Feuille 7 : Arithmétique

Exercice 7-1

Donner tous les diviseurs dans $\mathbb{Z}$ de -12.

Exercice 7-2

L'équivalence « Pour tous entiers m et n, $m+n$ multiple de 5 équivaut à m multiple de 5 et n multiple de 5. » est-elle vraie ?

Exercice 7-3

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Exercice 7-4

1. Déterminer les couples d'entiers naturels non nuls de pgcd 35 et ppcm 210.
2. Déterminer les couples d'entiers naturels non nuls de pgcd 64 et dont la somme vaut 1152.
3. Déterminer les couples d'entiers naturels non nuls de pgcd 17 et dont le produit vaut 1734.

Exercice 7-5

Calculer le pgcd de 48 et 210, et de 81 et 237. Dans chaque cas exprimer l'identité de Bézout.

Exercice 7-6

Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = a$, $u_1 = b$, et $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Montrer par récurrence que deux termes consécutifs de cette suite sont premiers entre eux.

Exercice 7-7

1. Soient a, b et c trois entiers tels que a et b ne sont pas tous deux nuls. En utilisant l'identité de Bézout, démontrer que l'équation $ax+by=c$ a au moins une solution $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ si et seulement si pgcd(a,b) divise c.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

   $(a)\ 58x+21y=0$ $\quad (b)\ 58x+21y=1$ $\quad (c)\ 14x+35y=21$ $\quad (d)\ 637x+595y=29$

Exercice 7-8

On se propose de déterminer tous les couples $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ solutions de l'équation $2^m - 3^n = 1$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   A. Quel est le reste de la division euclidienne de 9^k par 8 ?
   B. Déterminer les restes de la division euclidienne de $3^{2k}+1$ par 8, puis de $3^{2k+1}+1$ par 8.
2. Soit $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ un couple solution, montrer à l'aide de 1. que $m \le 2$.
3. En déduire tous les couples $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ solutions de l'équation.

Exercice 7-9

Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24.

Exercice 7-10

L'objectif est de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système de congruences suivant, d'inconnue n :

$$(E)\ \begin{cases} n \equiv 13 \pmod 7 \\ n \equiv 0 \pmod{16} \end{cases}$$

1. Montrer que 7 et 16 sont premiers entre eux et écrire une relation de Bézout associée.
2. Quel est l'ensemble des entiers relatifs à la fois multiples de 7 et de 16 ?
3. En vous aidant de la relation de Bézout, trouver un entier n_0 multiple de 16 qui vérifie par ailleurs $n_0 \equiv 1 \bmod (7)$. En déduire une solution du système (E).
4. Déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 7-11

Le numéro INSEE (de sécurité sociale) est formé d'un nombre a de 13 chiffres (sexe, année de naissance, mois de naissance, département de naissance, code de commune, numéro d'ordre de naissance) et d'une clé k de 2 chiffres. Cette clé est fabriquée par $k = -a \pmod{97}$.

1. Calculer la clé associée au numéro 1 89 09 13 055 456
2. Montrer que si un seul chiffre de a est erroné alors l'erreur est détectée.
3. Montrer que si deux chiffres consécutifs de a sont intervertis alors l'erreur est détectée.

Exercice 7-12

On considère un entier n supérieur ou égal à 3.

1. Montrer que, quel que soit l'entier x, les carrés des nombres x et $n-x$ sont congrus modulo n.
2. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble $\{0,1,...,n-1\}$ des restes modulo n, et c l'application de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui à un reste modulo n associe son carré. Cette application est-elle injective ? Est-elle surjective ?
3. Dresser la table des carrés modulo 7.
4. Montrer que l'équation $x^2 - 6xy + 2y^2 = 7003$ n'a pas de solutions (x,y) entières (exprimer le premier membre comme un carré modulo 7).

Exercice 7-13

Soit $p \geq 3$ un nombre premier.

1. Quels sont les éléments $x \in \mathbb{Z}$ tels que $x^2 \equiv 1 \pmod p$?
2. En déduire le théorème de Wilson : si p est premier alors $(p-1)!\ +\ 1$ est divisible par p.

Exercice 7-14

On rappelle que, par définition, un entier x s'écrit $a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$ en base dix si $x = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0$. Montrer les critères de divisibilité suivants :

1. Un entier est divisible par 9 (resp. 3) si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9 (resp. 3).
2. Un entier est divisible par 5 si et seulement si son dernier chiffre est 0 ou 5.
3. Un entier est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
4. Un entier est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres est un multiple de 11.

Exercice 7-15

1. Donner la valeur en base dix des nombres suivants :
   a) $(110101001)_{\text{base deux}}$ b) $(110101001)_{base3}$ c) $(1367)_{base8}$ d) $(1402)_{base5}$
2. Ecrire les nombres suivants (donnés en base dix) dans la base cible indiquée :
   a) 255 en base deux b) 1907 en base seize c) 2000 en base deux mille

Exercice 7-101

Montrer que pour tout entier n impair, n^2-1 est divisible par 8.

Exercice 7-102

« Le produit des âges de mes trois filles est 36, leur somme est le numéro de cette maison. Quels sont les âges de mes filles ?

- Je vois que vous avez des jumelles, mais cela ne me suffit pas pour répondre.
- C'est juste, j'ajoute que ma fille aînée aime le chocolat.
- Alors je peux répondre. »

Quels sont les âges des filles ?

Exercice 7-103

Soit n un entier naturel non nul. En utilisant le théorème de Bézout, montrer que les entiers suivants sont premiers entre eux : $2n+1$ et $9n+4$, puis $3n-2$ et $5n-3$.

Exercice 7-104

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $1665x+1035y=45$.

Exercice 7-105

Montrer que tout carré parfait n^2, $n\in\mathbb{N}$, admet un nombre impair de diviseurs. On pourra étudier l'exemple générique 36.

Exercice 7-106

Trouver toutes les solutions du système suivant dans $\mathbb{Z}$:

$$(E)\ \begin{cases} n\equiv 13 \pmod{19} \\ n\equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$$

Exercice 7-107

Un numéro de carte bleue est un nombre à 16 chiffres $a_{16}\ldots a_1$. Sur ces chiffres, on définit une l'application f par $f(x)=2x$ si $0\leq 2x\leq 9$ et sinon par $f(x)=1+y$ si $2x=10+y$. On impose au numéro de vérifier $a_1+f(a_2)+\ldots+a_{15}+f(a_{16})\equiv 0 \pmod{10}$. Montrer que si un seul chiffre est erroné alors le numéro n'est plus valide.

Exercice 7-108

Il n'y a pas de formule générale donnant à coup sûr un nombre premier. Fermat avait cru en trouver une en prétendant que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, le nombre $F_n=2^{2^n}+1$ était premier. C'est effectivement le cas pour $n\in\{0,1,2,3,4\}$ correspondant aux nombres premiers 3, 5, 17, 257, 65537, mais…

1. Montrer que F_5 est multiple de 641.
2. Soient m et n deux entiers naturels distincts. Montrer que les nombres de Fermat F_n et F_m sont premiers entre eux (on pensera en termes de congruences). En déduire une preuve que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 7-109

Trois preuves arithmétiques de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ sont données ci-dessous (on peut y ajouter celle en jeu dans l'exercice 3.12).

1. Choisir la preuve qui permet le plus aisément de démontrer l'irrationalité de $\sqrt{3}$ et écrire la démonstration associée.
2. Soit un n entier naturel, pour quelles valeurs de n le nombre $\sqrt{n}$ est-il rationnel ? Formuler une conjecture en complétant « $\sqrt{n}$ est rationnel si et seulement si n est ………………… ». Puis tenter de démontrer cette équivalence en s'inspirant de la preuve qui semble la mieux adaptée.

Preuve 1 : Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$. Montrons que a et b sont pairs : avec l'égalité précédente on a $2b^2=a^2$ donc a^2 est pair ; montrons par contraposée qu'alors a est pair : si a n'est pas pair, il existe un entier k tel que $a=2k+1$ et donc a^2 est impair car égal à $4(k^2+k)+1$. Il existe donc un entier a' non nul tel que $a=2a'$; d'où $2b^2=4a'^2$ ou encore $b^2=2a'^2$. De même que pour a on en conclut que b est pair. Ainsi, à partir des entiers a et b on obtient les entiers naturels non nuls a' et b' tels que :

$$\begin{cases} \sqrt{2}=\dfrac{a'}{b'} \\ a'<a \\ b'<b \end{cases}$$

On peut donc construire une suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante, ce qui est impossible. En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Preuve 2 : Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe alors a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$. Ainsi on a $2b^2=a^2$. On appelle α l'exposant de 2 dans la décomposition en produit de nombres premiers de a et β celui de b. D'après l'égalité précédente on a : $1+2\beta=2\alpha$. D'où une contradiction. En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Preuve n°3 : Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$; on suppose que a et b sont premiers entre eux.

Avec l'égalité précédente on a $2b^2=a^2$ et ainsi :

- D'une part on a en particulier a^2 divise $2b^2$, et d'après le théorème de Gauss, a^2 et b^2 étant premiers entre eux (car a et b le sont) on a a^2 divise 2. Ainsi $a^2\leq 2$.
- D'autre part on a $a^2\geq 2$.

Ainsi $a^2=2$.

On obtient une contradiction car 2 n'est pas un carré dans $\mathbb{N}$. En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.