Université Claude-Bernard Lyon 1 | UE Fondamentaux des Mathématiques I
Semestre d'automne 2017-2018 | Groupe MATH

Examen 2 – Jeudi 19 octobre 2017
Correction

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. (1,5 pts) L'assertion « *f ne prend que des valeurs supérieures ou égales à 1* » peut s'écrire en langage symbolique comme :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 1$$
2. (2 pts) La négation de l'assertion précédente est :
$$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < 1$$
3. (2 pts) L'assertion « *f n'est pas surjective* » peut s'écrire :
$$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y \neq f(x)$$
ou, de façon équivalente :
$$\exists y \in \mathbb{R},\ \mathbf{non}(\exists x \in \mathbb{R},\ y = f(x))$$

Exercice 2 (Questions de cours)

1. (2 pts) Voir le cours pour le graphe de la fonction $\tan$. La périodicité, le domaine de définition, les asymptotes et les tangentes au graphe aux points $(k\pi, 0)$ ont été pris en compte pour la notation. La droite $y = x$ est la tangente à la courbe en $(0,0)$ (car $\tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$), d'où l'on déduit les tangentes à la courbe aux points $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. (2 pts) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^{1000}} = +\infty$ d'après les propriétés de croissance comparée des fonctions exp et polynômiales.
De même $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^{1000} = 0$ d'après les résultats de croissance comparée des fonctions ln et polynômiales.
3. (1,5 pts) Si $g \circ f$ est dérivable en x alors
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

4. (2 pts) Voir le cours pour le graphe de la fonction sh (attention en particulier à la tangente à l'origine, qui est la droite d'équation $y = x$ car $\mathrm{sh}'(0) = \mathrm{ch}(0) = 1$).
Notation : On a noté l'allure du graphe, sa symétrie, le comportement en $-\infty$ et $+\infty$ et la tangente au point $(0,0)$.

Exercice 3 (4 pts) Cet exercice a été noté avec rigueur car il est **fondamental** de bien maîtriser le raisonnement par récurrence.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + 3^n.$$

Il est nécessaire d'utiliser le principe de récurrence à deux pas car la suite est définie à l'aide d'une récurrence à deux pas.

Initialisation (**0,5 pt**) : on a $2^0 + 3^0 = 2$ $\boxed{\text{et}}$ $u_0 = 2$ $\boxed{\text{donc}}$ $u_0 = 2^0 + 3^0$; on a $2^1 + 3^1 = 5$ $\boxed{\text{et}}$ $u_1 = 5$ $\boxed{\text{donc}}$ $u_1 = 2^1 + 3^1$. On en déduit que la propriété est vraie aux rangs 0 et 1.

Hypothèse de récurrence (**2 pts**) :
$\boxed{\text{Soit } n \in \mathbb{N}}$; on suppose que la propriété est vraie $\boxed{\text{aux rangs } n \text{ et } n+1}$, c'est-à-dire :

$$u_n = 2^n + 3^n \text{ et } u_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}.$$

Hérédité (**1 pt**) Par définition de la suite, on a $\boxed{\text{pour l'entier } n \text{ choisi dans l'hypothèse de récurrence}}$:

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \\
&= 5(2^{n+1} + 3^{n+1}) - 6(2^n + 3^n) \quad \boxed{\text{par l'hypothèse de récurrence}} \\
&= 5(2.2^n + 3.3^n) - 6.2^n - 6.3^n \\
&= 10.2^n + 15.3^n - 6.2^n - 6.3^n \\
&= 4.2^n + 9.3^n = 2^{n+2} + 3^{n+2}.
\end{aligned}$$

Conclusion (**0,5 pt**) : $\boxed{\text{Par le principe de récurrence}}$, on en déduit que, $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}}$, $u_n = 2^n + 3^n$.

Exercice 4 On considère les deux ensembles $E = \{1,2\}$ et $F = \{3\}$.

1. (1 pt) $E \times F = \{(1,3), (2,3)\}$.
2. (2 pts)
   $\mathscr{P}(E \times F) = \{\emptyset, \{(1,3)\}, \{(2,3)\}, \{(1,3), (2,3)\}\}$.
   Son cardinal est 4, c'est-à-dire 2^2.
   Rappelons que le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.