Feuille 4 : Fonctions usuelles

I Divers

Exercice 4.1.

1. Montrer que $1+\sin(x)=\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.
2. Exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.
3. Exprimer en fonction de $x\mapsto\tan(x)$ uniquement les fonctions

$$f_1: x\mapsto f_1(x)=\cos^2(x)\,;\ f_2: x\mapsto f_2(x)=\frac{\sin^4(x)+\cos^4(x)}{\sin^4(x)-\cos^4(x)}\,;$$
$$f_3: x\mapsto f_3(x)=\frac{\sin^3(x)-\cos^3(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\ \text{et}\ f_4: x\mapsto f_4(x)=\cos^2(x)-\sin(x)\cos(x)$$

Exercice 4.2.

1. Calculer

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)\qquad\text{et}\qquad\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$$

2. A l'aide de la formule $\operatorname{ch}(a+b)=\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b)+\operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$, déterminer les solutions de l'équation :

$$2\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)=\sqrt{3}\operatorname{ch}(5x)$$

Exercice 4.3. u et v étant deux réels, établir les formules suivantes :

$$\operatorname{ch}^2(u)+\operatorname{sh}^2(v)=\operatorname{sh}^2(u)+\operatorname{ch}^2(v)=\operatorname{ch}(u+v)\operatorname{ch}(u-v)$$
$$\operatorname{ch}^2(u)-\operatorname{ch}^2(v)=\operatorname{sh}^2(u)-\operatorname{sh}^2(v)=\operatorname{sh}(u+v)\operatorname{sh}(u-v)$$

Exercice 4.4. Montrer que pour tous x et y réels distincts :

$$e^{\frac{x+y}{2}}<\frac{e^x+e^y}{2}$$

Exercice 4.5.
Calculer, lorsque c'est possible, la dérivée des fonctions f_i définies de la manière suivante :

$$f_1(x)=\ln|\cos(x)|\,;\ \ f_2(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\,;\ \ f_3(x)=\cos^2(3x)\,;$$
$$f_4(x)=e^{2x+1}, f_5(x)=\tan(x^2)\,, f_6(x)=\sqrt{1-x^2}$$

Exercice 4.6. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$3\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)-3=0$$

Exercice 4.7. Discuter en fonction de la valeur du réel x de l'existence et la valeur éventuelle de la limite de x^n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4.8. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(\operatorname{ch}^3(x)-\operatorname{sh}^3(x))$$
$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln(\operatorname{ch}(x)))$$

Exercice 4.9.
Soit $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
1. Montrer que sh est une bijection continue et soit sh^{-1} sa bijection réciproque.
2. Calculer $(\mathrm{sh}^{-1})'$ à l'aide de la formule du cours.
3. Déterminer explicitement $\mathrm{sh}^{-1}(x)$ et retrouver le résultat du 2.

Concavité, convexité, points d'inflexion

Exercice 4.10.
Soient $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$
1. Déterminer l'intersection du graphe avec l'axe des abscisses.
2. Déterminer les points où le graphe admet une tangente horizontale.
3. Montrer que f admet un point d'inflexion. Préciser la concavité de la courbe selon les valeurs de x.

Exercice 4.11.
Soient $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
1. Déterminer les points où le graphe admet une tangente horizontale.
2. Montrer que f admet un point d'inflexion. Préciser la concavité de la courbe selon les valeurs de x.

Etudes de fonctions complètes

Exercice 4.12. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$$

1. Etudier les variations de f.
2. Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.
3. Calculer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de l'expression

$$f(x) - (x + 2)$$

   En déduire que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote au graphe de f.
4. Déterminer la position du graphe par rapport à l'asymptote d'équation $y = x + 2$.
5. Tracer le graphe de f.

Exercice 4.13.
On note f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x) = (1 - x)\ln(1 - x) + x$ et g la fonction définie sur $]0,1[$ par $g(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$.
1. Etudier les variations de f sur $[0,1[$ et en déduire que f est à valeurs positives.
2. Etudier les variations de g sur $]0,1[$.
3. Déterminer les limites éventuelles de $g(x)$ pour x tendant vers 0 et pour x tendant vers 1.

Exercice 4.14. On note f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x) = (1 - x)\ln(1 - x) + x$ et g la fonction définie sur $]0,1[$ par $g(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$.
1. Etudier les variations de f sur $[0,1[$ et en déduire que f est à valeurs positives.
2. Etudier les variations de g sur $]0,1[$.
3. Déterminer les limites éventuelles de $g(x)$ pour x tendant vers 0 et pour x tendant vers 1.

Exercice 4.15. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}$.

1. Déterminer les limites éventuelles de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f.
3. Tracer sommairement la courbe représentative de f.

Exercice 4.16. Soit f la fonction définie par

$$f(u) = \frac{4 - 5\,\mathrm{ch}(u)}{\mathrm{sh}(u)}$$

1. Montrer que f est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Est-elle paire, impaire ?
2. Déterminer les limites éventuelles de f en $+\infty$ et en 0^+.
3. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^*$. On veillera à donner une expression très simple les points où f' s'annule.
4. Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe.

Exercice 4.17. Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, sa période et sa parité. En déduire un intervalle d'étude.
2. Calculer la dérivée de f et déterminer son signe.
3. Dresser le tableau de variation.
4. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 4.18. Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$.

1. Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$. Dresser le tableau de variations de cette fonction, et en déduire qu'il existe un et un seul réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$, déteminer x_0.
2. En déduire les variations de f.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Déterminer les asymptotes au graphe de f.
5. Tracer ce graphe et son asymptote en faisant figurer les tangentes remarquables.

Exercice 4.101. Etablir la formule suivante :

$$\tan(x-y) + \tan(y-z) + \tan(z-x) = \tan(x-y)\tan(y-z)\tan(z-x)$$

Où x, y, z sont trois réels pour lesquels les trois tangentes apparaissant dans la formule sont définies.
Indication : on pourra appliquer judicieusement la formule donnant $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.

Exercice 4.102.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{8\,\mathrm{ch}(x)}{4e^x - 3}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.
3. Etudier les variations de f.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Tracer le graphe de f.

Exercice 4.103.

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par :

$$f(u) = \frac{3 + 4\,\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{ch}(u)}$$

1. Préciser son domaine de définition.
2. Préciser ses limites quand u tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
3. Etudier les variations de f. On veillera à fournir une expression très simple de la valeur u_0 pour laquelle $f'(u_0) = 0$.
4. Tracer le graphe de f.

Exercice 4.104. Soit f la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin^2(x) + \frac{1}{2}\cos(x)$$

1. Etudier la parité de f et sa périodicité, en déduire un intervalle d'étude.
2. Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(x_0) = \frac{1}{4}$
3. Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
4. Dresser le tableau de variation de f et tracer le graphe de f.