Coefficient d'ajustement de la théorie de la ruine dans des contextes de dépendance

Véronique Maume-Deschamps

Séminaire Probabilités ICJ

9 octobre 2008

Travail en cours avec E. Marceau et H. Cossette.

Objectif : proposer un cadre de dépendance temporelle dans lequel on a des résultats d'estimation du coefficient d'ajustement de la théorie de la ruine.

Problématique

On considère un processus de risque $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

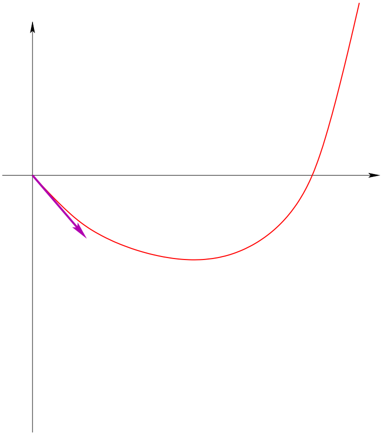
$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

($X_i = P_i - G_i$: pertes - gains à l'année i).
R_M est l'événement $\{Y_n > M \text{ pour un } n \geq 1\}$ ruine.
Évaluer $\mathbb{P}(R_M)$ (mesure de risque).

Coefficient d'ajustement I.

Dans le cas i.i.d., le coefficient d'ajustement $w > 0$ est l'unique solution positive de $\lambda(w) = 0$ avec

$$\lambda(t) = \log \mathbb{E}\left[\exp(tX_1)\right]$$



s'il existe (condition de Mammischt).

Coefficient d'ajustement II.

T le temps de ruine, ($T = \inf\{k \in \mathbb{N} \ / \ Y_k > M\}$),

$$\mathbb{P}(R_M) = \mathbb{P}(T < \infty) = \frac{e^{-wM}}{\mathbb{E}[e^{-wY_T} | T < \infty]}, \text{ (Gerber)}$$

$$\mathbb{P}(R_M) \leq e^{-wM}, \text{(Lundberg)}$$

Résultat asymptotique

$$\lim_{M \to \infty} \frac{\log \mathbb{P}(R_M)}{M} = -w.$$

Coefficient d'ajustement II.

T le temps de ruine, ($T = \inf\{k \in \mathbb{N} \ / \ Y_k > M\}$),

$$\mathbb{P}(R_M) = \mathbb{P}(T < \infty) = \frac{e^{-wM}}{\mathbb{E}[e^{-wY_T} | T < \infty]}, \text{ (Gerber)}$$

$$\mathbb{P}(R_M) \leq e^{-wM}, \text{(Lundberg)}$$

Résultat asymptotique

$$\lim_{M \to \infty} \frac{\log \mathbb{P}(R_M)}{M} = -w.$$

Résultat de Müller et Pflug

S'il existe $u_0 > 0$ tel que

- pour tout $0 < u < u_0$,

$$c(u) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \mathbb{E}\left[\exp(uY_n)\right]}{n} \text{ existe.} \tag{1}$$

- il existe $0 < u < u_0$ tel $c(u) = 0 \Rightarrow w^d$.

alors,

$$\lim_{M\to\infty} \frac{\log \mathbb{P}(R_M)}{M} = -w^d. \tag{2}$$

Si i.i.d. alors $w = w^d$.

Estimation de w et w^d si l'hypothèse d'indépendance n'est pas satisfaite

Quelques résulats d'estimation

- Estimation de w (avec TCL) dans le cas i.i.d. par Embrechts, Grübel, Pitts.

Quelques résulats d’estimation

- Estimation de w (avec TCL) dans le cas i.i.d. par Embrechts, Grübel, Pitts.
- Cas ARMA(p,q) :

$$X_n = \alpha_1 X_{n-1} + \cdots + \alpha_k X_{n-k} + \varepsilon_n + \beta_1 \varepsilon_{n-1} + \beta_q \varepsilon_{n-q}.$$

Quelques résulats d'estimation

- Estimation de w (avec TCL) dans le cas i.i.d. par Embrechts, Grübel, Pitts.
- Cas ARMA(p,q) :

$$X_n = \alpha_1 X_{n-1} + \cdots + \alpha_k X_{n-k} + \varepsilon_n + \beta_1 \varepsilon_{n-1} + \beta_q \varepsilon_{n-q}.$$

$\alpha = 1 - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)$ et $\beta = 1 + \beta_1 + \cdots + \beta_q$,
Relation avec le coefficient d'ajustement de l'innovation ($w^d = \frac{\alpha}{\beta} w$) par Gerber, estimation par Christ et Steinbach.

α et Φ mélange

Coefficients α et Φ

$$\alpha(\mathcal{U},\mathcal{V}) = \sup_{U\in\mathcal{U},\ V\in\mathcal{V}} |\mathbb{P}(U\cap V) - \mathbb{P}(U)\mathbb{P}(V)|,$$

$$\Phi(\mathcal{U},\mathcal{V}) = \sup_{U\in\mathcal{U},\ V\in\mathcal{V}} \left|\frac{\mathbb{P}(U\cap V)}{\mathbb{P}(U)} - \mathbb{P}(V)\right|.$$

α et Φ mélange

Coefficients α et Φ

$$\alpha(\mathcal{U},\mathcal{V}) = \sup_{U\in\mathcal{U},\, V\in\mathcal{V}} |\mathbb{P}(U\cap V) - \mathbb{P}(U)\mathbb{P}(V)|,$$

$$\Phi(\mathcal{U},\mathcal{V}) = \sup_{U\in\mathcal{U},\, V\in\mathcal{V}} \left|\frac{\mathbb{P}(U\cap V)}{\mathbb{P}(U)} - \mathbb{P}(V)\right|.$$

α et Φ mélange pour un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$

$$\alpha_X(r) = \sup_{i\in\mathbb{Z}} \alpha(\sigma(X_t,\ t\leq i),\ \sigma(X_t,\ t\geq i+r)) \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

$$\Phi_X(r) = \sup_{i\in\mathbb{Z}} \Phi(\sigma(X_t,\ t\leq i),\ \sigma(X_t,\ t\geq i+r)) \xrightarrow{r\to\infty} 0.$$

α et Φ mélange

Coefficients α et Φ

$$\alpha(\mathcal{U},\mathcal{V}) = \sup_{U\in\mathcal{U},\ V\in\mathcal{V}} |\mathbb{P}(U\cap V) - \mathbb{P}(U)\mathbb{P}(V)|,$$

$$\Phi(\mathcal{U},\mathcal{V}) = \sup_{U\in\mathcal{U},\ V\in\mathcal{V}} \left|\frac{\mathbb{P}(U\cap V)}{\mathbb{P}(U)} - \mathbb{P}(V)\right|.$$

α et Φ mélange pour un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$

$$\alpha_X(r) = \sup_{i\in\mathbb{Z}} \alpha(\sigma(X_t,\ t\le i),\ \sigma(X_t,\ t\ge i+r)) \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

$$\Phi_X(r) = \sup_{i\in\mathbb{Z}} \Phi(\sigma(X_t,\ t\le i),\ \sigma(X_t,\ t\ge i+r)) \xrightarrow{r\to\infty} 0.$$

Coefficients de mélange

Dépendance faible

(Dedecker, Doukhan, Lang, León, Louhichi, Prieur).

$$\varepsilon(k) = \sup \frac{|\mathrm{Cov}(f(X_{i_1},\ldots,X_{i_u}),g(X_{j_1},\ldots,X_{j_v}))|}{\Psi(f,g)} \tag{3}$$

le sup est pris sur $\mathbf{i} = (i_1,\ldots,i_u)$, $\mathbf{j} = (j_1,\ldots,j_v)$ tels que :

$$i_1 < \cdots < i_u \leq i_u + k \leq j_1 < \cdots < j_v$$

et les fonctions $f \ : \ \mathbb{R}^u \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \ : \ \mathbb{R}^v \longrightarrow \mathbb{R}$ bornées et Lipschitz

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{p} |x_i - y_i|,\ x = (x_1,\ldots,x_p),\ y = (y_1,\ldots,y_p).$$

Types de dépendance

Définition

La notion de dépendance faible dépend de $\Psi(f,g)$*,*
$f \ : \ \mathbb{R}^u \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$ *et* $g \ : \ \mathbb{R}^v \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$

1. $\Psi(f,g) = ulip(f)\|g\|_\infty$*, on parle de* θ*-dépendance faible si* $(\varepsilon(k))_{k\in\mathbb{N}}$ *est sommable.*
2. $\Psi(f,g) = ulip(f)\|g\|_\infty + v\|f\|_\infty lip(g)$*, on parle de* η*-dépendance faible si* $(\varepsilon(k))_{k\in\mathbb{N}}$ *est sommable.*

D'autres types de dépendance font intervenir d'autres fonctions Ψ, d'autres encore la norme L^1.
Pour les coefficients de mélange probabilistes classiques, le sup porte sur toutes les fonctions bornées avec norme L^1 et L^∞ pour le Φ mélange.

Modèles

- Shifts de Bernouilli
- Processus de type AR non linéaire
- Processus GARCH, ARCH(∞) de type contractant

Modèles

- Shifts de Bernouilli

$$X_n = H((\xi_{n-i})_{i\in\mathbb{Z}}),$$

avec $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ i.i.d. et

$$\mathbb{E}\left|H((\xi_{n-i})_{i\in\mathbb{Z}}) - H((\xi_{n-i})_{|i|\leq r})\right| = \delta_r$$

(inclus les ARMA stationnaires)
$\Rightarrow$ η dépendance avec $\varepsilon(r) = 2\delta_{\frac{r}{2}}$

- Processus de type AR non linéaire
- Processus GARCH, ARCH(∞) de type contractant

Modèles

- Shifts de Bernouilli
- Processus de type AR non linéaire

$$X_n = r(X_{n-1}, \ldots, X_{n-d}) + \xi_n,$$

  avec r contractant.
- Processus GARCH, ARCH(∞) de type contractant

Modèles

- Shifts de Bernouilli
- Processus de type AR non linéaire
- Processus GARCH, ARCH(∞) de type contractant

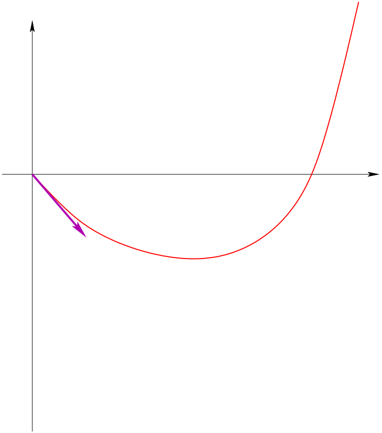
$$\begin{cases} r_t & = & \sigma_t \xi_t \\ \sigma_t^2 & = & \beta_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \xi_{t-j} \end{cases}$$

Condition d'existence pour w

CNS de Mammisch d'existence de w = condition (E).

1. $\mathbb{E}(X_1) < 0$,
2. $\mathbb{P}(X_1 > 0) > 0$ et
3. soit $a < \infty$ et $\mathbb{E}((e^{aX_1})-) \geq 1$ ou bien $a = \infty$ avec

$$a = \sup\{t \geq 0,\ \mathbb{E}(e^{tX_1}) < \infty\}.$$



Condition d'existence pour w^d

On montre le résultat suivant.

Proposition

On suppose :

1. $c(u)$ *est bien définie sur* $[0, a[$,
2. $\mathbb{E}(X_1) < 0$,
3. *pour n assez grand,* $\mathbb{P}(Y_n > 0) > 0$ *et si* $a < \infty$, $\mathbb{E}((e^{aY_n})-) \geq 1$.

Alors il existe une unique solution à l'équation $c(u) = 0 \Rightarrow w^d$.
De plus w^d *est la limite de* w_n *avec* w_n *solution* > 0 *(unique) de* $c_n(u) = 0$.

Estimation de w

On estime $\mathbb{E}(e^{tX_1})$ par sa version empirique : pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\hat{m}_k(t) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e^{tX_i},$$

Alors $\widehat{w}$ est la solution positive de $\log \hat{m}_k(t) = 0$.
Estimateur consistent ? + TLC ?

Estimation de w^d

$\mathbb{E}(e^{tY_r})$ est estimé par sa version empirique :

$$\hat{M}_k^r(t) = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} e^{tZ_i^r},$$

avec $Z_i^r = \sum_{j=1}^{r} X_{j+ir}$

$\widehat{w}_r$ est la solution positive de $\frac{1}{r}\log \hat{M}_k^r(t) = 0$.

$$\begin{array}{rcccc}
X_1 & \cdots & X_r & \sum \Rightarrow & Z_0^r \\
X_{r+1} & \cdots & X_{2r} & \sum \Rightarrow & Z_1^r \\
 & \vdots & & \vdots & \vdots \\
X_{(k-1)r+1} & \cdots & X_{kr} & \sum \Rightarrow & Z_{k-1}^r.
\end{array}$$

Pour $r = r(k)$, $\widehat{w}_r$ estimateur consistant de w^d ?

Existence presque sûre

Avec les hypothèses de θ ou η dépendance et d'existence de w et w^d, $\widehat{w}$ et $\widehat{w}_r$ existent presque sûrement.
Résulte du fait que la η (ou θ) dépendance implique l'ergodicité.
Si $\mathbb{E}(X_1) < 0$ et $\mathbb{P}(X_1 > 0) > 0$, on a éventuellement presque sûrement

- $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i < 0$
- $\{i = 1, \ldots, k \ / \ X_i > 0\}$ non vide.

$\Rightarrow$ existence de $\widehat{w}$.

Existence presque sûre

Avec les hypothèses de θ ou η dépendance et d'existence de w et w^d, $\widehat{w}$ et $\widehat{w}_r$ existent presque sûrement.
Résulte du fait que la η (ou θ) dépendance implique l'ergodicité.
Si $\mathbb{E}(X_1) < 0$ et pour r assez grand, $\mathbb{P}(Y_r > 0) > 0$, on a éventuellement presque sûrement

- $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Z_i^r < 0$
- $\{i = 1, \ldots, k \ / \ Z_i^r > 0\}$ non vide.

$\Rightarrow$ existence de $\widehat{w}_r$

Propriétés d'héritage I

$(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ η-dépendant de coefficient de mélange $\varepsilon(k)$ $\Rightarrow$ $(e^{tX_i})_{i\in\mathbb{N}}$ est η dépendant de coefficient de mélange $O(\varepsilon(k)^{\frac{\kappa}{t+\kappa}})$ avec κ tel que $t+\kappa\in[0,a[$

Propriétés d'héritage I

$X_i^{(M)} = \min(X_i, M)$, $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ des multi-indices

$$i_1 < \cdots < i_u \leq i_u + r \leq j_1 < \cdots < j_v,$$

$$\begin{array}{ll} F(X_{\mathbf{i}}) = f(e^{tX_{i_1}}, \ldots, e^{tX_{i_u}}) & F^{(M)}(X_{\mathbf{i}}) = (e^{tX_{i_1}^{(M)}}, \ldots, e^{tX_{i_u}^{(M)}}), \\ G(X_{\mathbf{j}}) = g(e^{tX_{j_1}}, \ldots, e^{tX_{j_v}}) & G^{(M)}(X_{\mathbf{j}}) = (e^{tX_{j_1}^{(M)}}, \ldots, e^{tX_{j_v}^{(M)}}). \end{array}$$

On a,

$$\begin{aligned} |\mathrm{Cov}(F(X_{\mathbf{i}}), G(X_{\mathbf{j}}))| \leq\ & 2\|f\|_\infty \mathbb{E}(|G(X_{\mathbf{j}}) - G^{(M)}(X_{\mathbf{j}})|) \\ & + 2\|g\|_\infty \mathbb{E}(|F(X_{\mathbf{i}}) - F^{(M)}(X_{\mathbf{i}})|) \\ & + |\mathrm{Cov}(F^{(M)}(X_{\mathbf{i}}), G^{(M)}(X_{\mathbf{j}}))|. \end{aligned}$$

Propriétés d'héritage I

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|G(X_{\mathbf{j}}) - G^{(M)}(X_{\mathbf{j}})|) &\leq \operatorname{lip}(g) \sum_{k=1}^{v} \mathbb{E}(|e^{tX_{j_k}} - e^{tX_{j_k}^{(M)}}|) \\ &\leq 2\operatorname{lip}(g) e^{-\kappa M} \mathbb{E}(e^{(t+\kappa)X_1})\end{aligned}$$

La η-dépendance pour $X_i^{(M)}$ donne :

$$|\mathrm{Cov}(F^{(M)}(X_{\mathbf{i}}), G^{(M)}(X_{\mathbf{j}}))| \leq t(u \operatorname{lip}(f)\, \|g\|_\infty + v \operatorname{lip}(g) \|f\|_\infty) e^{tM} \varepsilon(r).$$

Finalement,

$$\begin{aligned}|\mathrm{Cov}(F(X_{\mathbf{i}}), G(X_{\mathbf{j}}))| &\leq (u \operatorname{lip}(f)\, \|g\|_\infty + v \operatorname{lip}(g) \|f\|_\infty) \\ &\quad \times (te^{tM} \varepsilon(r) + 2e^{-\kappa M} \mathbb{E}(e^{(t+\kappa)X_1})).\end{aligned}$$

On conclue en choisissant $M = -\frac{1}{t+\kappa} \ln(\varepsilon(r))$.

Propriétés d'héritage II.

$(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ η-dépendant de coefficient de mélange $\varepsilon(k) \Rightarrow (Z_i^r)_{i\in\mathbb{N}}$ est η dépendant de coefficient de mélange $r\varepsilon(r(k-1))$

$$Z_i^r = \sum_{j=1}^{r} X_{j+ir}\,.$$

Propriétés d'héritage II.

$(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ η-dépendant de coefficient de mélange $\varepsilon(k) \Rightarrow (Z_i^r)_{i\in\mathbb{N}}$ est η dépendant de coefficient de mélange $r\varepsilon(r(k-1))$

$$Z_i^r = \sum_{j=1}^{r} X_{j+ir}.$$

Pour f et g des fonctions Lipschitz, $(\mathbf{i},\mathbf{j})$ des multi-indices $i_1 < \cdots < i_u \leq i_u + k \leq j_1 < \cdots < j_v$,

$$\begin{aligned} & \mathrm{Cov}(f(Z_{i_1}^r,\ldots,Z_{i_u}^r),g(Z_{j_1}^r,\ldots,Z_{j_v}^r)) \\ = \quad & \mathrm{Cov}\Big(\widetilde{f}(X_{i_1r+1},\ldots,X_{i_1(r+1)},X_{i_2r+1},\ldots,X_{(i_u+1)r}), \\ & \widetilde{g}(X_{j_1r+1},\ldots,X_{j_1(r+1)},X_{j_2r+1},\ldots,X_{(j_v+1)r})) \\ \leq \quad & r\varepsilon((k-1)r)\,(u\,\mathrm{lip}f\,\|g\|_\infty + v\|f\|_\infty \mathrm{lip}f), \end{aligned}$$

avec $\widetilde{\varphi}(x_1,\ldots,x_r,\ldots,x_{rk}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{r} x_i,\ldots,\sum_{i=1}^{r} x_{r(k-1)+i}\right).$

TCL pour $\widehat{w}$

Théorème

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un processus stationnaire* η *dependant avec* $\varepsilon(n) = O(\theta^n)$, $0 < \theta < 1$, *pour* $t \in [0, a[$,

$$\Gamma^2(t) = \sum_{n\geq 0} Cov(e^{tX_0}, e^{tX_n}) \text{ est bien défini sur } [0, a[\text{ et}$$

$$\sqrt{n}\left(\widehat{m}_n(t) - \mathbb{E}(e^{tX_0})\right) \xrightarrow{n\to\infty} \mathcal{N}(0, \Gamma^2(t)).$$

On en déduit que $\widehat{w}$ *converge en proba vers* w *et*

$$\sqrt{n}\,(\widehat{w} - w) \xrightarrow{n\to\infty} \mathcal{N}(0, \Gamma_i^2)$$

avec $\Gamma_i^2 = \dfrac{\Gamma^2(w)}{\mathbb{E}(X_1 e^{wX_1})^2}$.

Preuve

TCL de Doukhan - Wintenberger
$(e^{tX_0}, \ldots, e^{tX_n})$ est η-dépendant $\varepsilon(r) \leftrightarrow (\varepsilon(r))^{\frac{\kappa}{\kappa+t}}$, $t+\kappa \in [0, a[$.
L'hypothèse $\varepsilon(k) = O(\theta^k)$ permet de garantir $(\varepsilon(r))^{\frac{\kappa}{\kappa+t}}$ sommable (mais n'est pas nécessaire).
Le TCL pour $\widehat{w}$ se déduit du TCL pour $\widehat{m}_n(t)$.

Convergence en proba pour $\widehat{w}_r$

On peut appliquer le théorème ci-dessus à Z_i^r
$\varepsilon(k) \leftrightarrow r\varepsilon(r(k-1))$ on obtient :

$$\sqrt{k}\left(\widehat{M}_k^r(t) - \mathbb{E}(e^{tZ_1^r})\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma_r^2(t))$$

avec

$$\Gamma_r^2(t) = \sum_{n \geq 0} \mathrm{Cov}(e^{tZ_0^r}, e^{tZ_n^r}) \text{ et}$$

$$\sqrt{k}(\widehat{w}_r - w_r) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma_r^2)$$

avec

$$\Gamma_r^2 = \frac{\Gamma_r^2(w_r)}{\mathbb{E}(Z_1^r e^{w_r Z_1^r})^2}.$$

On en déduit que $\widehat{w}_r$ converge en probabilité vers w_r (quand $k \longrightarrow \infty$).

Convergence en proba vers w^d

On a $w_r \xrightarrow{r \to \infty} w^d$

info supplémentaires sur la vitesse de convergence de $\widehat{w}_r$ vers w_r pour obtenir la convergence en proba de $\widehat{w}_r$ vers w^d.

Inégalités exponentielles

Proposition (DDLLLP)

$(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un processus η faiblement dépendant avec $\varepsilon(k) \leq C\theta^k$, $C > 0$, $0 < \theta < 1$. Soit $W_i = F(X_i)$ avec F une fonction bornée et Lipschitz, $\|F\|_\infty \leq M$. Soit $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} W_i$, alors $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$

$$\mathbb{P}\left(|\frac{1}{n}S_n - \mathbb{E}(W_1)| > t\right) \leq \exp\left[-\frac{t^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}(1-\theta)^2}{CMLip(F)}\right]. \tag{4}$$

Application à $\widehat{w}_d$

On applique (4) à $Y_i^{r,(M)}(t) = \min[e^{tZ_i r}, M]$, fonction Lipschitz et bornée de $(Z_i^r)_{i\in\mathbb{N}}$.

Proposition

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un processus η faiblement dépendant, avec $\varepsilon(k) \leq C\theta^k$, $C > 0$, $0 < \theta < 1$. Alors pour $M > 0$, $t \in [0, a[$, $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, $u > 0$:

$$P\left(|\widehat{M_k^r}(t) - \mathbb{E}(e^{tY_r})| > u\right) \leq \exp\left[-\frac{(u-(2\alpha))^{\frac{1}{3}} k^{\frac{1}{3}} (1-\theta^r)^2 \theta^r}{CrM^2}\right] + ke^{-\frac{\alpha k}{2}} \mathbb{E}(e^{tY_r})$$

avec $0 < \alpha < \frac{u}{2}$, $M < \frac{\alpha k}{2}$ and $e^{-\kappa M}\mathbb{E}(e^{(t+\kappa)Y_r}) < \alpha$.

Convergence en proba / presque sûre.

Théorème

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un processus η faiblement dépendant, de coefficient de mélange $\varepsilon(k) = O(\theta^k)$, $0 < \theta < 1$. Pour $r = r(k) = o(\ln k)$, $\widehat{w}_r$ converge vers w_d en probabilité.

Preuve basée sur :

$$|\widehat{w}_r - w_r| = |\mathbb{E}(e^{w_r Z_1^r}) - \widehat{M}_k^r(w_r)| \left[\frac{\partial \widehat{M}_k^r(w_r)}{\partial t} + \frac{1}{2}\int_{\widehat{I}_r} \frac{\partial^2 \widehat{M}_k^r(w)}{\partial t^2} dw\right]^{-1}$$

On obtient pour $r = r(k) = o(\ln k)$ et $M = k^{\varepsilon}$, $3\varepsilon < \frac{1}{3}$,

$$\mathbb{P}(|\widehat{w}_r - w_r| > u) \leq C_1 \exp\left[-C_2 u^{\frac{1}{3}} k^{\frac{1}{3}-3\varepsilon}\right]$$

$\Rightarrow$ convergence en probabilité.

Convergence presque sûre

Avec des info supplémentaires sur la vitesse de convergence de w_r vers w^d, on pourrait obtenir la convergence p.s..
Mais, par exemple si

$$\log\left(\mathbb{E}(e^{tY_{n+m}})\right) \leq \log\left(\mathbb{E}(e^{tY_n})\right) + \log\left(\mathbb{E}(e^{tY_m})\right) + A$$

alors $|w_r - w^d| \leq \frac{C}{r}$ et ça ne suffit pas pour avoir la convergence p.s. $(r = o(\ln k))$.

Existence de la limite I

À quelles conditions la limite $c(u) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}(e^{uY_n})$ existe-t-elle ?

Condition d'hyper mélange.

- Brick - Dembo : processus α mélangeant avec vitesse $O(\theta^{n(\ln n)^\beta})$, $0 < \theta < 1$, $\beta > 1$ alors la limite existe (+ grandes déviations).

Existence de la limite I

À quelles conditions la limite $c(u) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}(e^{uY_n})$ existe-t-elle ?

Condition d'hyper mélange.

- Brick - Dembo : processus α mélangeant avec vitesse $O(\theta^{n(\ln n)^\beta})$, $0 < \theta < 1$, $\beta > 1$ alors la limite existe (+ grandes déviations).
- Dans le cas η mélangeant, une vitesse en $O(\theta^{n(\ln n)^\beta})$, $0 < \theta < 1$, $\beta > 1$ garantit aussi l'existence de la limite.

  On utilise la propriété de quasi-sous additivité : si

$$h(n+m) \leq h(n) + h(m) + \Delta(n+m)$$

avec $\frac{\Delta(r)}{r(r+1)} < \infty$ alors la limite $\lambda = \lim \frac{h(n)}{n}$ existe et pour tout m,

$$\lambda \leq \frac{h(m)}{m} - \frac{\Delta(m)}{m} + 4\sum_{r=2m}^{\infty} \frac{\Delta(r)}{r(r+1)}.$$

Existence de la limite II

Shifts de Bernouilli.

$$X_n = H((\xi_{n-i})_{i\in\mathbb{N}}),$$

avec $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. et

$$\| \sup_{u=(u_0,u_{-1},\dots)} |H((\xi_{n-i})_{i\in\mathbb{N}}) - H(\xi_n,\xi_{n-1},\dots,\xi_1,u_0,u_{-1},\dots)| \|_\infty = \Delta_n$$

avec $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sommable. Alors

$$\mathbb{E}(e^{tY_{n+m}}) \le \exp\left(2t\sum_{i=1}^{n+m}\Delta_i\right)\mathbb{E}(e^{tY_n})\mathbb{E}(e^{tY_m})$$

et la limite $c(t)$ existe et vérifie :

$$|c(t) - c_n(t)| \le \frac{2\Delta t}{n}$$

Existence de la limite III

Shifts de Bernouilli.

$$X_n = H((\xi_{n-i})_{i\in\mathbb{N}}),$$

avec $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. et

$$\| \sup_{u=(u_0,u_{-1},\ldots)} |H((\xi_{n-i})_{i\in\mathbb{N}}) - H(\xi_n, \xi_{n-1}, \ldots, \xi_1, u_0, u_{-1}, \ldots)| \|_p = \Delta_{n,p}$$

avec $(\Delta_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ sommable. Limite existe ?

La suite ...

1. nécessité de très gros échantillons ($\Rightarrow$ bootstrap ?)
2. si on n'a pas de moments exponentiels ?
3. problèmes vectoriels ?
4.