Université Claude-Bernard Lyon 1
Semestre d'automne 2017-2018

UE Fondamentaux des Mathématiques I
Groupe MATH

Examen 1 (45 mn) – Jeudi 28 septembre 2017

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.

La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE

L'énoncé comporte 5 exercices (dont une question bonus).

Exercice 1 Soit a un réel. En supposant qu'elles sont bien définies, donner une forme plus simple des expressions suivantes :

1. (2 pts) $\dfrac{a^4-1}{a-1}$;
2. (2 pts) $7^{-1/2}\cdot(7a)^{3/2}\cdot 7^{-1}(\sqrt{a})^{5/2}$.

Exercice 2

1. (4 pts) Exprimer à l'aide d'intervalles les deux parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

$$A=\{x\in\mathbb{R},\ |x-1|>2\} \qquad \text{et} \qquad B=\{x\in\mathbb{R},\ |x-3|\leq 1\}.$$

2. (2 pts) Exprimer $A\cap B$ et $A\cup B$ à l'aide d'intervalles.

Exercice 3 (Questions de cours)

1. (1 pt) Soient a et b deux réels, et n un entier naturel non nul. Rappeler la formule du binôme de Newton pour le développement de $(a+b)^n$.
2. (2,5 pts) Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Rappeler les définitions de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité de f vues en cours.
3. (1 pt) Soit E, F et G trois ensembles et $f:E\to F$, $g:F\to G$ deux applications.
   On suppose que f et g sont bijectives, et donc $g\circ f$ l'est aussi. Rappeler (sans preuve) comment peut s'exprimer $(g\circ f)^{-1}$.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |x|^k$$

1. (1,5 pts) À l'aide de la formule du binôme de Newton, donner une expression simple de $f(x)$ quand x appartient à $\mathbb{R}$.
2. (1 pt) Déterminer $f(1)$ et $f(-1)$.
3. (1 pt) La fonction f est-elle injective (justifier) ?

Exercice 5 Soit n un entier naturel non nul. On considère la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$$

1. (2 pts) Donner la nouvelle expression de S_n quand on utilise le changement d'indice $j = k - 1$.
2. (BONUS, 3 pts) En utilisant les deux expressions obtenues pour S_n, en déduire que

$$S_n = 2[(n-1)2^n + 1]$$

(on utilisera le fait que $\sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} = 2^{n+1} - 2$).