Feuille 8 : Limites et continuité des fonctions

Exercice 8-1 Soit $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq -1 \\ x^2+1 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \sin(x/4) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

1. Dessiner le graphe de f.

2. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to -1-} f(x)$ c) $\lim_{x\to 0-} f(x)$ e) $\lim_{x\to \pi-} f(x)$
b) $\lim_{x\to -1+} f(x)$ d) $\lim_{x\to 0+} f(x)$ f) $\lim_{x\to \pi+} f(x)$

En déduire les limites suivantes et comparer les avec la valeur de f au point concerné.

a) $\lim_{x\to -1} f(x)$ b) $\lim_{x\to 0} f(x)$ c) $\lim_{x\to \pi} f(x)$

Exercice 8-2 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ 2) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$ 3) $\lim_{x\to 4} \frac{2x+5}{x-4}$

4) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^9-17}{x^7}$ 5) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^3-5x^2+7}{8+2x-5x^3}$ 6) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+3}{x^3+2}$

7) $\lim_{x\to 1} |x-1|$ 8) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{|x-1|}$ 9) $\lim_{x\to 5} \frac{1}{|x-1|}$

10) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}$ 11) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}\right)$ 12) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+2x+5}-x$

13) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x}$ 14) $\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x})$ 15) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+\sin x}{x^2+\cos x}$

16) $\lim_{x\to 0+} x^x$ 17) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1+2\sin(x)}{1+\sqrt{x}}$ 18) $\lim_{x\to +\infty} e^{x-\sin x}$

On considère $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $E(x)$ est la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

19) $\lim_{x\to 0} E(x+1)$ 20) $\lim_{x\to 0} xE(\frac{1}{x})$ 21) $\lim_{x\to +\infty} xE(\frac{1}{x})$

Exercice 8-3 Rappelons que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et que $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$ 2) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$ 3) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\pi x)}{1-2x}$ 5) $\lim_{x\to 1/2} (2x^2+x-1)\tan(\pi x)$ 6) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$

7) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$ 8) $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\ln^3 x$ 9) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\exp(\ln^2 x)}{x^n}$, $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 8-4

1) Si $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-5}{x-2} = 5$, trouver $\lim_{x\to 2} f(x)$. 2) Si $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = -2$, trouver $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.

Exercice 8-5 Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité des fonctions suivantes en chaque point de leur domaine de définition.

1. $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xE(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$, où E dénote la partie entière.

Exercice 8-6

1. Déterminer les valeurs de $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles f_k définie par $f_k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ k - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ est une fonction continue.
2. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \dfrac{1+x^3}{1+x}$. Trouver une application continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g|_{\mathbb{R}\setminus\{-1\}} = f$

Exercice 8-7 Montrer que l'équation $x^3 - 15x + 1 = 0$ a trois solutions dans l'intervalle $[-4, 4]$.

Exercice 8-8 Montrer qu'il existe $x \in [3\pi/4, \pi]$ tel que

$$\tan x + \frac{x}{3} = 0.$$

Exercice 8-9 Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors f est surjective.

Exercice 8-10 Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues dont l'image est contenue dans $\mathbb{Z}$? dans $\mathbb{Q}$?

Exercice 8-11 Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la fonction $f_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_n(x) = x^n - x - 1$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et converge vers une limite l.
4. Déterminer l.

Exercice 8-12 Vrai ou faux ?

1. Si f est continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$, alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné.
2. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert borné.
3. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert, mais pas forcément borné.
4. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle, mais pas forcément ouvert ni borné.

Exercice 8-101 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$	2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - (x+1)$	3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$
4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$	5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln^2 x - \sqrt{x}$	6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$
7) $\lim\limits_{x\to 1+} \ln x \ln(\ln x)$	8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$	9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x}$

Exercice 8-102 Soit f une fonction décroissante sur $]0; +\infty[$ telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a $f(x) \geq 0$.

Exercice 8-103 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique qui admet une limite en $+\infty$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 8-104

1. Soient $n \in \mathbb{Z}$ un entier impair et $a_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Montrer que l'équation $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ admette une solution réelle.
2. Donner un contre-exemple pour le cas n est pair.

Exercice 8-105 Supposons que f est une fonction continue sur $[0, 1]$ et que $0 \leq f(x) \leq 1$ pour chaque $x \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$. (Indication : si $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$ alors on a un tel point c, sinon appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$.)

Exercice 8-106 Étudier la continuité de la fonction $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin(\pi/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, sur le domaine de définition.

Exercice 8-107 Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles g_m définie par $g_m(x) = \begin{cases} x - m & \text{si } x \leq 3 \\ 1 - mx & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ est une fonction continue.

Exercice 8-108

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f est bornée.
2. En utilisant le résultat précédent, calculer la limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)}$$

Exercice 8-109 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 8-110 Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une application de $[a, b]$ vers $[a, b]$.

1. On suppose que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

Montrer que f est continue. En déduire qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

2. On suppose maintenant que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ avec $x \neq y$ on a

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

Montrer qu'il existe un unique $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 8-111 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I.

1. Soit $a \in I$. Donner une raison pour laquelle :

$$(\lim_{x \to a} f(x) = f(a)) \Rightarrow (\lim_{x \to a} |f(x)| = |f(a)|)$$

2. En utilisant la question précédente, montrer que si f et g sont continues, alors $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ l'est aussi.

Feuille 8 bis : Retour sur les réciproques

Exercice 8bis-1 Montrer que chacune des applictions suivantes est bijective en explicitant sa réciproque :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x + 1$.
2. $g : \,]e, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln(\ln(\ln x)))$.
3. $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $a(s, t) = (2s, 3t)$.
4. $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $b(s, t) = (s + t, s - t)$.
5. $F : [1, 10[\times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $F(t, n) = t \cdot 10^n$.

Exercice 8bis-2

Soit E, F et G trois ensembles et soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On suppose g et $g \circ f$ bijectives. En utilisant la bijection réciproque g^{-1}, montrer que f est bijective.

Exercice 8bis-3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une bijection. On suppose f strictement croissante. Montrer que la bijection réciproque f^{-1} est également strictement croissante.

Exercice 8bis-4

1. Rappeler pourquoi sh est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
2. À l'aide d'une formule vue en cours, calculer la dérivée de la réciproque sh^{-1}.
3. Pour y réel, déterminer une expression de $\mathrm{sh}^{-1}(y)$ et retrouver le résultat du 2.

Exercice 8bis-5

1. Montrer qu'on peut restreindre la fonction ch en une fonction c de $\mathbb{R}_+$ vers $[1, +\infty[$.
2. On considère la fonction $d : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $y \geq 1$ par $d(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$. Calculer $c \circ d$. Les fonctions c et d sont-elles réciproques l'une de l'autre ?
3. Calculer $d \circ c$.

Exercice 8bis-101

1. Soit $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^-$. Montrer que z s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$.
2. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ écrit $re^{i\theta}$ comme à la question 1, on pose $f(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2}$. Montrer que $\mathrm{Re}[f(z)] > 0$ et qu'on peut donc restreindre f en une application de $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ vers $\{w \mid \mathrm{Re}(w) > 0\}$.
3. Montrer que f est bijective en fournissant sa réciproque.

Exercice 8bis-102

Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application. On suppose $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E$. Montrer que f est une bijection.