Feuille 3 : Bases de logique

Exercice 3-1

Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des étudiants de l'université de Lyon 1, $\mathcal{S}$ l'ensemble des jours de la semaine et, pour un étudiant x, $h_j(x)$ son heure de réveil le jour j.

1. Écrire avec des symboles mathématiques la proposition : «Tout étudiant de l'université Lyon 1 se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h ».
2. Écrire la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques, puis l'énoncer en français.

Exercice 3-2

Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. Écrire en utilisant les symboles $\forall, \exists, \in, \notin$ les assertions

1. $A \cap B \neq \varnothing$; 2. $A \subset B$; 3. $A \not\subset B$; 4. $A = \varnothing$.

Exercice 3-3

On considère les ensembles

$$E = \left\{ x \in [0,1],\ \exists n \in \mathbb{N},\ x < \frac{1}{n+1} \right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ x < \frac{1}{n+1} \right\}.$$

Ces ensembles ont-ils un, une infinité ou aucun élément ?

Exercice 3-4

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. On dit que f est *bornée* si la propriété suivante est vraie :
$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad |f(x)| \leqslant M.$$
Écrire avec des quantificateurs la définition de « f n'est pas bornée. »
2. Écrire avec des quantificateurs la définition de « f est croissante », puis celle de « f n'est pas croissante ».

Exercice 3-5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres entiers naturels définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = 4u_n + u_{n+1}$. Établir la propriété
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant 3^n.$$

Exercice 3-6

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, +\infty[$. Développer $(1 + nx)(1 + x)$ et en déduire l'inégalité $(1 + nx)(1 + x) \geqslant 1 + (n + 1)x$.
2. En raisonnant par récurrence, démontrer l'inégalité
$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$$
pour tout nombre réel $x \in]-1, +\infty[$ et tout nombre entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3-7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer par récurrence forte que l'on a $u_n = 2^{n-1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 3-8

Pour tout nombre entier naturel n, soit $P(n)$ la propriété : $2^n > n^2$.

1. Démontrer que, pour $n \geqslant 3$, l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie.
2. Pour quels entiers n la propriété $P(n)$ est-elle vraie ?

Exercice 3-9

Un nombre entier $p \geqslant 2$ est dit *premier* si ses seuls diviseurs sont 1 et p. En raisonnant par récurrence, démontrer que tout nombre entier $n \geqslant 2$ est un produit de nombres premiers.

Exercice 3-10 (Principe des tiroirs)

1. Soit n un nombre entier, $n \geqslant 1$. Démontrer que, si vous rangez $n+1$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins deux paires de chaussettes.
2. Un fichier contient 500 000 mots formés d'au plus quatre lettres de l'alphabet latin. Peuvent-ils être tous distincts ?

Exercice 3-11

Soit $n \geqslant 1$ un nombre entier naturel. On se donne $n+1$ nombres réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dans $[0,1]$ tels que $x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. On veut démontrer par l'absurde la propriété (P) suivante : *il existe deux de ces nombres qui sont distants de moins de* $\frac{1}{n}$.

1. Écrire à l'aide de quantificateurs et de l'expression $x_i - x_{i-1}$ une formule logique équivalente à la propriété (P).
2. Écrire la négation de cette formule logique.
3. Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété (P) (*pour cela, on pourra chercher à prouver* $x_n - x_0 > 1$).
4. Donner une nouvelle preuve de la propriété (P) en utilisant cette fois le principe des tiroirs.

Exercice 3-12

Le but de cet exercice est de démontrer que le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Supposons qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

1. Vérifier que l'on a $p^2 = 2q^2$.
2. Justifier que l'on peut supposer que p et q sont premiers entre eux.
3. Démontrer que p est pair.
4. En déduire que q est pair.
5. En déduire que p et q n'existent pas.

Exercice 3-13

Sur une île, on trouve deux sortes de personnes : les sincères, qui disent toujours la vérité, et les menteurs, qui mentent toujours.

1. Jules et Jim sont deux habitants de cette île. Jules déclare : « L'un d'entre nous deux au moins est un menteur ». En raisonnant par l'absurde, démontrer que Jules est sincère. Qu'en est-il de Jim ?
2. Anne, Émilie et Charlotte sont trois habitantes. Anne déclare : « Nous sommes toutes menteuses ». Émilie dit : « Une et une seule d'entre nous est sincère ». En raisonnant par l'absurde, démontrer qu'Anne est une menteuse, puis qu'Émilie est sincère. Qu'en est-il de Charlotte ?

Exercice 3-14

Soit P_1, P_2, P_3 et P_4 les parties du plan $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\begin{array}{ll} P_1 = \{(x,y), x+y \leq 1\} & P_2 = \{(x,y), x-y \leq 1\} \\ P_3 = \{(x,y), -x+y \leq 1\} & P_4 = \{(x,y), -x-y \leq 1\}. \end{array}$$

1. Représenter $P_1 \cap P_2$, $P_3 \cap P_4$ et $(P_1 \cap P_2) \cap (P_3 \cap P_4)$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.
2. Comparer $(P_1 \cap P_2)^c$, $P_1^c \cap P_2^c$, $(P_1 \cup P_2)^c$ et $P_1^c \cup P_2^c$.

Exercice 3-15

Soit $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ deux ensembles. Écrire le produit cartésien $A \times B$. Quel est le nombre de parties de $A \times B$?

Exercice 3-16

On considère les ensembles $E = \{1, 5\}$, $F = \{2, 3\}$ et $G = \{1, 4\}$. Donner en extension les ensembles suivants :

1. $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(E \cap G)$, $\mathcal{P}(F \cap G)$, $\mathcal{P}(E \cup G)$
2. $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$, $\mathcal{P}(F \times (E \cap G))$
3. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$

Exercice 3-17

Soit E un ensemble fini non vide et a_0 un élément fixé de E. On considère l'application

$$f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E), A \mapsto \begin{cases} A \cup \{a_0\} & \text{si } a_0 \notin A \\ A \setminus \{a_0\} & \text{si } a_0 \in A \end{cases}.$$

1. Démontrer que, si $\mathrm{Card}(A)$ est pair, alors $\mathrm{Card}(f(A))$ est impair, et que si $\mathrm{Card}(A)$ est impair, alors $\mathrm{Card}(f(A))$ est pair.
2. Démontrer que, pour toute partie A de E, $(f \circ f)(A) = A$.
3. En déduire que f est bijective.
4. Déduire de ce qui précède une démonstration de l'affirmation : « *Un ensemble fini et non vide possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair* ».

Exercice 3-18

Soit E et F deux ensembles.

1. Si $A \subset E$ et $B \subset F$, démontrer que l'on a alors $A \times B \subset E \times F$.
2. Supposons que les ensembles E et F contiennent chacun au moins deux éléments distincts. Trouver une partie X de $E \times F$ qui ne soit pas de la forme $A \times B$ avec $A \subset E$ et $B \subset F$.

Exercice 3-19 (Formule de Vandermonde)

1. Soit k, m, n trois nombres entiers naturels tels que $k \leqslant \min\{m, n\}$. Démontrer l'identité

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}.$$

   Pour cela, on pourra considérer deux ensembles finis E, F tels que $\mathrm{Card}(E) = m$ et $\mathrm{Card}(F) = n$, puis dénombrer de deux façons différentes le nombre de parties à k éléments dans la réunion $E \cup F$.

2. En déduire l'identité $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 3-20

Deux pays sont dits voisins s'ils ont une frontière commune. On suppose qu'il y a un nombre fini de pays et que chaque pays a au moins un voisin. En considérant l'application qui à chaque pays associe son nombre de voisins, démontrer qu'il existe au moins deux pays qui ont le même nombre de voisins.

Exercice 3-101

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par le procédé suivant :

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_n + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{2^{k+1}-1}{2^k} & \text{si } n = 2k \text{ est pair} \\[2ex] \dfrac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}} & \text{si } n = 2k+1 \text{ est impair.} \end{cases}$$

Exercice 3-102

Soit $p \geqslant 1$ et $n \geqslant 0$ deux nombres entier. On désigne par $D(p,n)$ le nombre de p-uplets $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $x_1 + \ldots + x_p = n$.

1. Établir l'identité $D(p,n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} D(p-1, n-k)$.
2. En déduire la formule $D(p,n) = \dbinom{n+p-1}{p-1}$.

Exercice 3-103

Soit E un ensemble à n éléments et A une partie de E à p éléments.

1. Combien y a-t-il de parties X de E contenant A
2. Soit m un nombre entier tel que $p \leqslant m \leqslant n$. Combien y a-t-il de parties X de E à m éléments contenant A ?
3. Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$?

Exercice 3-104

Soit un ensemble E. Pour toutes parties A et B de E,
on désigne par $A \triangle B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1. Démontrer que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Démontrer qu'il existe une unique partie X de E telle que pour toute partie A de E, $A \triangle X = X \triangle A = A$.
3. Démontrer que pour toute partie A de E, il existe une partie A' de E et une seule telle que $A \triangle A' = A' \triangle A = E$.

Exercice 3-105 (**Fonctions caractéristiques**)

Étant donné une partie X d'un ensemble E, on définit une application $f_X : E \to \{0,1\}$ par :

$$\forall e \in E,\ f_X(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \notin X, \\ 1 & \text{si } e \in X. \end{cases}$$

1. Si A et B sont deux parties de E, démontrer l'équivalence
$$A = B \iff f_A = f_B.$$
2. Comment peut-on exprimer la condition $A \subset B$ avec les fonctions f_A et f_B ?
3. Exprimer $f_{A\cap B}, f_{A\cup B}$ et f_{A^c} à l'aide de f_A et f_B.
4. Exprimer $f_{A\triangle B}$ en fonction de f_A et f_B.
5. Reprendre les questions 2, 3 de l'exercice précédent en utilisant les fonctions caractéristiques.

Exercice 3-106

Soit A, B deux ensembles finis non vides.

1. En raisonnant par récurrence sur le nombre d'éléments de A, démontrer que le nombre d'applications de A dans B est $\mathrm{Card}(B)^{\mathrm{Card}(A)}$.
2. Retrouver de cette manière le cardinal de $\mathcal{P}(A)$ (*utiliser l'exercice 3-104*).