, tinfty12\, tinfty14\, tinfty24 + 2\, \nu1\, tinfty12\, tinfty24^2 - 2\, \nu1\, tinfty13\, tinfty14\, tinfty23 + 2\, \nu1\, tinfty13\, tinfty23\, tinfty24 - 2\, \nu1\, tinfty14^2\, tinfty22 + 2\, \nu1\, tinfty14\, tinfty22\, tinfty24 - \nu2\, tinfty13\, tinfty14\, tinfty24 + \nu2\, tinfty13\, tinfty24^2 - \nu2\, tinfty14^2\, tinfty23 + \nu2\, tinfty14\, tinfty23\, tinfty24 + \alpha11\, tinfty14\, tinfty23 - \alpha11\, tinfty23\, tinfty24 + \alpha12\, tinfty14\, tinfty22 - \alpha12\, tinfty22\, tinfty24 + \alpha13\, tinfty14\, tinfty21 - \alpha13\, tinfty21\, tinfty24 - \alpha14\, tinfty11\, tinfty23 - \alpha14\, tinfty12\, tinfty22 - \alpha14\, tinfty13\, tinfty21 + \alpha21\, tinfty13\, tinfty14 - \alpha21\, tinfty13\, tinfty24 + \alpha22\, tinfty12\, tinfty14 - \alpha22\, tinfty12\, tinfty24 + \alpha23\, tinfty11\, tinfty14 - \alpha23\, tinfty11\, tinfty24 + \alpha24\, tinfty11\, tinfty23 + \alpha24\, tinfty12\, tinfty22 + \alpha24\, tinfty13\, tinfty21 + c1\, tinfty13\, tinfty14 - c1\, tinfty13\, tinfty24 + c1\, tinfty14\, tinfty23 - c1\, tinfty23\, tinfty24 + 2\, c2\, tinfty12\, tinfty14 - 2\, c2\, tinfty12\, tinfty24 + 2\, c2\, tinfty14\, tinfty22 - 2\, c2\, tinfty22\, tinfty24 + 3\, c3\, tinfty11\, tinfty14 - 3\, c3\, tinfty11\, tinfty24 + 3\, c3\, tinfty14\, tinfty21 - 3\, c3\, tinfty21\, tinfty24 \big) \Big)$$

```
> Lp1Function:=unapply(-Entry21TermLambdaMinusq1/h,C0,C1):
  Lp2Function:=unapply(-Entry21TermLambdaMinusq2/h,C0,C1):
```

```
> Equation8:=simplify(Entry21TermLambdaMinusq1Square-(-p1*h*Lq1))
  :
  Equation9:=simplify(Entry21TermLambdaMinusq2Square-(-p2*h*Lq2))
  :
```

```
> C0:= -(q1^6*q2*tinfty14*tinfty24-q1*q2^6*tinfty14*tinfty24+
q1^5*q2*tinfty13*tinfty24+q1^5*q2*tinfty14*tinfty23-q1*q2^5*
tinfty13*tinfty24-q1*q2^5*tinfty14*tinfty23+q1^4*q2*tinfty12*
tinfty24+q1^4*q2*tinfty13*tinfty23+q1^4*q2*tinfty14*tinfty22-
q1*q2^4*tinfty12*tinfty24-q1*q2^4*tinfty13*tinfty23-q1*q2^4*
tinfty14*tinfty22+p1*q1^3*q2*tinfty14+p1*q1^3*q2*tinfty24-p2*
q1*q2^3*tinfty14-p2*q1*q2^3*tinfty24+q1^3*q2*tinfty11*tinfty24+
q1^3*q2*tinfty12*tinfty23+q1^3*q2*tinfty13*tinfty22+q1^3*q2*
tinfty14*tinfty21-q1*q2^3*tinfty11*tinfty24-q1*q2^3*tinfty12*
tinfty23-q1*q2^3*tinfty13*tinfty22-q1*q2^3*tinfty14*tinfty21+h*
q1^2*q2*tinfty14-h*q1*q2^2*tinfty14+p1*q1^2*q2*tinfty13+p1*
q1^2*q2*tinfty23-p2*q1*q2^2*tinfty13-p2*q1*q2^2*tinfty23-q1^2*
q2*tinfty10*tinfty14+q1^2*q2*tinfty10*tinfty24+q1^2*q2*
tinfty11*tinfty23+q1^2*q2*tinfty12*tinfty22+q1^2*q2*tinfty13*
tinfty21+q1*q2^2*tinfty10*tinfty14-q1*q2^2*tinfty10*tinfty24-
q1*q2^2*tinfty11*tinfty23-q1*q2^2*tinfty12*tinfty22-q1*q2^2*
tinfty13*tinfty21+p1*q1*q2*tinfty12+p1*q1*q2*tinfty22-p2*q1*q2*
tinfty12-p2*q1*q2*tinfty22+p1^2*q2+p1*q2*tinfty11+p1*q2*
tinfty21-p2^2*q1-p2*q1*tinfty11-p2*q1*tinfty21+h*p1-h*p2)/(q1-
q2):
C1:=(q1^6*tinfty14*tinfty24-q2^6*tinfty14*tinfty24+q1^5*
tinfty13*tinfty24+q1^5*tinfty14*tinfty23-q2^5*tinfty13*tinfty24
-q2^5*tinfty14*tinfty23+q1^4*tinfty12*tinfty24+q1^4*tinfty13*
tinfty23+q1^4*tinfty14*tinfty22-q2^4*tinfty12*tinfty24-q2^4*
tinfty13*tinfty23-q2^4*tinfty14*tinfty22+p1*q1^3*tinfty14+p1*
q1^3*tinfty24-p2*q2^3*tinfty14-p2*q2^3*tinfty24+q1^3*tinfty11*
tinfty24+q1^3*tinfty12*tinfty23+q1^3*tinfty13*tinfty22+q1^3*
tinfty14*tinfty21-q2^3*tinfty11*tinfty24-q2^3*tinfty12*tinfty23
-q2^3*tinfty13*tinfty22-q2^3*tinfty14*tinfty21+h*q1^2*tinfty14-
h*q2^2*tinfty14+p1*q1^2*tinfty13+p1*q1^2*tinfty23-p2*q2^2*
tinfty13-p2*q2^2*tinfty23-q1^2*tinfty10*tinfty14+q1^2*tinfty10*
tinfty24+q1^2*tinfty11*tinfty23+q1^2*tinfty12*tinfty22+q1^2*
tinfty13*tinfty21+q2^2*tinfty10*tinfty14-q2^2*tinfty10*tinfty24
-q2^2*tinfty11*tinfty23-q2^2*tinfty12*tinfty22-q2^2*tinfty13*
tinfty21+p1*q1*tinfty12+p1*q1*tinfty22-p2*q2*tinfty12-p2*q2*
tinfty22+p1^2+p1*tinfty11+p1*tinfty21-p2^2-p2*tinfty11-p2*
tinfty21)/(q1-q2):
simplify(Equation8);
simplify(Equation9);

C0bis:=( q1*(p2^2-P1(q2)*p2)-q2*(p1^2-p1*P1(q1)))/(q1-q2)
-(q2*(P2(q1)-Pinfty02)-q1*(P2(q2)-Pinfty02))/(q1-q2)
```

```
-h*(p1-p2)/(q1-q2)-h*tinfty14*q1*q2:

C0ter:=( q1*(p2^2-P1(q2)*p2)-q2*(p1^2-p1*P1(q1)))/(q1-q2)
+P2(q1)+P2(q2)
-(q1*P2(q1)-q2*P2(q2))/(q1-q2)-Pinfty02
-h*(p1-p2)/(q1-q2)-h*tinfty14*q1*q2:
factor(C0-C0bis);
factor(C0-C0ter);

C1bis:=(p1^2-p1*P1(q1)+P2(q1) - (p2^2 -p2*P1(q2) +P2(q2)))/(q1-
q2) -Pinfty12+(q1+q2)*tinfty14*h:
factor(series(C1-C1bis,p1=0));
```

$$0 \qquad (1.9)$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$

```
> mu1:=simplify(mu1);
  mu2:=simplify(mu2);
```

$$\mu 1 := \frac{-\nu 1\, q2 + \nu 2}{q1 - q2} \qquad (1.10)$$
$$\mu 2 := \frac{\nu 1\, q1 - \nu 2}{q1 - q2}$$

```
> Lp1:=factor(simplify(Lp1Function(C0bis,C1bis))):
  Lp2:=factor(simplify(Lp2Function(C0bis,C1bis))):
  Lp1bis:=mu1*(p1^2-p1*P1(q1)-p2^2 +p2*P1(q2))/(q1-q2) +mu1*diff
  (P1(q1),q1)*p1
  +q1^3*(tinfty24*alpha14-tinfty14*alpha24)*h/(tinfty14-tinfty24)
   +1/4*p1*h/(tinfty14-tinfty24)*(alpha14-alpha24)
  +h*(3*c3*q1^2+2*c2*q1+c1 - nu1*(p1-p2)/(q1-q2)^2 +tinfty14*
  (nu1*q2-nu2))
  -mu1*(q1-q2)*diff((P2(q1)-P2(q2))/(q1-q2),q1):

  Lp2bis:=mu2*(p1^2-p1*P1(q1)-p2^2 +p2*P1(q2))/(q1-q2) + mu2*diff
  (P1(q2),q2)*p2
  +q2^3*(tinfty24*alpha14-tinfty14*alpha24)*h/(tinfty14-tinfty24)
   +1/4*p2*h/(tinfty14-tinfty24)*(alpha14-alpha24)
  +h*(3*c3*q2^2+2*c2*q2+c1 + nu1*(p1-p2)/(q1-q2)^2 +tinfty14*
  (nu1*q1-nu2))
  +mu2*(q1-q2)*diff((P2(q1)-P2(q2))/(q1-q2),q2):

  factor(Lp1-Lp1bis);
  factor(Lp2-Lp2bis);
```

```
Lp1ter:=h*(mu2+mu1)*(p2-p1)/(q2-q1)^2+ mu1*(diff(P1(q1),q1)*p1-
diff(tdP2(q1),q1)+C1bis-2*h*tinfty14*q1)
+h*nuinftyMinus1*p1+h*(4*c4*q1^3+3*c3*q1^2+2*c2*q1+c1):

Lp2ter:=h*(mu1+mu2)*(p1-p2)/(q1-q2)^2+ mu2*(diff(P1(q2),q2)*p2-
diff(tdP2(q2),q2)+C1bis-2*h*tinfty14*q2)
+h*nuinftyMinus1*p2+h*(4*c4*q2^3+3*c3*q2^2+2*c2*q2+c1):

factor(Lp1-Lp1ter);
factor(Lp2-Lp2ter);

Lq1ter:=2*mu1*(p1-P1(q1)/2)-nu*h-nu1*h/(q1-q2)-h*(alpha14-
alpha24)/4/(tinfty14-tinfty24)*q1:
Lq2ter:=2*mu2*(p2-P1(q2)/2)-nu*h+nu1*h/(q1-q2)-h*(alpha14-
alpha24)/4/(tinfty14-tinfty24)*q2:
simplify(Lq1-Lq1ter);
simplify(Lq2-Lq2ter);

Hamiltonian:=-h*(mu1+mu2)*(p1-p2)/(q1-q2) -h*nu*(p1+p2)-h*
nuinftyMinus1*(q1*p1+q2*p2)
+mu1*(p1^2-P1(q1)*p1+tdP2(q1)+h*tinfty14*q1^2)
+mu2*(p2^2-P1(q2)*p2+tdP2(q2)+h*tinfty14*q2^2)
-h*(c4*q1^4+c3*q1^3+c2*q1^2+c1*q1)-h*(c4*q2^4+c3*q2^3+c2*q2^2+
c1*q2):

factor(simplify(Lp1-(-diff(Hamiltonian,q1))));
simplify(Lq1-(diff(Hamiltonian,p1)));
factor(simplify(Lp2-(-diff(Hamiltonian,q2))));
simplify(Lq2-(diff(Hamiltonian,p2)));
```

$$0 \tag{1.11}$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$

We have obtained the evolution equations for the Darboux coordinates:

L[q1]=2*mu1*(p1-P1(q1)/2)-nu*h-nu1*h/(q1-q2)-h*(alpha14-alpha24)/4/(tinfty14-tinfty24)*q1
L[q2]=2*mu2*(p2-P1(q2)/2)-nu*h+nu1*h/(q1-q2)-h*(alpha14-alpha24)/4/(tinfty14-tinfty24)*q2

L[p1] = mu1*(p1^2-p1*P1(q1)-p2^2 +p2*P1(q2))/(q1-q2) +mu1*diff(P1(q1),q1)*p1
-mu1*(q1-q2)*diff((P2(q1)-P2(q2))/(q1-q2),q1)
+q1^3*(tinfty24*alpha14-tinfty14*alpha24)*h/(tinfty14-tinfty24) +1/4*p1*h/(tinfty14-tinfty24)*(alpha14-alpha24)
+h*(3*c3*q1^2+2*c2*q1+c1 - nu1*(p1-p2)/(q1-q2)^2 +tinfty14*(nu1*q2-nu2))

L[p2]=mu2*(p1^2-p1*P1(q1)-p2^2 +p2*P1(q2))/(q1-q2) + mu2*diff(P1(q2),q2)*p2
+mu2*(q1-q2)*diff((P2(q1)-P2(q2))/(q1-q2),q2)
+q2^3*(tinfty24*alpha14-tinfty14*alpha24)*h/(tinfty14-tinfty24) +1/4*p2*h/(tinfty14-tinfty24)*(alpha14-alpha24)
+h*(3*c3*q2^2+2*c2*q2+c1 + nu1*(p1-p2)/(q1-q2)^2 +tinfty14*(nu1*q1-nu2))

```
> Equation1Function:=unapply(Equation1,nu,c1,c2,c3,nu1,nu2):
  Equation2Function:=unapply(Equation2,nu,c1,c2,c3,nu1,nu2):
  Equation3Function:=unapply(Equation3,nu,c1,c2,c3,nu1,nu2):
  Equation4Function:=unapply(Equation4,nu,c1,c2,c3,nu1,nu2):
  Equation5Function:=unapply(Equation5,nu,c1,c2,c3,nu1,nu2):
  Equation6Function:=unapply(Equation6,nu,c1,c2,c3,nu1,nu2):
  Equation7Function:=unapply(Equation7,nu,c1,c2,c3,nu1,nu2):
  simplify(Equation1Function(nubis,c1bis,c2bis,c3bis,nu1bis,
  nu2bis));
  simplify(Equation2Function(nubis,c1bis,c2bis,c3bis,nu1bis,
  nu2bis));
  simplify(Equation3Function(nubis,c1bis,c2bis,c3bis,nu1bis,
  nu2bis));
  simplify(Equation4Function(nubis,c1bis,c2bis,c3bis,nu1bis,
  nu2bis));
  simplify(Equation5Function(nubis,c1bis,c2bis,c3bis,nu1bis,
  nu2bis));
  simplify(Equation6Function(nubis,c1bis,c2bis,c3bis,nu1bis,
  nu2bis));
  simplify(Equation7Function(nubis,c1bis,c2bis,c3bis,nu1bis,
  nu2bis));
```

$$\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \tag{1.12}$$

Computation of the Lax matrix \td{L} in the geometric gauge without apparent singularities

Symplectic reduction

```
> tinfty14:=1;
```

```
tinfty24:=-1;
tinfty13:=0;
tinfty23:=0;
alpha14:=0:
alpha24:=0:
alpha13:=0:
alpha23:=0:
alpha22:=-alpha12:
alpha21:=-alpha11:
tinfty12:=1/2*tau2;
tinfty22:=-tinfty12;
tinfty11:=1/2*tau1;
tinfty21:=-tinfty11;
tinfty20:=-tinfty10;
```

$$tinfty14 := 1 \quad \textbf{(2.1)}$$
$$tinfty24 := -1$$
$$tinfty13 := 0$$
$$tinfty23 := 0$$
$$tinfty12 := \frac{1}{2}\,\tau 2$$
$$tinfty22 := -\frac{1}{2}\,\tau 2$$
$$tinfty11 := \frac{1}{2}\,\tau 1$$
$$tinfty21 := -\frac{1}{2}\,\tau 1$$
$$tinfty20 := -tinfty10$$

```
> C0ter:=simplify(C0ter);
  C1bis:=simplify(C1bis);
  Cinfty0ter:=-(p1^2-p2^2)*q1/(q1-q2) -h*(p1-p2)/(q1-q2)+p1^2 +(
  (q1^5-q2^5)/(q1-q2)+1/4*tau2^2+ (q1^3-q2^3)/(q1-q2)*tau2+(q1^2-
  q2^2)/(q1-q2)*tau1+ 2*tinfty10-h)*q1*q2;
  Cinfty1bis:=(p1^2-p2^2)/(q1-q2)-( (q1^2+q2^2+1/2*tau2)^2-q1^2*
  q2^2 +(2*tinfty10-h))*(q1+q2)-(q1^2+q1*q2+q2^2)*tau1;
  simplify(C0ter-Cinfty0ter);
  simplify(C1bis-Cinfty1bis);
  nu:=simplify(nubis);
  nu1:=simplify(nu1bis);
  nu2:=simplify(nu2bis);
  nuinftyMinus1:=simplify(nuinftyMinus1);
  nuinfty0:=simplify(nuinfty0);
  nuinfty1:=simplify(nuinfty1);
  nuinfty2:=simplify(nuinfty2);
  mu1:=simplify(mu1);
```

```
mu2:=simplify(mu2);
c4:=simplify(c4bis);
c3:=simplify(c3bis);
c2:=simplify(c2bis);
c1:=simplify(c1bis);
```

$$C0ter := \frac{1}{4\,q1 - 4\,q2}\Big(4\,q1^6\,q2 + 4\,\tau 2\,q1^4\,q2 + 4\,\tau 1\,q1^3\,q2 - 4\Big(-\frac{1}{4}\,\tau 2^2 + h - 2\,tinfty10\Big)\,q2\,q1^2 + \big(-4\,q2^6 - 4\,\tau 2\,q2^4 - 4\,\tau 1\,q2^3 + \big(-\tau 2^2 + 4\,h - 8\,tinfty10\big)\,q2^2 + 4\,p2^2\big)\,q1 - 4\,p1^2\,q2 - 4\,h\,(p1 - p2)\Big) \qquad (2.2)$$

$$C1bis := \frac{1}{4\,q1 - 4\,q2}\big(-4\,q1^6 - 4\,\tau 2\,q1^4 - 4\,\tau 1\,q1^3 + \big(-\tau 2^2 + 4\,h - 8\,tinfty10\big)\,q1^2 + 4\,q2^6 + 4\,\tau 2\,q2^4 + 4\,\tau 1\,q2^3 + \big(\tau 2^2 - 4\,h + 8\,tinfty10\big)\,q2^2 + 4\,p1^2 - 4\,p2^2\big)$$

$$Cinfty0ter := -\frac{\big(p1^2 - p2^2\big)\,q1}{q1 - q2} - \frac{h\,(p1 - p2)}{q1 - q2} + p1^2 + \Big(\frac{q1^5 - q2^5}{q1 - q2} + \frac{1}{4}\,\tau 2^2 + \frac{\big(q1^3 - q2^3\big)\,\tau 2}{q1 - q2} + \frac{\big(q1^2 - q2^2\big)\,\tau 1}{q1 - q2} + 2\,tinfty10 - h\Big)\,q1\,q2$$

$$Cinfty1bis := \frac{p1^2 - p2^2}{q1 - q2} - \Big(\Big(q1^2 + q2^2 + \frac{1}{2}\,\tau 2\Big)^2 - q1^2\,q2^2 + 2\,tinfty10 - h\Big)\,(q1 + q2) - \big(q1^2 + q1\,q2 + q2^2\big)\,\tau 1$$

$$0$$

$$0$$

$$\nu := 0$$

$$\nu 1 := \frac{1}{2}\,\alpha 12$$

$$\nu 2 := \alpha 11$$

$$nuinftyMinus1 := 0$$

$$nuinfty0 := 0$$

$$nuinfty1 := \frac{1}{2}\,\alpha 12$$

$$nuinfty2 := \alpha 11$$

$$\mu 1 := \frac{-\alpha 12\,q2 + 2\,\alpha 11}{2\,q1 - 2\,q2}$$

$$\mu 2 := \frac{\alpha 12\,q1 - 2\,\alpha 11}{2\,q1 - 2\,q2}$$

$$c4 := 0$$

$$c3 := 0$$

$$c2 := 0$$

$$c1 := 0$$

Matrix \td{L}

```
> G1:=Matrix(2,2,0):
  G1[1,1]:=1:
  G1[2,2]:=1:
```

```
G1[1,2]:=0:
G1[2,1]:=tinfty14*lambda+eta0:
eta0:=tinfty14*(q1+q2)+tinfty13;
G1;

dG1dlambda:=Matrix(2,2,0):
for i from 1 to 2 do for j from 1 to 2 do dG1dlambda[i,j]:=
diff(G1[i,j],lambda): od: od:

tdL:=simplify(Multiply(Multiply(G1,checkL),G1^(-1))+h*
Multiply(dG1dlambda,G1^(-1))):
```

$$\eta 0 := q1 + q2 \tag{2.1.1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \eta 0 + \lambda & 1 \end{bmatrix}$$

```
> series(tdL[1,1],lambda=infinity):
  series(tdL[1,2],lambda=infinity):
  simplify(tdL[2,2]+tdL[1,1]);
  series(tdL[2,1],lambda=infinity):
```

$$0 \tag{2.1.2}$$

```
> tdL11bis:=-lambda^3+( (p1-p2)/(q1-q2)+ (q1^2+q1*q2+q2^2))*
  lambda +(p2*q1-p1*q2)/(q1-q2)- q1*q2*(q1+q2);
  simplify(tdL[1,1]-tdL11bis);
  factor(tdL[1,2]);

  tdL21bis:= (tau2 +2*(p1-p2)/(q1-q2)+2*(q1^2+q1*q2+q2^2))*
  lambda^2
  +((q1+q2)*tau2 +tau1+2*(p1*q1-p2*q2)/(q1-q2)+2*(q1+q2)*(q1^2+
  q2^2))*lambda
  +(q1+q2)*tau1 +1/4*tau2^2 +(q1^2+q1*q2+q2^2)*tau2-(p1-p2)^2/
  (q1-q2)^2
  -2*(q2*p1-q1*p2)*(q1+q2)/(q1-q2)+q1^4+q2^4-q1^2*q2^2+2*
  (tinfty10)
  ;
  simplify(tdL[2,1]-tdL21bis);
```

$$tdL11bis := -\lambda^3 + \left(\frac{p1 - p2}{q1 - q2} + q1^2 + q1\, q2 + q2^2\right)\lambda + \frac{-p1\, q2 + p2\, q1}{q1 - q2} - q1\, q2\, (q1 + q2) \tag{2.1.3}$$

$$0$$

$$(\lambda - q1)\,(\lambda - q2)$$

$$tdL21bis := \left(\tau 2 + \frac{2\,(p1 - p2)}{q1 - q2} + 2\, q1^2 + 2\, q1\, q2 + 2\, q2^2\right)\lambda^2 + \Big((q1 + q2)\, \tau 2 + \tau 1$$

$$+\frac{2\,(p1\,q1-p2\,q2)}{q1-q2}+2\,(q1+q2)\,\left(q1^2+q2^2\right)\Big)\,\lambda+(q1+q2)\,\tau1+\frac{1}{4}\,\tau2^2$$
$$+\left(q1^2+q1\,q2+q2^2\right)\,\tau2-\frac{(p1-p2)^2}{(q1-q2)^2}-\frac{2\,(p1\,q2-p2\,q1)\,(q1+q2)}{q1-q2}+q1^4$$
$$+q2^4-q1^2\,q2^2+2\,tinfty10$$

0

```
> tdL21bisOrderLambda2:=-residue(tdL[2,1]/lambda^3,lambda=
  infinity):
  tdL21bisOrderLambda2aux:=(tau2 -2*(p1-p2)/(q1-q2)+2*(q1^2+q1*
  q2+q2^2)):
  tdL21bisOrderLambda1:=-residue(tdL[2,1]/lambda^2,lambda=
  infinity):
  tdL21bisOrderLambda1aux:=(q1+q2)*tau2 +tau1- 2*(p1*q1-p2*q2)/
  (q1-q2)+2*(q1+q2)*(q1^2+q2^2):
  tdL21bisOrderLambda0:=-residue(tdL[2,1]/lambda,lambda=
  infinity):
  tdL21bisOrderLambda0aux:=(q1+q2)*tau1 +1/4*tau2^2 +(q1^2+q1*
  q2+q2^2)*tau2-(p1-p2)^2/(q1-q2)^2
  +2*(q2*p1-q1*p2)*(q1+q2)/(q1-q2)+q1^4+q2^4-q1^2*q2^2+2*
  (tinfty10-h):
  factor(series(tdL21bisOrderLambda0-tdL21bisOrderLambda0aux,
  p1)):
  simplify(tdL[2,1]-tdL21bis);
```

0 **(2.1.4)**

Computation of the auxiliary matrices \td{A}_1 and \td{A}_2

After symplectic reduction, there are two independent non-trivial direction corresponding to either \partial_{\tau_1} or \partial_{\tau_2}. This gives rise to two auxiliary matrices \td{A}_1 and \td{A}_2.
Warning: Compiling both cases create interferences. Skip the subsection relatively to tau_1 if you want the deformation relatively to tau_2

Study of the deformation relatively to \tau_1

```
> alpha12:=0:
  alpha22:=0:
  alpha11:=1/2:
  alpha21:=-1/2:
  nu:=nubis;
  nu1:=nu1bis;
  nu2:=nu2bis;
  nuinftyMinus1:=nuinftyMinus1;
  nuinfty0:=nuinfty0;
  nuinfty1:=nuinfty1;
```

```
nuinfty2:=simplify(nuinfty2);
mu1:=mu1;
mu2:=mu2;
c0:=0:
c1:=c1;
c2:=c2;
c3:=c3;
c4:=c4;
tdL:=simplify(tdL);

Lq1final:=Lq1ter;
Lq2final:=Lq2ter;
Lp1final:=simplify(Lp1bis);
Lp2final:=simplify(Lp2bis);
Hamiltonian:=simplify(Hamiltonian);

dq1dtau1:=Lq1final/h:
dq2dtau1:=Lq2final/h:
dp1dtau1:=Lp1final/h:
dp2dtau1:=Lp2final/h:

dG1dtau1:=Matrix(2,2,0):
for i from 1 to 2 do for j from 1 to 2 do dG1dtau1[i,j]:=
simplify( diff(G1[i,j],tau1)+diff(G1[i,j],q1)*dq1dtau1+diff
(G1[i,j],p1)*dp1dtau1+diff(G1[i,j],q2)*dq2dtau1+diff(G1[i,j],
p2)*dp2dtau1): od: od:


tdA1:=simplify(Multiply(Multiply(G1,checkA),G1^(-1))+h*
Multiply(dG1dtau1,G1^(-1)));
```

$$\nu := 0 \tag{3.1.1}$$

$$\nu 1 := 0$$

$$\nu 2 := \frac{1}{2}$$

$$nuinftyMinus1 := 0$$

$$nuinfty0 := 0$$

$$nuinfty1 := 0$$

$$nuinfty2 := \frac{1}{2}$$

$$\mu 1 := \frac{1}{2\, q1 - 2\, q2}$$

$$\mu 2 := -\frac{1}{2\, q1 - 2\, q2}$$

$$c1 := 0$$

$$c2 := 0$$
$$c3 := 0$$
$$c4 := 0$$

$$\left[\left[\frac{(-q1+q2)\,\lambda^3+\left(q1^3-q2^3+p1-p2\right)\lambda-q1^3\,q2+\left(q2^3+p2\right)q1-p1\,q2}{q1-q2}, (-\lambda+q1)\,(-\lambda+q2)\right],\right.$$

$$\left[\frac{1}{4}\,\frac{1}{(q1-q2)^2}\left(4\,q1^6+(-8\,q2+8\,\lambda)\,q1^5+\left(8\,\lambda^2-8\,\lambda\,q2+4\,\tau 2\right)q1^4+\left(8\,q2^3+\left(-8\,\lambda^2-4\,\tau 2\right)q2+4\,\tau 2\,\lambda+8\,p2+4\,\tau 1\right)q1^3+\left((-4\,\lambda\,\tau 2-8\,p1-4\,\tau 1)\,q2+4\,\tau 2\,\lambda^2+(8\,p1+4\,\tau 1)\,\lambda+\tau 2^2+8\,\mathit{tinfty10}\right)q1^2+\left(-8\,q2^5-8\,\lambda\,q2^4+\left(-8\,\lambda^2-4\,\tau 2\right)q2^3+(-4\,\lambda\,\tau 2-8\,p2-4\,\tau 1)\,q2^2+\left(-8\,\tau 2\,\lambda^2+(-8\,p1-8\,p2-8\,\tau 1)\,\lambda-2\,\tau 2^2-16\,\mathit{tinfty10}\right)q2+8\,(p1-p2)\,\lambda^2\right)q1+4\,q2^6+8\,\lambda\,q2^5+\left(8\,\lambda^2+4\,\tau 2\right)q2^4+(4\,\lambda\,\tau 2+8\,p1+4\,\tau 1)\,q2^3+\left(4\,\tau 2\,\lambda^2+(8\,p2+4\,\tau 1)\,\lambda+\tau 2^2+8\,\mathit{tinfty10}\right)q2^2-8\,\lambda^2\,(p1-p2)\,q2-4\,(p1-p2)^2\right),\right.$$

$$\left.\left.\frac{(q1-q2)\,\lambda^3+\left(-q1^3+q2^3-p1+p2\right)\lambda+q1^3\,q2+\left(-q2^3-p2\right)q1+p1\,q2}{q1-q2}\right]\right]$$

$$\mathit{Lq1final} := \frac{p1}{q1-q2}$$

$$\mathit{Lq2final} := -\frac{p2}{q1-q2}$$

$$\mathit{Lp1final} := \frac{1}{8}\,\frac{1}{(q1-q2)^2}\left(20\,q1^6-24\,q1^5\,q2+12\,\tau 2\,q1^4+(-16\,q2\,\tau 2+8\,\tau 1)\,q1^3+\left(-12\,q2\,\tau 1+\tau 2^2-4\,h+8\,\mathit{tinfty10}\right)q1^2+8\,q2\left(-\frac{1}{4}\,\tau 2^2+h-2\,\mathit{tinfty10}\right)q1+4\,q2^6+4\,\tau 2\,q2^4+4\,\tau 1\,q2^3+\left(\tau 2^2-4\,h+8\,\mathit{tinfty10}\right)q2^2+4\,p1^2-4\,p2^2\right)$$

$$\mathit{Lp2final} := \frac{1}{8}\,\frac{1}{(q1-q2)^2}\left(4\,q1^6+4\,\tau 2\,q1^4+4\,\tau 1\,q1^3+\left(\tau 2^2-4\,h+8\,\mathit{tinfty10}\right)q1^2+8\,q2\left(-3\,q2^4-2\,q2^2\,\tau 2-\frac{3}{2}\,q2\,\tau 1-\frac{1}{4}\,\tau 2^2+h-2\,\mathit{tinfty10}\right)q1+20\,q2^6+12\,\tau 2\,q2^4+8\,\tau 1\,q2^3+\left(\tau 2^2-4\,h+8\,\mathit{tinfty10}\right)q2^2-4\,p1^2+4\,p2^2\right)$$

$$\mathit{Hamiltonian} := \frac{1}{8\,q1-8\,q2}\left(-4\,q1^6-4\,\tau 2\,q1^4-4\,\tau 1\,q1^3+\left(-\tau 2^2+4\,h\right.\right.$$

$-8\,tinfty10)\,q1^2 + 4\,q2^6 + 4\,\tau2\,q2^4 + 4\,\tau1\,q2^3 + (\tau2^2 - 4\,h + 8\,tinfty10)\,q2^2 + 4\,p1^2 - 4\,p2^2)$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\,q1 - \frac{1}{2}\,q2 - \frac{1}{2}\,\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{\tau2\,(q1-q2) + 2\,q1^3 - 2\,q2^3 + 2\,p1 - 2\,p2}{2\,q1 - 2\,q2} & \frac{1}{2}\,q1 + \frac{1}{2}\,q2 + \frac{1}{2}\,\lambda \end{bmatrix}$$

```
> simplify(Hamiltonian-1/2*C1);
  factor(simplify(Lp1-(-diff(Hamiltonian,q1))));
  simplify(Lq1-(diff(Hamiltonian,p1)));
  factor(simplify(Lp2-(-diff(Hamiltonian,q2))));
  simplify(Lq2-(diff(Hamiltonian,p2)));

  hdq1dtau1theo:= p1/(q1-q2);
  hdq2dtau1theo:= -p2/(q1-q2);

  hdp1dtau1theo:=1/(8*(q1-q2)^2)*(20*q1^6-24*q1^5*q2+12*tau2*
  q1^4+(-16*q2*tau2+8*tau1)*q1^3+(-12*q2*tau1+tau2^2-4*h+8*
  tinfty10)*q1^2+8*q2*(-(1/4)*tau2^2+h-2*tinfty10)*q1+4*q2^6+4*
  tau2*q2^4+4*tau1*q2^3+(tau2^2-4*h+8*tinfty10)*q2^2+4*p1^2-4*
  p2^2);

  hdp2dtau1theo:=1/(8*(q1-q2)^2)*(4*q1^6+4*tau2*q1^4+4*tau1*
  q1^3+(tau2^2-4*h+8*tinfty10)*q1^2+8*q2*(-3*q2^4-2*q2^2*tau2-
  (3/2*q2)*tau1-(1/4)*tau2^2+h-2*tinfty10)*q1+20*q2^6+12*tau2*
  q2^4+8*tau1*q2^3+(tau2^2-4*h+8*tinfty10)*q2^2-4*p1^2+4*p2^2);

  Ham1theo:=(-4*q1^6+4*q2^6-4*q1^4*tau2+4*q2^4*tau2-4*q1^3*tau1
  -q1^2*tau2^2+4*q2^3*tau1+q2^2*tau2^2+4*h*q1^2-4*h*q2^2-8*
  q1^2*tinfty10+8*q2^2*tinfty10+4*p1^2-4*p2^2)/(8*(q1-q2));

  factor(simplify(Lq1ter-hdq1dtau1theo));
  factor(simplify(Lq2ter-hdq2dtau1theo));
  factor(simplify(Lp1final-hdp1dtau1theo));
  factor(simplify(Lp2final-hdp2dtau1theo));

  factor(simplify(Hamiltonian-Ham1theo));

  simplify(diff(Ham1theo,q1)+hdp1dtau1theo);
  simplify(diff(Ham1theo,q2)+hdp2dtau1theo);
  simplify(diff(Ham1theo,p1)-hdq1dtau1theo);
  simplify(diff(Ham1theo,p2)-hdq2dtau1theo);
```

```
simplify(diff(Hamiltonian,q1)+hdp1dtau1theo);
simplify(diff(Hamiltonian,q2)+hdp2dtau1theo);
simplify(diff(Hamiltonian,p1)-hdq1dtau1theo);
simplify(diff(Hamiltonian,p2)-hdq2dtau1theo);
```

$$0 \tag{3.1.2}$$

$$0$$

$$0$$

$$0$$

$$0$$

$$hdq1dtau1theo := \frac{p1}{q1 - q2}$$

$$hdq2dtau1theo := -\frac{p2}{q1 - q2}$$

$$hdp1dtau1theo := \frac{1}{8}\,\frac{1}{(q1-q2)^2}\Big(20\,q1^6 - 24\,q1^5\,q2 + 12\,\tau2\,q1^4 + (-16\,q2\,\tau2 + 8\,\tau1)\,q1^3 + (-12\,q2\,\tau1 + \tau2^2 - 4\,h + 8\,tinfty10)\,q1^2 + 8\,q2\Big(-\frac{1}{4}\,\tau2^2 + h - 2\,tinfty10\Big)\,q1 + 4\,q2^6 + 4\,\tau2\,q2^4 + 4\,\tau1\,q2^3 + (\tau2^2 - 4\,h + 8\,tinfty10)\,q2^2 + 4\,p1^2 - 4\,p2^2\Big)$$

$$hdp2dtau1theo := \frac{1}{8}\,\frac{1}{(q1-q2)^2}\Big(4\,q1^6 + 4\,\tau2\,q1^4 + 4\,\tau1\,q1^3 + (\tau2^2 - 4\,h + 8\,tinfty10)\,q1^2 + 8\,q2\Big(-3\,q2^4 - 2\,q2^2\,\tau2 - \frac{3}{2}\,q2\,\tau1 - \frac{1}{4}\,\tau2^2 + h - 2\,tinfty10\Big)\,q1 + 20\,q2^6 + 12\,\tau2\,q2^4 + 8\,\tau1\,q2^3 + (\tau2^2 - 4\,h + 8\,tinfty10)\,q2^2 - 4\,p1^2 + 4\,p2^2\Big)$$

$$Ham1theo := \frac{1}{8\,q1 - 8\,q2}\big(-4\,q1^6 + 4\,q2^6 - 4\,q1^4\,\tau2 + 4\,q2^4\,\tau2 - 4\,q1^3\,\tau1 - q1^2\,\tau2^2 + 4\,q2^3\,\tau1 + q2^2\,\tau2^2 + 4\,h\,q1^2 - 4\,h\,q2^2 - 8\,q1^2\,tinfty10 + 8\,q2^2\,tinfty10 + 4\,p1^2 - 4\,p2^2\big)$$

$$0$$

$$0$$

$$0$$

$$0$$

$$0$$

$$0$$

$$0$$

$$0$$

$$0$$

$$0$$

$$0$$

$$0$$

$$0$$

Study of the deformation relatively to \tau_2

```
> alpha12:=1/2:
  alpha22:=-1/2:
  alpha11:=0:
  alpha21:=0:
  nu:=nubis;
  nu1:=nu1bis;
  nu2:=nu2bis;
  nuinftyMinus1:=nuinftyMinus1;
  nuinfty0:=nuinfty0;
  nuinfty1:=nuinfty1;
  nuinfty2:=simplify(nuinfty2);
  mu1:=mu1;
  mu2:=mu2;
  c0:=0:
  c1:=c1;
  c2:=c2;
  c3:=c3;
  c4:=c4;
  Lq1final:=Lq1ter;
  Lq2final:=Lq2ter;
  Lp1final:=simplify(Lp1bis);
  Lp2final:=simplify(Lp2bis);
  Hamiltonian:=simplify(Hamiltonian);

  dq1dtau2:=Lq1final/h:
  dq2dtau2:=Lq2final/h:
  dp1dtau2:=Lp1final/h:
  dp2dtau2:=Lp2final/h:

  dG1dtau2:=Matrix(2,2,0):
  for i from 1 to 2 do for j from 1 to 2 do dG1dtau2[i,j]:=
  simplify( diff(G1[i,j],tau2)+diff(G1[i,j],q1)*dq1dtau2+diff
  (G1[i,j],p1)*dp1dtau2+diff(G1[i,j],q2)*dq2dtau2+diff(G1[i,j],
  p2)*dp2dtau2): od: od:

  tdL:=simplify(tdL);
  tdA2:=simplify(Multiply(Multiply(G1,checkA),G1^(-1))+h*
  Multiply(dG1dtau2,G1^(-1)));
```

$$\nu := 0 \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

$$\nu 1 := \frac{1}{4}$$

$$\nu 2 := 0$$

$$nuinftyMinus1 := 0$$

$$nuinfty0 := 0$$

$$nuinfty1 := \frac{1}{4}$$

$$nuinfty2 := 0$$

$$\mu 1 := -\frac{1}{2} \frac{q2}{2\, q1 - 2\, q2}$$

$$\mu 2 := \frac{1}{2} \frac{q1}{2\, q1 - 2\, q2}$$

$$c1 := 0$$

$$c2 := 0$$

$$c3 := 0$$

$$c4 := 0$$

$$Lq1final := -\frac{1}{2} \frac{p1\, q2}{q1 - q2} - \frac{1}{4} \frac{h}{q1 - q2}$$

$$Lq2final := \frac{1}{2} \frac{p2\, q1}{q1 - q2} + \frac{1}{4} \frac{h}{q1 - q2}$$

$$Lp1final := \frac{1}{16} \frac{1}{(q1 - q2)^2} \Big(-4\, q2^7 - 4\, \tau 2\, q2^5 - 4\, \tau 1\, q2^4 + \big(-\tau 2^2 + 4\, h - 8\, tinfty10 \big) q2^3 - 8 \Big(-3\, q1^4 - 2\, q1^2\, \tau 2 - \frac{3}{2}\, \tau 1\, q1 - \frac{1}{4}\, \tau 2^2 + h - 2\, tinfty10 \Big) q1\, q2^2 + \big(-20\, q1^6 - 12\, \tau 2\, q1^4 - 8\, \tau 1\, q1^3 + \big(-\tau 2^2 + 4\, h - 8\, tinfty10 \big) q1^2 - 4\, p1^2 + 4\, p2^2 \big) q2 - 4\, h\, (p1 - p2) \Big)$$

$$Lp2final := \frac{1}{16} \frac{1}{(q1 - q2)^2} \Big(-4\, q1^7 - 4\, \tau 2\, q1^5 - 4\, \tau 1\, q1^4 + \big(-\tau 2^2 + 4\, h - 8\, tinfty10 \big) q1^3 - 8 \Big(-3\, q2^4 - 2\, q2^2\, \tau 2 - \frac{3}{2}\, q2\, \tau 1 - \frac{1}{4}\, \tau 2^2 + h - 2\, tinfty10 \Big) q2\, q1^2 + \big(-20\, q2^6 - 12\, \tau 2\, q2^4 - 8\, \tau 1\, q2^3 + \big(-\tau 2^2 + 4\, h - 8\, tinfty10 \big) q2^2 + 4\, p1^2 - 4\, p2^2 \big) q1 + 4\, h\, (p1 - p2) \Big)$$

$$Hamiltonian := \frac{1}{16\, q1 - 16\, q2} \Big(4\, q1^6\, q2 + 4\, \tau 2\, q1^4\, q2 + 4\, \tau 1\, q1^3\, q2 - 4 \Big(-\frac{1}{4}\, \tau 2^2 + h - 2\, tinfty10 \Big) q2\, q1^2 + \big(-4\, q2^6 - 4\, \tau 2\, q2^4 - 4\, \tau 1\, q2^3 + \big(-\tau 2^2 + 4\, h - 8\, tinfty10 \big) q2^2 + 4\, p2^2 \big) q1 - 4\, p1^2\, q2 - 4\, h\, (p1 - p2) \Big)$$

$$\Bigg[\Bigg[\frac{(-q1 + q2)\, \lambda^3 + (q1^3 - q2^3 + p1 - p2)\, \lambda - q1^3\, q2 + (q2^3 + p2)\, q1 - p1\, q2}{q1 - q2}, (-\lambda + q1)\, (-\lambda + q2) \Bigg],$$

$$\Bigg[\frac{1}{4} \frac{1}{(q1 - q2)^2} \Big(4\, q1^6 + (-8\, q2 + 8\, \lambda)\, q1^5 + \big(8\, \lambda^2 - 8\, \lambda\, q2 + 4\, \tau 2 \big) q1^4 + \big(8\, q2^3 + \big(-8\, \lambda^2 - 4\, \tau 2 \big) q2 + 4\, \tau 2\, \lambda + 8\, p2 + 4\, \tau 1 \big) q1^3 + \big(\big(-4\, \lambda\, \tau 2 - 8\, p1$$

$$-4\,\tau 1)\,q2+4\,\tau 2\,\lambda^2+(8\,p1+4\,\tau 1)\,\lambda+\tau 2^2+8\,tinfty10\big)\,q1^2+\big(-8\,q2^5$$
$$-8\,\lambda\,q2^4+\big(-8\,\lambda^2-4\,\tau 2\big)\,q2^3+(-4\,\lambda\,\tau 2-8\,p2-4\,\tau 1)\,q2^2+\big(-8\,\tau 2\,\lambda^2+($$
$$-8\,p1-8\,p2-8\,\tau 1)\,\lambda-2\,\tau 2^2-16\,tinfty10\big)\,q2+8\,(p1-p2)\,\lambda^2\big)\,q1+4\,q2^6$$
$$+8\,\lambda\,q2^5+\big(8\,\lambda^2+4\,\tau 2\big)\,q2^4+(4\,\lambda\,\tau 2+8\,p1+4\,\tau 1)\,q2^3+\big(4\,\tau 2\,\lambda^2+(8\,p2$$
$$+4\,\tau 1)\,\lambda+\tau 2^2+8\,tinfty10\big)\,q2^2-8\,\lambda^2\,(p1-p2)\,q2-4\,(p1-p2)^2\big),$$
$$\frac{(q1-q2)\,\lambda^3+(-q1^3+q2^3-p1+p2)\,\lambda+q1^3\,q2+(-q2^3-p2)\,q1+p1\,q2}{q1-q2}\Big]\Big]$$

$$\Big[\Big[\frac{-q2^3-q1\,q2^2+\big(\lambda^2+q1^2\big)\,q2+q1^3-\lambda^2\,q1+p1-p2}{4\,q1-4\,q2},\ \frac{1}{4}\,\lambda-\frac{1}{4}\,q1-\frac{1}{4}\,q2\Big],$$
$$\Big[\frac{1}{4\,q1-4\,q2}\big(2\,q1^4+2\,\lambda\,q1^3+q1^2\,\tau 2+(\lambda\,\tau 2+2\,p1+\tau 1)\,q1-2\,q2^4$$
$$-2\,\lambda\,q2^3-q2^2\,\tau 2+(-\lambda\,\tau 2-2\,p2-\tau 1)\,q2+2\,(p1-p2)\,\lambda\big),$$
$$\frac{-q1^3-q2\,q1^2+\big(\lambda^2+q2^2\big)\,q1-\lambda^2\,q2+q2^3-p1+p2}{4\,q1-4\,q2}\Big]\Big]$$

```
> series(simplify(series(tdA2[1,1],lambda=infinity)),lambda=
  infinity);
  series(simplify(series(tdA2[1,2],lambda=infinity)),lambda=
  infinity);
  simplify(tdA2[2,2]+tdA2[1,1]);
  series(simplify(series(tdA2[2,1],lambda=infinity)),lambda=
  infinity):
  tdA221bis:=1/2* ((p1-p2)/(q1-q2)+ q1^2+q1*q2+q2^2+1/2*tau2)*
  lambda +1/4*((q1+q2)*tau2+tau1)+1/2*(p1*q1-p2*q2)/(q1-q2)
  +1/2*(q1+q2)*(q1^2+q2^2);
  simplify(series(tdA2[2,1]- tdA221bis,lambda));
```

$$\frac{(-q1+q2)\,\lambda^2}{4\,q1-4\,q2}+\frac{q1^3+q1^2\,q2-q1\,q2^2-q2^3+p1-p2}{4\,q1-4\,q2} \qquad \textbf{(3.2.2)}$$
$$\frac{1}{4}\,\lambda-\frac{1}{4}\,q1-\frac{1}{4}\,q2$$
$$0$$
$$tdA221bis:=\frac{1}{2}\Big(\frac{p1-p2}{q1-q2}+q1^2+q1\,q2+q2^2+\frac{1}{2}\,\tau 2\Big)\,\lambda+\frac{1}{4}\,(q1+q2)\,\tau 2$$
$$+\frac{1}{4}\,\tau 1+\frac{1}{2}\,\frac{p1\,q1-p2\,q2}{q1-q2}+\frac{1}{2}\,(q1+q2)\,\big(q1^2+q2^2\big)$$
$$0$$

```
> factor(simplify(Lp1-(-diff(Hamiltonian,q1))));
  simplify(Lq1-(diff(Hamiltonian,p1)));
  factor(simplify(Lp2-(-diff(Hamiltonian,q2))));
  simplify(Lq2-(diff(Hamiltonian,p2)));

  simplify(Hamiltonian-1/4*C0);

  hdq1dtau2theo := (-2*p1*q2-h)/(4*q1-4*q2):
  hdq2dtau2theo := (2*p2*q1+h)/(4*q1-4*q2):

  hdp1dtau2theo:=1/(16*(q1-q2)^2)*(-4*q2^7-4*tau2*q2^5-4*tau1*
  q2^4+(-tau2^2+4*h-8*tinfty10)*q2^3-(8*(-3*q1^4-2*q1^2*tau2-
  (3/2*tau1)*q1-(1/4)*tau2^2+h-2*tinfty10))*q1*q2^2+(-20*q1^6
  -12*tau2*q1^4-8*tau1*q1^3+(-tau2^2+4*h-8*tinfty10)*q1^2-4*
  p1^2+4*p2^2)*q2-4*h*(p1-p2));

  hdp2dtau2theo:=1/(16*(q1-q2)^2)*(-4*q1^7-4*tau2*q1^5-4*tau1*
  q1^4+(-tau2^2+4*h-8*tinfty10)*q1^3-(8*(-3*q2^4-2*tau2*q2^2-
  (3/2*tau1)*q2-(1/4)*tau2^2+h-2*tinfty10))*q2*q1^2+(-20*q2^6
  -12*tau2*q2^4-8*tau1*q2^3+(-tau2^2+4*h-8*tinfty10)*q2^2+4*
  p1^2-4*p2^2)*q1+4*h*(p1-p2));

  Ham2theo:=-(-4*q1^6*q2+4*q1*q2^6-4*q1^4*q2*tau2+4*q1*q2^4*
  tau2-4*q1^3*q2*tau1-q1^2*q2*tau2^2+4*q1*q2^3*tau1+q1*q2^2*
  tau2^2+4*h*q1^2*q2-4*h*q1*q2^2-8*q1^2*q2*tinfty10+8*q1*q2^2*
  tinfty10+4*p1^2*q2-4*p2^2*q1+4*h*p1-4*h*p2)/(16*(q1-q2));

  factor(simplify(Lq1ter-hdq1dtau2theo));
  factor(simplify(Lq2ter-hdq2dtau2theo));
  factor(simplify(Lp1final-hdp1dtau2theo));
  factor(simplify(Lp2final-hdp2dtau2theo));

  factor(simplify(Hamiltonian-Ham2theo));

  simplify(diff(Ham2theo,q1)+hdp1dtau2theo);
  simplify(diff(Ham2theo,q2)+hdp2dtau2theo);
  simplify(diff(Ham2theo,p1)-hdq1dtau2theo);
  simplify(diff(Ham2theo,p2)-hdq2dtau2theo);

  simplify(diff(Hamiltonian,q1)+hdp1dtau2theo);
  simplify(diff(Hamiltonian,q2)+hdp2dtau2theo);
  simplify(diff(Hamiltonian,p1)-hdq1dtau2theo);
```

```
simplify(diff(Hamiltonian,p2)-hdq2dtau2theo);
```

$$0$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$
$$0 \quad (3.2.3)$$

$$hdp1dtau2theo := \frac{1}{16} \frac{1}{(q1-q2)^2} \Big(-4\,q2^7 - 4\,\tau2\,q2^5 - 4\,\tau1\,q2^4 + \left(-\tau2^2 + 4\,h - 8\,tinfty10\right) q2^3 - 8\left(-3\,q1^4 - 2\,q1^2\,\tau2 - \frac{3}{2}\,\tau1\,q1 - \frac{1}{4}\,\tau2^2 + h - 2\,tinfty10\right) q1\,q2^2 + \left(-20\,q1^6 - 12\,\tau2\,q1^4 - 8\,\tau1\,q1^3 + \left(-\tau2^2 + 4\,h - 8\,tinfty10\right) q1^2 - 4\,p1^2 + 4\,p2^2\right) q2 - 4\,h\,(p1-p2) \Big)$$

$$hdp2dtau2theo := \frac{1}{16} \frac{1}{(q1-q2)^2} \Big(-4\,q1^7 - 4\,\tau2\,q1^5 - 4\,\tau1\,q1^4 + \left(-\tau2^2 + 4\,h - 8\,tinfty10\right) q1^3 - 8\left(-3\,q2^4 - 2\,q2^2\,\tau2 - \frac{3}{2}\,q2\,\tau1 - \frac{1}{4}\,\tau2^2 + h - 2\,tinfty10\right) q2\,q1^2 + \left(-20\,q2^6 - 12\,\tau2\,q2^4 - 8\,\tau1\,q2^3 + \left(-\tau2^2 + 4\,h - 8\,tinfty10\right) q2^2 + 4\,p1^2 - 4\,p2^2\right) q1 + 4\,h\,(p1-p2) \Big)$$

$$Ham2theo := -\frac{1}{16\,q1 - 16\,q2} \Big(-4\,q1^6\,q2 + 4\,q1\,q2^6 - 4\,q1^4\,q2\,\tau2 + 4\,q1\,q2^4\,\tau2 - 4\,q1^3\,q2\,\tau1 - q1^2\,q2\,\tau2^2 + 4\,q1\,q2^3\,\tau1 + q1\,q2^2\,\tau2^2 + 4\,h\,q1^2\,q2 - 4\,h\,q1\,q2^2 - 8\,q1^2\,q2\,tinfty10 + 8\,q1\,q2^2\,tinfty10 + 4\,p1^2\,q2 - 4\,p2^2\,q1 + 4\,h\,p1 - 4\,h\,p2 \Big)$$

$$0$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$