Feuille 6 : Suites réelles

Exercice 6-1 [Limites de suites]

Déterminez les limites éventuelles des suites suivantes :

a) $u_n = \dfrac{n+2}{2n-1}$ *b)* $u_n = \dfrac{3n^2-2n+3}{n^3-1}$ *c)* $u_n = \dfrac{3n^2-5}{n+4}$

d) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n-1}}$ *e)* $u_n = \dfrac{\sqrt{n+5}+n}{\sqrt{n^2+1}}$ *f)* $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

g) $u_n = \sin n$ *i)* $u_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$ *j)* $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

k) $u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{2n+(-1)^n}$ *l)* $u_n = \dfrac{3^n-2^n}{2^n-3^n}$ *m)* $u_n = \dfrac{2^n}{n^{100}}$

Exercice 6-2

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 8$ et la relation de récurrence $u_n = \dfrac{1}{2}u_{n-1} + 3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $v_n = u_n + a$ où a est un réel quelconque. Ecrivez v_n en fonction de v_{n-1}.
2. Déterminez une valeur a pour laquelle la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
3. Déterminez v_n en fonction de n.
4. Déterminez u_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite ?

Exercice 6-3 [Suites récurrentes]

Etudiez la convergence et calculez l'éventuelle limite de :

a) $u_{n+1} = \dfrac{1}{6}u_n + 5,\ u_0 = 3$ *b)* $u_{n+1} = -2u_n + 1,\ u_0 = 0$ *c)* $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n},\ u_0 = 8$

d) $u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n},\ u_0 = 2$ *e)* $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{2}{9},\ u_0 = 0$ *f)* $u_{n+1} = \dfrac{u_n-1}{u_n+1},\ u_0 = 2$

Exercice 6-4

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 7$ et la relation de récurrence $u_n = \sqrt{2+u_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrez que la fonction $f(x) = \sqrt{2+x}$ est croissante.
2. Déterminez l'image de l'intervalle $[0,7]$ par f.
3. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminez sa limite.

Exercice 6.5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n+8}{2u_n+1}.$$

On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n-2}{u_n+2}.$$

1. Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{5}$.
2. Exprimez v_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. Montrez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminez sa limite.

Exercice 6-6

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in [0,1]$ et $u_n = \dfrac{3-u_{n-1}^2}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{3-x^2}{2}$. Montrez que f est décroissante sur $[0, \infty[$.
2. Déterminez l'image de l'intervalle $[0, \sqrt{3}]$ par f.
3. En considérant les solutions de l'équation $f \circ f(l) = l$, montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminez sa limite.

Exercice 6-7

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

1. Montrez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrez qu'elle converge et que sa limite l vérifie :

$$\frac{1}{2} \leq l \leq 1.$$

3. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \Sigma_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k} = \infty$.

Exercice 6-8 $[\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}]$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_n = \sqrt{1+u_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 1$.
2. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrez que la suite est bornée.
4. Déterminez une équation que vérifie la limite l de la suite.
5. Déterminez la valeur exacte de l.

Exercice 6-9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{1+u_n} = 0$. Montrez que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Exercice 6-10

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n + v_n$.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Que peut on dire de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. On suppose que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. Que peut on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Donnez un exemple de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergentes telles que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

Exercice 6-11

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $w_n = u_n^2 + u_n v_n + v_n^2$ soit convergente vers 0.

1. En utilisant une identité remarquable, écrire w_n comme la somme de 2 carrés.
2. En déduire que les deux carrés convergent vers 0.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent aussi vers 0.

Exercice 6.12

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 10$
   (a) Justifiez qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \geq 5u_n$.
   (b) Montrez qu'alors, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq 5^{n-N} u_N$.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

2. On suppose à présent que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$

   (a) Justifiez qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.

   (b) En raisonnant comme avant, montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge cette fois vers 0.

Exercice 6-13

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

1. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

Exercice 6-14

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.

1. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1.
2. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminez sa limite.

Exercice 6-15 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que la sous suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ des termes pairs converge vers l. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente.

Indications pour l'exercice 6-3

1. a) Montrez que la suite est minorée par 4, majorée par 6, puis qu'elle est monotone.
2. b) Considérez les sous suites des termes pairs et impairs.
3. c) Montrez que la suite est minorée par 1, majorée par 8, puis qu'elle est monotone.
4. d) Trouvez, en résolvant une équation, quelle peut être l'éventuelle limite l de la suite. Montrez que cette valeur est un majorant de la suite, puis que la suite est monotone.
5. e) Comme ci dessus, trouvez un bon majorant de la suite.
6. f) Calculez les 5 premiers termes de la suite.

Exercice 6.101 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de limite l. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{u_1 + ... + u_n}{n}.$$

(a) Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
(b) Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq l$. En déduire que (v_n) converge.
(c) On note l' la limite de (v_n). Peut-on donner une inégalité entre l et l' ?
(d) Établir que $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$.
(e) En passant à la limite dans l'inégalité précédente, en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Exercice 6-102 $[1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}]$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_n = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculez u_1, u_2 et u_3 .
2. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq 2$.
3. Montrez que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

4. Déterminez la limite l de la suite, à partir d'une equation qu'elle doit vérifier.

Exercice 6-103 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \quad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$

1. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
2. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

Exercice 6-104 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite définie par $u_0 \in]1,2[$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{4} + \dfrac{3}{4}$.

1. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1$.
2. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 2$.
3. Montrez que la suite est monotone. En déduire sa convergence.
4. Déterminez sa limite.

Exercice 6-105 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1.$$

1. On introduit la fonction $f(x) = (x-1)^2 + 1$. Montrer que f est croissante sur $[1, \infty[$. Déterminer l'image de l'intervalle $]1,2[$ par f.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 2$.
3. Montrer que la suite (u_n) est monotone.
4. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 6-106 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2}.$$

1. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
2. Si la suite (u_n) converge, quelle peut être sa limite éventuelle ?
3. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 3$.
4. Montrez que (u_n) est croissante. Que peut-on en conclure ?

Exercice 6-107 Etudiez la monotonie des suites définies par les termes généraux suivants :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \text{ (pour } n \geq 1), \quad n - 2^n, \quad \frac{e^n}{n!}, \quad (n+1)(n+2)\ldots(n+n), \quad \frac{n-1}{n+3}, \quad n - \text{sh}n.$$

Exercice 6-108

1. Montrez que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n > 0$ par
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$
À l'aide de la question 1, montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminez sa limite.