Feuille 5 : Nombres complexes

Exercice 5-1 Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{0, -3\} \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z(z+3)}$.
Calculer $f(1-i)$ et $f(1+i)$.

Exercice 5-2 Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe

$$z = \frac{1+im}{2m+i(m^2-1)}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5-3 Calculer le module et un argument de $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.

Exercice 5-4 Calculer le module et un argument de $u = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1-i$.
En déduire le module et un argument de $\dfrac{u}{v}$.

Exercice 5-5 Déterminer et représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ les ensembles de nombres complexes suivants :

1. $\{z \in \mathbb{C} \mid |1-z| \leq \frac{1}{2}\}$
2. $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(1-z) \leq \frac{1}{2}\}$
3. $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(iz) \leq \frac{1}{2}\}$
4. $\{z \in \mathbb{C} \mid \left|1-\frac{1}{z}\right|^2 = 2\}$
5. $\{z \in \mathbb{C} \mid \left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2\}$

Exercice 5-6 Montrer que tout nombre complexe $z \neq 1$ de module 1 s'écrit sous la forme $\dfrac{x+i}{x-i}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5-7 Résoudre de deux façons différentes l'équation

$$z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{8}$ et de $\sin\frac{\pi}{8}$.

Exercice 5-8

1. En utilisant la formule de Moivre, déterminer la forme trigonométrique de $(1+i)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire une expression simple de $(1+i)^n + (1-i)^n$.

Exercice 5-9

1. Calculer les racines carrées des nombres complexes :

$$a)\ z_1 = 7+24i, \qquad b)\ z_2 = 9+40i, \qquad c)\ z_3 = 1+i.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$a)\ z^2 = -2\sqrt{3}+2i, \qquad b)\ z^2 = 3-4i.$$

Exercice 5-10 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z + iz^2 + 6i - 5iz - 2 = 0$.
2. $2z^2 + (5+i)z + 2 + 2i = 0$.
3. $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.
4. $z^3 + 3z - 2i = 0$.
5. $(1+2i)z^2 - (9+3i)z - 5i + 10 = 0$.

Exercice 5-11

1. Représenter dans le plan complexe $\mathbb{C}$ les 6 racines 6-èmes de 1, et les racines 4-èmes de -1.
2. Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer les $n-1$ solutions complexes de $1 + z + \cdots + z^{n-1} = 0$.

Exercice 5-12

1. Déterminer les racines cubiques de 1.
2. On note $j = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
3. Exprimer toutes les racines cubiques de 1 en fonction de j.

Exercice 5-13

1. Donner les solutions complexes de $z^4 = 1$.
2. Résoudre $z^4 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Résoudre $z^8 + \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z^4 - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

Exercice 5-14 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^5 - z = 0$.
2. $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.
3. $\bar{z}^7 = \dfrac{1}{z^2}$.
4. $z^6 - (3+2i)z^3 + 2 + 2i = 0$.

Exercice 5-15 Sachant qu'elle admet une racine réelle, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i = 0.$$

Exercice 5-16 Montrer que pour tout $z, w \in \mathbb{C}$:

1. $|z + w| \leq |z| + |w|$;
2. $||z| - |w|| \leq |z + w|$.

Exercice 5-17 Soient $z, w \in \mathbb{C}$. Etablir la relation

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

et en donner une interprétation géométrique.

Exercice 5-18 Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\cos(3x)$ (*resp.* $\sin(3x)$) en fonction de $\cos(x)$ (*resp.* $\sin(x)$).
2. Linéariser $\sin^4(x)$ puis $\cos(x)\sin^4(x)$.

Exercice 5-19 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta), \qquad \text{et} \qquad V_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

Exercice 5-19 Soit $c \in \mathbb{C}$ avec $|c| < 1$.

1. Montrer que $|z + c| \leq |1 + \bar{c}z|$ si et seulement si $|z| \leq 1$.
2. Soient $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ le disque unité et $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ le circle unité.
   Montrer que l'application $f : D \longrightarrow D$
   $$z \mapsto \frac{z + c}{1 + \bar{c}z},$$
   est une bijection pour laquelle $f(C) = C$.

Exercice 5-20 Donner les applications de $\mathbb{C}$ qui représentent des transformations du plan suivantes :

1. La translation du vecteur d'affixe $-2 + i$.
2. La symétrie centrale du centre i.
3. La rotation d'angle $\pi/6$ et de centre 1 ;
4. L'homothétie de rapport 3 et de centre d'affixe $1 + 2i$.
5. La similitude de rapport 2 et d'angle $\pi/3$ et de centre $1 + i$.

Exercice 5-100 Soit $z = \dfrac{3}{\sqrt{3} + i}$. Calculer z^4.

Exercice 5-101

1. Montrer que l'équation
   $$z^4 - 3z^3 + (2 - i)z^2 + 3z - 3 + i = 0$$
   admet des racines réelles.
2. Trouver toutes les racines de l'équation.

Exercice 5-102

1. Déterminer les quatre nombres complexes a, b, c, d différents de 1, qui sont solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^5 = 1$.
2. Montrer, pour tout nombre complexe z, l'égalité :
   $$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = (z - a)(z - b)(z - c)(z - d).$$

Exercice 5-103 Soit $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

1. Calculer z^2, puis déterminer le module et un argument de z^2, puis écrire z^2 sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de z.
3. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 5-104 Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z(1 - z)$.

1. Déterminer les points fixes de f, c'est à dire résoudre $f(z) = z$.
2. En utilisant l'égalité $z(1 - z) = (z - \frac{1}{2})(\frac{1}{2} - z) + \frac{1}{4}$, montrer que
   $$\text{si } \left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} \text{ alors } \left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}.$$

Exercice 5-105

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -2 + 2i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -8i$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\frac{1}{2}z^6 + (1 + 3i)z^3 + 8 + 8i = 0$.

Exercice 5-106 Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\cos^2(x)\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(x)$.
2. Linéariser $\cos^5(x)$.

Exercice 5-107 Cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies.

- ☐ L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 1 - iz$ est une homothétie.
- ☐ L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 1 - iz$ est une rotation dont le centre a pour affixe 1.
- ☐ L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (1-i)z$ est une rotation d'angle $-\pi/2$.
- ☐ L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 1 - iz$ est une rotation d'angle $-\pi/2$.
- ☐ L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z$ est une rotation dont le centre est l'origine du plan complexe.

Exercice 5-108

1. Déterminer les racines carrées de $-i$ dans $\mathbb{C}$, sous forme exponentielle $\rho e^{i\theta}$ et sous forme algébrique $a + ib$. (On rappelle que les racines carrées de $-i$ sont les nombres complexes z tels que $z^2 = -i$).
2. Soit Δ le nombre complexe $\Delta = -50i$. Déterminer les racines carrées de Δ dans $\mathbb{C}$, sous forme algébrique.
3. Déterminer, sous forme algébrique, les deux solutions complexes de l'équation :
$$z^2 + 3(1-i)z + 8i = 0.$$
4. Soit A le point du plan complexe d'affixe $2 + 2i$. Soient B et C les points du plan complexe ayant pour affixes les solutions calculées à la question précédente. Représenter les trois points A, B, C dans le plan complexe. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
5. Soit M le milieu du segment $[B, C]$, et $\mathcal{C}$ le cercle de centre M et de rayon $5\sqrt{2}/2$. Montrer que les trois points A, B, C appartiennent au cercle $\mathcal{C}$.
6. Soit O l'origine du plan complexe. Calculer les affixes des images de A, B, C par la rotation de centre O et d'angle $\pi/4$.
7. Calculer les affixes des images de A, B, C par l'homothétie de centre M et de rapport -1.