Université Claude-Bernard Lyon 1 | UE Fondamentaux des Mathématiques I
Semestre d'automne 2017-2018 | Groupe MATH

Partiel (2h) – CORRECTION – Jeudi 16 novembre 2017

Exercice 1

1. (1 pt) *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 - 2Z + 2 = 0$.*

Le discriminant de l'équation est $\Delta = -4 = (2i)^2$. Les solutions de l'équation sont donc

$$Z_1 = \frac{2-2i}{2} = 1 - i \qquad \text{et} \qquad Z_2 = \bar{Z}_1 = 1 + i.$$

2. (1 pt) *Rappelez quelles sont les racines cubiques de l'unité.*

D'après le cours, les racines cubiques de l'unité sont les nombres

$$1, \quad e^{\frac{2i\pi}{3}}, \quad e^{\frac{4i\pi}{3}}.$$

3. (2 pts) *En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$.*

On remarque que $z^6 - 2z^3 + 2 = (z^3)^2 - 2z^3 + 2$. Les solutions de l'équation sont donc les complexes z tels que z^3 soit solution de l'équation $Z^2 - 2Z + 2 = 0$. Or, d'après la première question, les solutions de cette seconde équation sont $Z_1 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$ et $Z_2 = 1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$. Une racine cubique particulière de Z_1 est $a = 2^{\frac{1}{6}}e^{-\frac{i\pi}{12}}$ et donc, d'après le cours, on peut grâce aux racines cubiques de l'unité obtenir toutes les solutions de $z^3 = Z_1$: elles forment l'ensemble

$$\{a, ae^{\frac{2i\pi}{3}}, ae^{\frac{4i\pi}{3}}\} = \{2^{\frac{1}{6}}e^{-\frac{i\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{7i\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{15i\pi}{12}}\}$$

Une racine cubique particulière de Z_2 est $\bar{a}$ (car $Z_2 = \bar{Z}_1$) et les solutions de $z^3 = \bar{a}^3$ forment donc l'ensemble

$$\{\bar{a}, \bar{a}e^{\frac{2i\pi}{3}}, \bar{a}e^{\frac{4i\pi}{3}}\} = \{2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{i\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{9i\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{17i\pi}{12}}\}$$

L'ensemble des solutions de $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$ est donc

$$\{2^{\frac{1}{6}}e^{-\frac{i\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{7i\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{15i\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{i\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{9i\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{17i\pi}{12}}\}$$

Exercice 2

1. (2 pts) *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$. *Déterminer* $\cos(4\theta)$ *en fonction de* $\cos(\theta)$.

On a

$$\begin{aligned}\cos(4\theta) &= 2\cos^2(2\theta)-1\\ &= 2(2\cos^2\theta-1)^2-1\\ &= 2(4\cos^4\theta-4\cos^2\theta+1)-1\\ &= 8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1\end{aligned}$$

2. (1 pt) *En déduire la valeur de* $\cos(\frac{\pi}{8})$.

On pose $\theta=\frac{\pi}{8}$. On a $\cos(4\theta)=\cos(\frac{\pi}{2})=0$ donc, d'après la question précédente,

$$8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1=0.$$

L'équation $8x^2-8x+1=0$ a pour discriminant $\Delta=32$ et admet donc pour solutions

$$x_1=\frac{8-2\sqrt{8}}{16}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{8}} \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{8}}.$$

On a donc

$$\cos^2(\frac{\pi}{8})=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{8}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{8}}$$

Or $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{4}$ donc $\cos^2(\frac{\pi}{8})>\cos^2(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$. On en déduit que

$$\cos(\frac{\pi}{8})=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{8}}}$$

Exercice 3 Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définie par $f(z)=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ pour tout $z\in\mathbb{C}$.

1. (0,5 pt) *Quels sont les complexes invariants par* f, *c'est-à-dire tels que* $f(z)=z$ *?*

Si $f(z)=z$ alors $z+\frac{1}{z}=2z$ donc $\frac{1}{z}=z$ d'où $z^2=1$. Les complexes invariants par f sont donc -1 et 1.

2. (2 pts) *On identifie chaque complexe* $z\in\mathbb{C}$ *avec son point image* M_z *dans le plan muni d'un repère orthonormal.*
   Soit z *l'affixe d'un point du cercle trigonométrique* $C(0,1)$. *Quelle est sa forme trigonométrique ? En déduire l'image par* f *du cercle trigonométrique.*

Si z est l'affixe d'un point du cercle trigonométrique alors il peut s'écrire $z=e^{i\theta}$ avec $\theta\in\mathbb{R}$.
On a $f(e^{i\theta})=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}})=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=\cos(\theta)$.
Les points du cercle $C(0,1)$ ont pour affixes tous les complexes $e^{i\theta}$ avec $\theta\in\mathbb{R}$. Leurs images par f sont donc les points associés aux affixes $\cos(\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$. Or, lorsque θ parcourt $\mathbb{R}$, $\cos(\theta)$ parcourt l'intervalle $[-1;1]$. L'image par f du cercle $C(0,1)$ est donc le segment $[-1;1]\times\{0\}$ du plan.

Exercice 4 On considère la suite (u_n) définie par récurrence de la façon suivante : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 = 2u_n$.

1. (1,5 pts) *Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.*

Initialisation : On a $u_0 = 1$ donc la propriété est vraie à l'ordre 0.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \geq 1$ (hypothèse de récurrence).
Hérédité : par définition, $u_{n+1}^2 = 2u_n$ donc, par l'hypothèse de récurrence, $u_{n+1}^2 \geq 2$.
Comme $u_{n+2}^2 = 2u_{n+1}$, u_{n+1} est positif. On en déduit que $u_{n+1} \geq \sqrt{2} > 1$.
Par le principe de récurrence, on a donc $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. (1 pt) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\ln u_{n+1}$ en fonction de $\ln u_n$.*

D'après la question précédente, tous les u_n sont supérieurs à 1 donc on peut calculer leur logarithme. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{n+1}^2) = \ln(2u_n)$ donc $2\ln(u_{n+1}) = \ln 2 + \ln u_n$, d'où

$$\ln(u_{n+1}) = \frac{\ln 2 + \ln u_n}{2}.$$

On définit la suite (v_n) par la relation $v_n = \ln u_n - \ln 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. (1 pt) *Montrer que (v_n) est une suite géométrique.*

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2 = \frac{\ln 2 + \ln u_n}{2} - \ln 2 = \frac{\ln u_n - \ln 2}{2} = \frac{v_n}{2}.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

4. (0,5 pt) *Calculer la limite de (v_n) puis celle de (u_n).*

Il suffit de remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0(\frac{1}{2})^n$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que $\ln u_n - \ln 2$ tend vers 0 donc $\ln u_n \longrightarrow \ln 2$ d'où $u_n \longrightarrow 2$.

Exercice 5 Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$

1. (0,5 pt) *Montrer que (w_n) est croissante.*

Il suffit de remarquer que, pour tout $n \geq 1$,

$$w_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} = u_n + \frac{1}{(n+1)!} > w_n$$

On en déduit que la suite (w_n) est strictement croissante.

2. (1 pt) *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.*

Soit $n \in N^*$. Si $n = 1$ on a clairement $1 \leq \frac{1}{2^0}$. Si $n \geq 2$, on remarque que $\ell \geq 2$ pour tout $\ell \in [\![2, n]\!]$ donc

$$n! = \prod_{\ell=2}^{n} \ell \geq \prod_{\ell=2}^{n} 2 = 2^{n-1}.$$

On en déduit que $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

3. (1 pt) *En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n < 2$.*

D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}.$$

La dernière expression correspond à la somme des n premiers termes de la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. D'après le cours, cette somme vaut

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^0} \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2(1 - \frac{1}{2^n}) < 2$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n < 2$.

4. (1 pt) *En déduire que (w_n) est convergente et que sa limite ℓ vérifie $\ell \leq 2$.*

La suite (w_n) est croissante et majorée par 2. On déduit du théorème de la limite monotone que (w_n) est convergente et que sa limite ℓ vérifie $\ell \leq 2$.

Exercice 6 Les énoncés suivants sont-ils vrais ? Si c'est le cas, démontrez-les et sinon, donnez un contre-exemple.

1. (0,5 pt) *Si (u_n) converge alors elle est monotone.*

C'est faux, il suffit de considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ qui converge vers 0 mais n'est pas monotone.

2. (0,5 pt) *Si (u_n) diverge alors elle est non bornée.*

C'est faux, il suffit de considérer la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $v_n = (-1)^n$ qui diverge mais est bornée.

3. (1 pt) *Si $(|u_n|)$ converge vers 0 alors (u_n) converge vers 0.*

C'est vrai puisque $|u_n| \to 0$ implique que $|u_n - 0| \to 0$ et donc $u_n \to 0$.

4. (1 pt) *Si $(|u_n|)$ converge vers 1 alors (u_n) converge vers -1 ou (u_n) converge vers 1.*

C'est faux. Prenons la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $w_n = (-1)^n$. La suite $(|w_n|)$ est constante, égale à 1. Mais la suite (w_n) diverge (donc en particulier elle ne converge ni vers (-1), ni vers 1).

Exercice 7 [BONUS] Soit X un ensemble et f une application de X dans l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des parties de X. Si $x \in X$, $f(x)$ est donc par définition un sous-ensemble de X. On note A l'ensemble des $x \in X$ vérifiant $x \notin f(x)$, i.e.

$$A = \{x \in X,\ x \notin f(x)\}.$$

1. (2 pts) *Démontrer par l'absurde qu'il n'existe aucun $x_0 \in X$ tel que $A = f(x_0)$.*

Supposons par l'absurde qu'il existe x_0 tel que $A = f(x_0)$. On a alors deux possibilités :
- soit $x_0 \in A$; c'est absurde car $A = f(x_0)$ et A est l'ensemble des x tels que $x \notin f(x)$.
- soit $x_0 \notin A$; on a alors $x_0 \notin f(x_0)$ donc $x_0 \in A$, ce qui est absurde.

2. (0,5 pt) *En déduire qu'il n'existe pas de bijection entre X et $\mathscr{P}(X)$.*

La construction précédente montre que, quelle que soit l'application f qu'on considère entre X et $\mathscr{P}(X)$, il existera toujours un élément A de $\mathscr{P}(X)$ qui n'est pas atteint par f. Aucune application entre X et $\mathscr{P}(X)$ n'est donc surjective, ni a fortiori bijective.