Université Claude-Bernard Lyon 1 — UE Fondamentaux des Mathématiques I
Semestre d'automne 2017-2018 — Groupe MATH

Examen 3 – Corrigé – Jeudi 7 décembre 2017

Exercice 1 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+\ln(x)}{x^2} & \text{si } x > 1, \\ x & \text{si } x \in [-1;1], \\ \dfrac{-x^2+\ln(-x)}{x^2} & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

1. (TOTAL=4 pts) *Montrer rigoureusement que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.*
   – **(Continuité sur** $]1,+\infty[$**)** Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont continues sur $]1,+\infty[$. En outre la fonction $x \mapsto x^2$ ne s'annule pas sur $]1,+\infty[$. On en déduit que $x \mapsto \dfrac{x^2+\ln(x)}{x^2}$ est continue sur $]1,+\infty[$.
   – **(Limite en** 1^+**)** Pour tout $x > 1$, $\frac{x^2+\ln(x)}{x^2} = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2}$ et on a $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = \dfrac{\ln(1)}{1} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+\ln(x)}{x^2} = 1$.
   – **(Continuité sur** $]-\infty;-1[$**)** Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \ln(-x)$ sont continues sur $]-\infty;-1[$. En outre la fonction $x \mapsto x^2$ ne s'annule pas sur $]-\infty;-1[$. On en déduit que $x \mapsto \dfrac{-x^2+\ln(-x)}{x^2}$ est continue sur $]-\infty;-1[$.
   – **(Limite en** $(-1)^-$**)** Pour tout $x < -1$, $\frac{-x^2+\ln(-x)}{x^2} = -1 + \frac{\ln(-x)}{x^2}$ et on a $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{\ln(-x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{-x^2+\ln(-x)}{x^2} = -1$.
   – **(Continuité sur** $[-1;1]$**)** La fonction $x \mapsto x$ est continue sur $[-1;1]$. En particulier elle est continue à gauche en 1 et à droite en (-1).
   – **(Continuité en** (-1) **et** 1**)** On déduit de ce qui précède que

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = -1 = f(-1) = \lim_{x\to(-1)^+} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 1 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

   – **(Conclusion)** On en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. (1,5 pts) *Déterminer* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *en justifiant le résultat.*

   On remarque que pour $x > 1$ $f(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2}$. Or $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ d'après les théorèmes de comparaison. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

3. (1,5 pts) *Déterminer* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ *en justifiant le résultat.* On remarque que pour $x < -1$ $f(x) = -1 + \frac{\ln(-x)}{x^2}$. Or $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ d'après les théorèmes de comparaison. On en déduit que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

Exercice 2 On considère une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -3 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 3.$$

1. (2,5 pts, **on note non seulement l'usage du théorème des valeurs intermédiaires mais aussi la volonté de se placer dans ses hypothèses, c-a-d de chercher à montrer que g prend une valeur réelle négative et une valeur réelle positive**) *Montrer rigoureusement que g s'annule au moins une fois sur* $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon = 1$. Comme $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -3$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \leq A$, $g(x) \leq -3+\varepsilon = -2$. Comme $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 3$, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq B$, $g(x) \geq 3 - \varepsilon = 2$. On a ainsi

   $$g(A) \leq -2 \qquad \text{et} \qquad g(B) \geq 2.$$

   La fonction g étant continue sur $\mathbb{R}$ et comme $0 \in]-2,2[$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $c \in]A;B[$ tel que $g(c) = 0$.

2. (3,5 pts, **idem**) *Montrer rigoureusement que l'équation $g(x) = x$ admet au moins une solution.* On définit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $h(x) = g(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme g est continue sur $\mathbb{R}$, h l'est aussi.

   On a $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} (g(x)-x)$. Or $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -3$ et $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$. On déduit des théorèmes sur les limites que $\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$.

   Par ailleurs $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} (g(x) - x)$. Or $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 3$ et $\lim_{x\to\infty} x = +\infty$. On déduit des théorèmes sur les limites que $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.

   On raisonne alors comme à la question précédente. Comme $\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$, il existe $m < 0$ tel que $h(x) \geq 100$ pour tout $x \leq m$. Comme $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$, il existe $M > 0$ tel que $h(x) \leq -100$ pour tout $x \geq M$. On a en particulier

   $$h(m) \geq 100 \qquad \text{et} \qquad h(M) \leq -100.$$

   La fonction h étant continue sur $\mathbb{R}$ et comme $0 \in]-100, 100[$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $c \in]m;M[$ tel que $h(c) = 0$. On a alors $g(c) - c = 0$ donc $g(c) = c$. L'équation $g(x) = x$ admet donc au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3

1. (2 pts) *Résoudre dans* $\mathbb{Z}^2$ *l'équation* $52x+20y=0$.

   On remarque d'abord que $52 = 2*26 = 2^2*13$ et $20 = 2^2*5$. On en déduit que $52 \wedge 20 = 2^2 = 4$. On peut simplifier l'équation en divisant par $52 \wedge 20$, ce qui donne $13x+5y=0$

   Si $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ est une solution de l'équation alors $13x = -5y$ donc $13|5y$. Or $13 \wedge 5 = 1$ donc, d'après le lemme de Gauss, $13|y$. On en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = 13k$. Comme $13x = -5y$ on obtient que $13x = -5*13k$ donc $x = -5k$. On en déduit que les solutions de l'équation sont tous les couples

   $$(-5k;13k), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

2. (5 pts) *En déduire* **toutes** *les solutions dans* $\mathbb{Z}^2$ *de l'équation* $52x+20y=4$.

   On peut diviser l'équation par 4 qui est le PGCD de 52 et 20 d'après ce qui précède. On obtient $13x+5y=1$.

   On peut trouver de tête une solution particulière de l'équation (par exemple $(2;-5)$). Si on n'a pas trouvé cette solution, on peut l'obtenir par l'algorithme d'Euclide :

   $$\begin{array}{lcl} 13 & = & 2*5+3 \\ 5 & = & 1*3+2 \\ 3 & = & 1*2+1 \\ 2 & = & 2*1+0 \end{array}$$

   On vérifie que le pgcd de 13 et 5 est 1 (c'est normal puisqu'on a divisé l'équation par $52 \wedge 20$).

   On remonte alors l'algorithme pour trouver un couple particulier de coefficients de Bézout :

   $$\begin{array}{lcl} 1 & = & 3-1*2 \\ & = & 3-1*(5-1*3) \\ & = & 2*3-5 \\ & = & 2*(13-2*5)-5 \\ & = & 2*13-5*5 \end{array}$$

Une solution particulière de l'équation $13x+5y=1$ est donc $(x_0,y_0)=(2;-5)$. Si $(x';y')$ est une autre solution alors $13(x'-x_0)+5(y'-y_0)=0$ donc, d'après ce qui précède, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x'-x_0=-5k$ et $y'-y_0=13k$, c'est-à-dire $x'=2-5k$ et $y'=-5+13k$. On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $13x+5y=1$ est

$$\{(2-5k;-5+13k), \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

et c'est aussi l'ensemble des solutions de $52x+20y=4$ puisque

$$52x+20y=4 \iff 13x+5y=1$$

Exercice 4 (Bonus)

(2 pts) *A l'aide des congruences, déterminer le reste de la division euclidienne de 5^6 par 7.*

On a $5 \equiv (-2)[7]$ donc $5^2 \equiv 4[7]$, puis $5^4 \equiv 16[7] \equiv 2[7]$.
On en déduit que $5^6 = 5^4 * 5^2 \equiv 4 * 2[7] \equiv 8[7] \equiv 1[7]$.

Une autre méthode fait appel au petit théorème de Fermat, que nous n'avons pas vu en cours et qu'il fallait donc éviter d'utiliser (ou alors **il faut le démontrer** et c'est long !). Il existe plusieurs variantes équivalentes de ce théorème mais l'une d'entre elles affirme que si p est un nombre premier et n est un entier quelconque alors

$$n^{p-1} \equiv 1[p]$$

Or 7 est un nombre premier et $5^6 = 5^{7-1}$ donc, d'après le petit théorème de Fermat,

$$5^6 \equiv 1[7]$$