Feuille 2 : Sur les applications

Exercice 2-1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs en n'utilisant que des symboles les assertions suivantes :

1. f s'annule ;
2. f est l'application nulle ;
3. f n'est pas une application constante ;
4. f ne prend jamais deux fois la même valeur ;
5. f s'annule au plus une fois.

Exercice 2-2

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négation.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x = |x|$ ou $x = -|x|)$.
2. $(\forall x \in \mathbb{R}, x = |x|)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, x = -|x|)$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y - x + x^2 < 0$.
4. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y - x + x^2 > 0$.

Exercice 2-3

1. Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.
2. Soient $A = [1, 3]$ et $B = [2, 4]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.
3. Soient $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2, 7]$ et $C =]-5, +\infty[$ trois parties de $\mathbb{R}$. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$ et $B \cup C$.

Exercice 2-4

Soit E un ensemble, et A et B deux parties de E. Montrer l'équivalence

$$A \subset B \iff A \cup B = B.$$

Exercice 2-5

En utilisant un raisonnement par la contraposée, montrer l'implication suivante pour tout $(a, b) \in R^2$

$$(\forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon) \implies a \leq b.$$

Exercice 2-6

Soit E un ensemble, et A, B et C trois parties de E.

1. L'implication suivante est-elle vraie

$$(A \cup B) \not\subseteq C \implies (A \not\subseteq C \text{ ou } B \not\subseteq C) \ ?$$

2. On suppose que l'on a les deux inclusions suivantes : $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que $B \subset C$.

Exercice 2-7

1. Soient les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Que peut-on en déduire sur la composition des fonctions ?
2. À partir des expressions formelles suivantes, déterminer deux fonctions u et v telles que $h = u \circ v$ en précisant leurs ensembles de départ et d'arrivée :

(a) $h(x) = \sqrt{3x - 1}$; (b) $h(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$; (c) $h(x) = \frac{1}{x + 7}$.

Exercice 2-8

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$. Déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(f \circ f \circ f \circ f \cdots \circ f)(x)$ (où f apparaît n fois) en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2-9

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$
3. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n$
4. $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x$
5. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 8x+3$
6. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \{14\}$, $x \mapsto 14$
7. $f : \{17\} \longrightarrow \{12;17\}$, $x \mapsto 17$
8. $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$
9. $f : \{0\} \longrightarrow \{0\}$, $x \mapsto 0$
10. $f : \{1\} \longrightarrow \{1/2\}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$
11. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$
12. $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $n \mapsto n+1$
13. $k : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$.

Exercice 2-10

Soient I et J des parties de $\mathbb{R}$, et $f : I \to J$ définie pour tout $x \in I$ par $f(x) = x^2$.

1. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective mais pas surjective.
2. Donner des ensembles I et J tels que f soit surjective mais pas injective.
3. Donner des ensembles I et J tels que f ne soit ni injective ni surjective.
4. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective et surjective.

Exercice 2-11

Soient E, F et G trois ensembles, et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives ?
4. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
6. Si à présent $f : E \to F$ et $g : F \to E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :

   (a) $g \circ f = Id_E$; (b) $f \circ g = Id_F$; (c) $f \circ f = Id_E$.

Exercice 2-12

1. Soit f l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même, définie par :

$$f(1) = 4,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2,\ f(4) = 2$$

   (a) Déterminer $f(A)$ lorsque $A = \{1\}$, $A = \{1, 3\}$, $A = \{3, 4\}$ et $A = \emptyset$.
   (b) Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B = \{2\}$, $B = \{1, 2\}$ et $B = \{3\}$.
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B = \{1\}$ et $B = [1, 2]$.

Exercice 2-13

Décrire (sans démonstration rigoureuse) les ensembles qui suivent.

1. $\tan(\{0\})$;
2. $\sin^{-1}(\{2\})$;
3. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
4. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : [-1/2, 4/3] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
5. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
6. $(\cos_{|[0,\pi]})^{-1}([0, 1])$;
7. $(\cos_{|[3,7]})^{-1}([0, 1])$;
8. $\cos^{-1}([0, 1])$;
9. $\exp(]-\infty, 2])$;
10. $\exp^{-1}([-1, e])$;
11. $\ln(\mathbb{R}_-)$;
12. $\ln^{-1}([3, +\infty[)$.

Exercice 2-14

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. f est-elle injective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. En déduire que f n'est pas surjective.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

Exercice 2-15

Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) f est injective ;

ii) Pour tous A_1, A_2 parties de X, on a $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

Exercice 2-16

Soient E un ensemble et f une application de E dans lui-meme telle que $f\Big(f(E)\Big) = E$. Montrer que f est surjective.

Exercice 2-101

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ l'application définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $f(2k) = k$ et $f(2k+1) = -k-1$.

1. Montrer l'équivalence suivante
$$\forall n \in \mathbb{N},\, n \text{ pair} \iff 0 \leq f(n).$$
2. En déduire que f définit une bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Z}$.

Exercice 2-102

Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \to J$ une application strictement croissante.

1. Montrer que f est injective. On pourra montrer la contraposée en utilisant le fait que $x_1 \neq x_2$ est équivalent à $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$.
2. Déterminer l'ensemble K tel que $f : I \to K$ soit bijective.

Exercice 2-103

Soit $f : E \to F$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\exists\, G \subset F$ telle que f est une bijection de E dans G ;

ii) f est injective.

Exercice 2-104

Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F. Soient également A_1 et A_2 deux parties de E, et B_1 et B_2 deux parties de F.

1. Montrer que $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

Exercice 2-105

Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F.

1. Montrer que pour toute partie A de E, on a $A \subset f^{-1}\Big(f(A)\Big)$.
2. Montrer que pour toute partie B de F, on a $f\Big(f^{-1}(B)\Big) \subset B$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E, on a $A = f^{-1}\Big(f(A)\Big)$.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F, on a $f\Big(f^{-1}(B)\Big) = B$.