Examen 3 (45 mn) – Jeudi 7 décembre 2017

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.

La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE

L'énoncé comporte quatre exercices (dont un exercice bonus).

Exercice 1 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \ln(x)}{x^2} & \text{si } x > 1, \\ x & \text{si } x \in [-1; 1], \\ \frac{-x^2 + \ln(-x)}{x^2} & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

1. (4 pts) Montrer *rigoureusement* que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. (1,5 pt) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. (1,5 pts) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Exercice 2 On considère une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3.$$

1. (2,5 pts) Montrer *rigoureusement* que g s'annule.
2. (3,5 pts) Montrer *rigoureusement* que l'équation $g(x) = x$ admet au moins une solution.

Exercice 3

1. (2 pts) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $52x + 20y = 0$.
2. (5 pts) En déduire **toutes** les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $52x + 20y = 4$.

Exercice 4 (Bonus)

(2 pts) A l'aide des congruences, déterminer le reste de la division euclidienne de 5^6 par 7.