Université Claude-Bernard Lyon 1 — UE Fondamentaux des Mathématiques I
Semestre d'automne 2017-2018 — Groupe MATH

Partiel (2h) – Jeudi 16 novembre 2017

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.

La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE

L'énoncé comporte 7 exercices (dont un exercice bonus).

Exercice 1

1. (1 pt) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 - 2Z + 2 = 0$.
2. (1 pt) Rappelez quelles sont les racines cubiques de l'unité.
3. (2 pts) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$.

Exercice 2

1. (2 pts) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
2. (1 pt) En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{8})$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1. (0,5 pt) Quels sont les complexes invariants par f, c'est-à-dire tels que $f(z) = z$?
2. (2 pts) On identifie chaque complexe $z \in \mathbb{C}$ avec son point image M_z dans le plan muni d'un repère orthonormal.
   Soit z l'affixe d'un point du cercle trigonométrique $C(0,1)$. Quelle est sa forme trigonométrique ? En déduire l'image par f du cercle trigonométrique.

Exercice 4 On considère la suite (u_n) définie par récurrence de la façon suivante : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 = 2u_n$.

1. (1,5 pts) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.
2. (1 pt) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\ln u_{n+1}$ en fonction de $\ln u_n$.

On définit la suite (v_n) par la relation $v_n = \ln u_n - \ln 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. (1 pt) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
4. (0,5 pt) Calculer la limite de (v_n) puis celle de (u_n).

Exercice 5 Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$

1. (0,5 pt) Montrer que (w_n) est croissante.
2. (1 pt) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
3. (1 pt) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n < 2$.
4. (1 pt) En déduire que (w_n) est convergente et que sa limite ℓ vérifie $\ell \leq 2$.

Exercice 6 Les énoncés suivants sont-ils vrais ? Si c'est le cas, démontrez-les et sinon, donnez un contre-exemple.

1. (0,5 pt) Si (u_n) converge alors elle est monotone.
2. (0,5 pt) Si (u_n) diverge alors elle est non bornée.
3. (1 pt) Si $(|u_n|)$ converge vers 0 alors (u_n) converge vers 0.
4. (1 pt) Si $(|u_n|)$ converge vers 1 alors (u_n) converge vers -1 ou (u_n) converge vers 1.

Exercice 7 [BONUS] Soit X un ensemble et f une application de X dans l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des parties de X. Si $x \in X$, $f(x)$ est donc par définition un sous-ensemble de X. On note A l'ensemble des $x \in X$ vérifiant $x \notin f(x)$, i.e.

$$A = \{x \in X,\ x \notin f(x)\}.$$

1. (2 pts) Démontrer par l'absurde qu'il n'existe aucun $x_0 \in X$ tel que $A = f(x_0)$.
2. (0,5 pt) En déduire qu'il n'existe pas de bijection entre X et $\mathscr{P}(X)$.