Feuille 9 : Polynômes

Exercice 1. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les relations suivantes :
1. $P(X^2+1) = P(X)$
2. $P(2X+1) = P(X)$

Exercice 2. Soit $P_n(X) = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)...(1+X^{2^n})$. Calculer les coefficients de P_n.

Exercice 3. Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{C}[X]$: $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

Exercice 4. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On suppose que Q divise P. Montrer que Q^2 divise $PQ' - P'Q$.

Exercice 5. Pour a, b réels, on note $P_{a,b} = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme $P_{a,b}$ est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 6. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(X+1) = \sum_{n=0}^{deg(P)} \frac{P^{(n)}(X)}{n!}$.

Exercice 7. Soit P le polynôme réel : $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1$. On suppose que -1 est une racine de P.

1. Déterminer α.
2. Montrer que -1 est une racine double de P.
3. Montrer que j est une racine multiple de P.
4. Factoriser P, d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et considérons le polynôme à coefficients réels $P = aX^{n+1} + bX^n + c$. Peut-on choisir a, b, c pour que P admette 1 comme racine multiple ? Quel est alors l'ordre de cette racine ?

Exercice 9. On définit une suite de polynôme $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
2. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $P_n(2cos(\theta))$.
4. Donner les racines de P_n.

Exercice 10. Deux polynômes U et V réels vérifient $U(x)\sin(x) + V(x)\cos(x) = 0$ pour tout $x > 0$. Montrez que U et V sont tous deux égaux au polynôme nul.

Exercice 11. Soient α, β, γ les racines de l'équation $X^3 - 5X^2 + 6X - 1$. Déterminer la valeur exacte de

$$\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\gamma} \ .$$

Exercice 12. Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme complexe de racine α, β, γ. Calculer :

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\alpha+\gamma} + \frac{\gamma}{\beta+\alpha} \ .$$

Exercice 13. Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles :
1. $X^n + X^{n-1} + \cdots X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$
2. $X^{11} + 2^{11}$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$
3. $X^4 + 4$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$
4. $X^4 - j$ dans $\mathbb{C}[X]$, où $j = \exp(2i\pi/3)$
5. $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$
6. $X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 14. Soit $P_n = (1+iX)^n - (1-iX)^n$ pour $n \geq 1$. Factoriser le polynôme P_n et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{p} \tan^2(\frac{k\pi}{2p+1})$ et de $\sum_{k=0}^{p-1} \tan^2(\frac{k\pi}{2p})$. On regroupera les termes dont les racines sont opposées.

Exercice 15. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $a_i = a_{n-i}, \forall i \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si $z \in \mathbb{C}^*$ est racine alors $\frac{1}{z}$ est racine.
2. Factoriser $6X^4 - 35X + 112X^2 - 35X + 6$.

Exercice 16. Montrer que le polynôme $X^{163} + 24X^{57} - 6$ a au moins une racine sur $\mathbb{R}$. Même exercice avec le polynôme $X^7 + 3X^2 + 2$.

Exercice 17. Soit $P(X) = X^n - b_1 X^{n-1} - .. - b_n$ un polynôme réel tel que les b_i soient positifs et non tous nuls.

1. Montrer que P a une seule racine p (simple) réelle strictement positive. On considèrera $x \mapsto \frac{P(x)}{x^n}$.
2. Montrer que pour toute autre racine x_0, $|x_0| \leq p$.
3. Soit $Q(X) = a_0 X^{n-1} + .. + a_{n-1}$ un polynôme à coefficients réels strictement positifs. En utilisant ce qui précède montrer que pour tout ξ racine de Q,

$$|\xi| \leq \max_{1 \leq i \leq n-1} \left(\frac{a_i}{a_{i-1}}\right) .$$

   On considèrera $(x - \gamma)Q(X)$.

Exercice 18. Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + .. + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de racines $z_1, ..z_n$. Soit $r_0 = \max_k(|z_k|)$. Montrer que $r_0 < 1 + \max_k(|a_k|)$.

Exercice 19. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note R le reste de la division euclidienne de P par $X - 7$. Montrer que $R = P(7)$.

Exercice 20. Calculer le pgcd des couples de polynômes (P, Q) suivants :

1. $P = 6(X-1)^2(X+2)^3(X^2+1)^4$ et $Q = 15(X-1)(X+7)^3(X^2+1)$,
2. $P = X^7 + 2X^6 - X - 2$ et $Q = X^3 + X^2 - 2X$,
3. $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $Q = X(X-1)^2(X-2)$,
4. $P = X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1$ et $Q = X^7 + X^5 + 8X^4 + X^3 + 8X^2 + 8$.

Exercice 21. Soit $P(X) = X^4 - 5X^3 + 8X^2 - 10X + 12$ et $Q(X) = X^4 + X^2 - 2$. Déterminer le PGCD de P et Q puis déterminer deux polynômes U et V tels que $PU + QV = \mathrm{PGCD}(P, Q)$.

Exercice 22. Soient $m \geq 1$ et $n \geq 1$ deux entiers. Calculer le PGCD des polynômes $X^m - 1$ et $X^n - 1$.

Exercice 23. Pour tout complexe a, on pose $P_a = 2X^3 - 10X^2 + 16X + a \in \mathbb{C}[X]$.

1. Calculer le PGCD de P_a et P'_a.
2. Pour quelles valeurs de a le polynôme P_a admet-il une racine double ? Pour chacune de ces valeurs, décomposer P_a en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 24.

1. Soient P_1, P_2 et Q trois polynômes. Montrer que $P_1 - P_2$ divise $Q(P_1) - Q(P_2)$.
2. Soit P un polynôme. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 25. Soit a et b deux réels distincts et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note λ et μ les restes respectifs de la division euclidienne de P par $X - a$ et par $X - b$.

1. Exprimer à l'aide de λ et μ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
2. Qu'a-t-on montré dans le cas particulier où $\lambda = \mu = 0$?

Exercice 26. Pour quelles valeurs de l'entier $n \geq 1$ le polynôme $P_n = X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible dans $\mathbb{R}[X]$ par $X^2 + X + 1$?

Exercice 9-1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer la formule

$$\prod_{k=0}^{n-1}(X^2 - 2X\cos(2k\pi/n) + 1) = (X^n - 1)^2.$$

Exercice 9-2. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $(P')^2 = 4P$.

Exercice 9-3. Soit $P = X^3 + 3X^2 + 2X + i \in \mathbb{C}[X]$.

1. Prouver que P n'a pas de racine réelle.
2. Soient α, β et γ les trois racines complexes de P. Calculer $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ et $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$.

Exercice 9-4. Soit $P = X^4 + 12X - 5$. Décomposer ce polynôme en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, en sachant qu'il admet deux racines dont la somme vaut 2.

Exercice 9-5. Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^{5n} par $X^5 - 1$.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de $X^{99} + 2X^{42} - 3X^{35} - 2X^{27} + 3$ par $X^5 - 1$.

Exercice 9-6. Cet exercice a pour objet la détermination de tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ qui satisfont à l'identité $(*)$:

$$(X+3)P(X) = XP(X+1).$$

1. Soit P un polynôme vérifiant $(*)$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = XQ$.
2. Déterminer $Q(-1)$ puis $Q(-2)$.
3. En déduire que P est nécessairement de la forme $aX^m(X+1)^n(X+2)^p$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $n,\ m,\ p \in \mathbb{N}-\{0\}$.
4. Démontrer finalement que P vérifie $(*)$ si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = aX(X+1)(X+2)$.

Exercice 9-7. Soit P un polynôme réel. Montrer que P est positif si et seulement si il est la somme de deux carrés. On décomposera P en facteur irreductible de degré 2 pour lesquels on aura vérifié la proposition.

Exercice 9-8. On définit une suite de polynôme $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}^2 = 1 + P_nP_{n+2}$.
2. En déduire $\forall \mathbb{N}, P_n et P_{n+1}$ sont premier entre eux.
3. Etablir que pour tout $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on a :
$$P_{m+n} = P_nP_{m+1} - P_{n-1}P_m\ .$$
4. Monter que $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on a :
$$Pgcd(P_{m+n}, P_n) = Pgcd(P_m, P_n)\ .$$
5. Conclure que $Pgcd(P_m, P_n) = P_{Pgcd(m,n)}$.