Université Claude-Bernard Lyon 1
Semestre d'automne 2017-2018

UE Fondamentaux des Mathématiques I
Groupe MATH

Examen 1 (45 mn) – CORRIGÉ

Exercice 1

1. On utilise la formule vue en cours
$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$
valable pour deux réels quelconques $a \neq b$ et pour tout entier $n \geq 1$. En l'appliquant ici avec $b = 1$ et $n = 4$, on obtient :
$$\frac{a^4 - 1}{a-1} = a^3 + a^2 + a + 1.$$

2. On a $7^{-1/2} \cdot (7a)^{3/2} \cdot 7^{-1}(\sqrt{a})^{5/2} = 7^{-1/2+3/2-1} a^{3/2} (a^{1/2})^{5/2} = 7^0 a^{3/2+5/4} = a^{11/4}$.

Exercice 2

1. Les raisonnements qui suivent sont volontairement **très détaillés** pour bien éclairer la logique des arguments utilisés. Une fois que ces arguments auront été bien compris, on pourra sauter certaines étapes pour arriver plus vite au résultat, comme dans la "version courte" donnée ci-après.

   Version détaillée :
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On utilise le fait que
$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x-1 \geq 0 \\ 1-x & \text{si } x-1 \leq 0 \end{cases}$$
   (ATTENTION : il faut incorporer le cas $x - 1 = 0$ dans les choix possibles ci-dessus. On a donc :
$$\begin{aligned} |x-1| > 2 &\iff (x-1 > 2 \text{ et } x-1 \geq 0) \text{ ou } (1-x > 2 \text{ et } x-1 \leq 0), \\ &\iff (x > 3 \text{ et } x-1 \geq 0) \text{ ou } (-1 > x \text{ et } x-1 \leq 0), \\ &\iff (x > 3) \text{ ou } (x < -1), \\ &\iff x \in]-\infty; -1[\text{ ou } x \in]3; +\infty[. \end{aligned}$$

On conclut que $A =]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$.

Version courte :

$$\begin{aligned}
|x-1| > 2 &\iff (x-1>2) \text{ ou } (x-1<-2),\\
&\iff (x>3) \text{ ou } (x<-1),\\
&\iff x\in]-\infty;-1[\text{ ou } x\in]3;+\infty[.
\end{aligned}$$

On conclut que $A =]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$.

De façon similaire, on a :
Version détaillée :

$$\begin{aligned}
|x-3| \leq 1 &\iff (x-3\leq 1 \text{ et } x-3\geq 0) \text{ ou } (3-x\leq 1 \text{ et } x-3\leq 0),\\
&\iff (0\leq x-3\leq 1) \text{ ou } (0\leq 3-x\leq 1),\\
&\iff (3\leq x\leq 4) \text{ ou } (2\leq x\leq 3),\\
&\iff x\in[3;4] \text{ ou } x\in[2;3]\\
&\iff x\in[2;3]\cup[3;4].
\end{aligned}$$

On en déduit que $B = [2;4]$.

Version courte :

$$\begin{aligned}
|x-3| \leq 1 &\iff -1\leq x-3\leq 1,\\
&\iff 2\leq x\leq 4,\\
&\iff x\in[2;4].
\end{aligned}$$

On en déduit que $B = [2;4]$.

2. On a :
$$A\cap B = (]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[)\cap[2;4] =]3;4]$$
et
$$A\cup B = (]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[)\cup[2;4] =]-\infty;-1[\cup[2;+\infty[.$$

Exercice 3 (Questions de cours)

1. Si a et b sont deux réels et n un entier naturel non nul, alors la formule du binôme de Newton s'écrit :
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$
2. Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F. On a, par définition, les équivalences suivantes (une seule réponse convenait) :

$$\begin{aligned} f \text{ est injective} &\iff (\forall x \in E,\ \forall x' \in E,\ (f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x')) \\ &\iff (\forall x \in E,\ \forall x' \in E,\ (x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x'))) \text{ (en utilisant la contraposée)} \end{aligned}$$

ou, en français, $f : E \to F$ est injective si, et seulement si, tout élément de l'espace d'arrivée F admet au plus un antécédent dans l'espace de départ E.

$$\begin{aligned} f \text{ est surjective} &\iff (\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)) \\ &\iff F = f(E) \end{aligned}$$

ou, en français, $f : E \to F$ est surjective si, et seulement si, tout élément de l'espace d'arrivée F admet au moins un antécédent dans l'espace de départ E.

$$\begin{aligned} f \text{ est bijective} &\iff f \text{ est injective et surjective} \\ &\iff (\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)) \end{aligned}$$

ou, en français, $f : E \to F$ est bijective si, et seulement si, tout élément de l'espace d'arrivée F admet exactement un antécédent dans l'espace de départ E.

3. Soit E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications. Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ l'est aussi et
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |x|^k$$

1. On applique la formule du binôme de Newton rappelée à l'exercice précédent avec $a = |x|$ et $b = 1$, ce qui donne :
$$f(x) = (|x| + 1)^n$$
2. On a $f(1) = f(-1) = 2^n$.
3. La fonction f n'est pas injective puisque 1 et -1 sont différents mais ont la même image.

Exercice 5 Soit n un entier naturel non nul et $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$.

1. En considérant le nouvel indice $j = k - 1$ (on a donc $k = j + 1$), on obtient :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)2^{j+1}.$$

2. (BONUS) On remarque que

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)2^{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} j2^{j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} = [\sum_{j=1}^{n} j2^{j+1} - n2^{n+1}] + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1}$$
$$= 2\sum_{j=1}^{n} j2^{j} - n2^{n+1} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} = 2S_n - n2^{n+1} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1},$$

où l'on a utilisé le fait que, par le simple changement d'indice $j = k$, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{j=1}^{n} j2^j.$$

On a donc montré que

$$S_n = 2S_n - n2^{n+1} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1}.$$

On en déduit que

$$S_n = n2^{n+1} - \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1}.$$

En utilisant l'indication $\sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} = 2^{n+1} - 2$ on obtient :

$$S_n = n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 = (n-1)2^{n+1} + 2 = 2[(n-1)2^n + 1],$$

Remarque : l'égalité $\sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} = 2^{n+1} - 2$ découle de la formule qui donne la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique (ici, la suite $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est de raison 2).