

UNIVERSITÉ
DE BOURGOGNE
DIJON

DÉPARTEMENT
DE
MATHÉMATIQUES

LABORATOIRE
DE TOPOLOGIE
U.M.R. 5584

THÈSE

Présentée par

Véronique MAUME-DESCHAMPS

en vue d'obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

Spécialité : Mathématiques

PROPRIÉTÉS DE MÉLANGE POUR DES SYSTÈMES DYNAMIQUES MARKOVIENS

Soutenue publiquement le 30 septembre 1998 devant le Jury composé de

Jean-Pierre CONZE	Président
Viviane BALADI	Rapporteur
Carlangelo LIVERANI	Rapporteur
Christian BONATTI	Examineur
Jérôme BUZZI	Examineur
Pierre COLLET	Examineur
Patrick GABRIEL	Examineur
Bernard SCHMITT	Examineur

À Sébastien,

Je remercie Jean-Pierre Conze de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

Bernard Schmitt a dirigé cette thèse. Il l'a fait amicalement, avec patience et disponibilité. Je suis heureuse de lui exprimer ma profonde gratitude.

Viviane Baladi et Carlangelo Liverani ont accepté de rapporter ce travail. Les discussions, parfois électroniques, que nous avons eues avant, pendant et après sa rédaction ont été très enrichissantes. Je les remercie vivement.

Je remercie cordialement Christian Bonatti de s'être intéressé à mon travail et d'avoir accepté de faire partie du jury.

Les nombreuses questions et suggestions de Jérôme Buzzi ont permis d'affiner certains résultats, il a aussi accepté de juger ce travail, je lui adresse mes plus vifs remerciements.

J'adresse tous mes remerciements à Pierre Collet pour sa participation à ce jury.

Patrick Gabriel a été disponible pour discuter de mes problèmes probabilistes, je l'en remercie ainsi que de participer à ce jury.

Je suis venue à la théorie ergodique suite à un stage réalisé sous la direction de Rémi Langevin, je lui suis reconnaissante de cette initiation.

Pendant ces trois années, j'ai pleinement profité de l'atmosphère à la fois chaleureuse et propice au travail qui règne dans le Laboratoire de Topologie. Merci à tous ceux qui ont rendu les "pauses thé" animées, plus particulièrement à Alain Jacquemard, Gioia Vago, François Béguin et Frédéric Paccaut pour de nombreuses conversations (mathématiques ou pas).

Je remercie Florence Gadenne et Laurence Pidoux qui gèrent les problèmes pratiques du laboratoire et Jacqueline Alexandre qui a assuré la reprographie de cette thèse.

Enfin, mes pensées vont à toute ma famille et mes proches qui m'ont encouragée et soutenue, à Sébastien qui m'a accompagnée avec compréhension.

Résumé

Cette thèse traite des propriétés de mélange de systèmes dynamiques markoviens. L'étude de l'opérateur de transfert associé conduit à des estimations de la décroissance des corrélations ou vitesse de mélange. Ces estimées permettent d'établir des théorèmes probabilistes, par exemple le théorème de la limite centrale, pour des systèmes qui ne possèdent pas, en général, la propriété du trou spectral.

La première partie porte sur les dynamiques markoviennes sur un espace d'états fini, associé à un potentiel non höldérien. La décroissance des corrélations dépend du module de continuité de ce potentiel. De plus, ces systèmes sont stochastiquement stables.

Dans une deuxième partie, on s'intéresse à des systèmes markoviens sur un espace d'états infini dénombrable. La décroissance des corrélations dépend de la contribution à l'opérateur de transfert du complémentaire d'un nombre fini de cylindres. Des estimations effectives sont données pour des applications non uniformément dilatantes et pour des processus de naissance et de mort.

Abstract

This thesis treats of mixing properties of Markovian dynamical systems. The study of the transfer operator leads to estimates of decay of correlations or speed of mixing. Such estimates lead to probability theorems, like the central limit theorem, for systems which, in general, have no spectral gap.

The first part is devoted to Markovian dynamics of a finite states space, associated to a non hölderian potential. The decay of correlations depends on the continuity module of this potential. Moreover, these systems are stochastically stable.

In a second part, we study Markovian dynamics whose states space is countable infinite. The decay of correlations depends on the contribution to the transfer operator of the complementary of finitely many cylinders. Estimates are given for some non uniformly expanding maps and for birth and death processes.

Mots clés : théorie ergodique, système dynamique, formalisme thermodynamique, opérateur de transfert, décroissance de corrélations, stabilité stochastique

Table des matières

Introduction générale	v
1 Propriétés statistiques et sous-décalages	vi
2 Formalisme thermodynamique et opérateurs de transfert	x
3 Résultats pour des potentiels non höldériens	xiii
4 Espace d'états dénombrable	xvii
I Potentiels non höldériens	1
Introduction	3
1 Cônes et métriques projectives	5
1.1 Définitions	5
1.2 Propriétés	6
2 Dynamiques déterministes non höldériennes	11
2.1 Estimation de la vitesse de convergence	15
2.2 Spectre de \mathcal{L}_Φ	25
2.3 Théorème de la limite centrale.	31
3 Systèmes dynamiques aléatoires	33
3.1 Perturbations aléatoires	33
3.2 Systèmes dynamiques aléatoires	49

II	Espace d'états dénombrable	57
	Introduction.	59
4	Étude de l'opérateur de transfert.	63
4.1	Construction d'un point fixe pour l'opérateur de transfert.	64
4.2	Spectre périphérique et convergence des itérés de \mathcal{L}_Φ	67
5	Vitesse de convergence.	73
5.1	Convergence exponentielle.	74
5.2	Dynamiques sans grandes branches à l'infini.	82
6	Exemples.	97
6.1	Matrices stochastiques.	99
6.2	Applications uniformément dilatantes de l'intervalle.	100
6.3	Applications non uniformément dilatantes de l'intervalle.	105
	Annexe : codage pour des petites perturbations de difféomorphismes Axiome A	111
	Perspectives	117
	Bibliographie	119

Introduction générale.

Le comportement statistique d'un système dynamique discret est décrit par ses propriétés ergodiques et probabilistes. Plus précisément, ces propriétés portent sur l'ergodicité, le mélange, la décroissance des corrélations d'une part, les théorèmes limites (théorème de la limite centrale par exemple) et la stabilité stochastique d'autre part. De nombreux systèmes dynamiques peuvent être représentés par des sous-décalages de type fini, sur un alphabet fini ou non. C'est pourquoi nous nous plaçons dans ce cadre, même s'il peut être préférable d'éviter le codage afin de préserver les propriétés géométriques du système par exemple. La problématique est alors d'étudier les propriétés statistiques de mesures d'équilibre associées à un potentiel.

Les sous-décalages de type fini sur un alphabet fini, associés à un potentiel höldérien ont été entièrement étudiés (D. Ruelle [Ru1], R. Bowen [Bo], W. Parry et M. Pollicott [Pa, Po]). Les principaux résultats de cette théorie sont un théorème de type Perron-Frobenius et la propriété de mélange exponentiel pour des observables suffisamment régulières. Cette propriété conduit au théorème de la limite centrale. Dans le cas où l'alphabet est dénombrable et le potentiel constant par morceaux, l'étude rejoint celle des chaînes de Markov ou plus généralement des matrices positives dénombrables. E. Seneta ([Se]) et D. Vere-Jones ([V-J1], [V-J2]) ont généralisé le théorème de Perron-Frobenius à ce cadre. Des résultats plus récents concernent des potentiels non constants par morceaux possédant la propriété de mélange exponentiel (J. Aaronson et M. Denker [A,D], X. Bressaud [Bre], O. Sarig [Sa]). La plupart de ces résultats découlent de la propriété de quasi-compacité de l'opérateur de transfert, sur des espaces d'observables adaptés.

Ce travail comporte deux parties. La première porte sur les sous-décalages de type fini sur un alphabet fini associé à un potentiel non höldérien. La seconde porte sur les sous-décalages de type fini sur un alphabet non fini. En général, pour de tels systèmes, l'opérateur de transfert n'est pas quasi-compact et la propriété du mélange exponentiel n'est pas vérifiée. En utilisant les techniques de cônes et métriques projectives de

G. Birkhoff, nous donnons néanmoins une estimation de la décroissance des corrélations. Lorsque la décroissance des corrélations est suffisamment rapide, des techniques probabilistes permettent d'obtenir le théorème de la limite centrale.

Dans le cas des sous-décalages de type fini sur un alphabet fini, associés à un potentiel non höldérien, la vitesse de décroissance des corrélations dépend du module de continuité du potentiel. Dans le cas des sous-décalages de type fini sur un alphabet non fini, elle dépend de la contribution à l'opérateur de transfert du complémentaire d'un nombre fini de cylindres.

1 Propriétés statistiques et sous-décalages

Étant donné un espace mesurable (X, \mathcal{B}) et $T : X \rightarrow X$ une application mesurable, il s'agit de décrire le comportement d'un point x de X sous T . On souhaite décrire l'orbite de x sous T définie par $\mathcal{O}(x) = \{T^n x / n \in \mathbb{N}\}$, ou plutôt la suite des "mesures" $(\varphi(T^n x))_{n \in \mathbb{N}}$ où φ est une fonction sur X à valeurs réelles ou complexes, la suite $(\varphi(T^n x))_{n \in \mathbb{N}}$ peut s'interpréter comme une suite de mesures physiques. Souvent, le comportement de ces suites est compliqué, même pour des systèmes simples et est très sensible aux conditions initiales dans le sens suivant. Des modifications très petites sur $x \in X$ conduisent à des comportements significativement différents de la suite $(\varphi(T^n x))_{n \in \mathbb{N}}$. C'est pourquoi on s'oriente vers une description statistique de ces systèmes.

1.1 Propriétés statistiques des systèmes dynamiques

Les résultats de cette section peuvent être trouvés, par exemple, dans [Wa2]. Une probabilité μ sur X est *T-invariante* si pour tout $A \in \mathcal{B}$, $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$, ou de manière équivalente si

$$\forall f \in L^1(\mu) \quad \int_X (f \circ T) d\mu = \int_X f d\mu.$$

Elle est dite *ergodique* si pour $A \in \mathcal{B}$, $T^{-1}A = A$ implique $\mu(A)\mu(A^c) = 0$, ou de manière équivalente si pour $f \in L^1(\mu)$, $f = f \circ T$, μ presque partout implique f est constante μ presque partout. La *tribu des invariants* par T est $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{B} / T^{-1}A = A\}$, lorsque T est ergodique, la tribu \mathcal{C} est triviale (elle est réduite aux ensembles de mesure zéro ou un). Soit $\mathbb{E}(f|\mathcal{C})$ l'espérance conditionnelle de f par rapport à \mathcal{C} . L'ergodicité de

T est équivalente à $\mathbb{E}(f|\mathcal{C}) = \int f d\mu$ pour $f \in L^1(\mu)$. Le théorème suivant décrit le comportement asymptotique des suites $(f \circ T^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f \in L^1(\mu)$, sous une probabilité invariante et révèle l'importance de la recherche de probabilités invariantes.

Théorème ergodique de Birkhoff. *Soit μ une probabilité T -invariante. Pour $f \in L^1(\mu)$, la suite $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$ converge dans $L^1(\mu)$ et μ p.p. vers $\mathbb{E}(f|\mathcal{C})$. Ainsi, si T est ergodique,*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu \quad \mu - \text{p.p. et dans } L^1(\mu).$$

Le théorème ergodique de Birkhoff implique que T est ergodique si et seulement si

$$\forall f, g \in L^2(\mu) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f \circ T^i) g d\mu = \int_X f d\mu \int_X g d\mu.$$

L'application T est dite (*fortement*) *mélangeante* si et seulement si

$$\forall f, g \in L^2(\mu) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (f \circ T^n) g d\mu = \int_X f d\mu \int_X g d\mu,$$

ou de manière équivalente si pour tout $A, B \in \mathcal{B}$, $\mu(T^{-n}A \cap B)$ converge vers $\mu(A)\mu(B)$, c'est-à-dire que les événements $T^{-n}A$ et B sont asymptotiquement indépendants. Évidemment, le mélange implique l'ergodicité. Lorsque T est mélangeante, il est parfois possible d'obtenir une estimation de la *décroissance des corrélations* sur un sous-espace de $L^2(\mu)$, c'est-à-dire d'estimer la vitesse de convergence de $C_n(f, g) := |\mu(f \circ T^n g) - \mu(f)\mu(g)|$ vers zéro, pour f et g dans un sous-espace de $L^2(\mu)$. Il n'est, en général, pas possible d'obtenir d'estimation de la décroissance des corrélations sur $L^2(\mu)$. Nous dirons que T possède la *propriété de mélange exponentiel* sur un sous-espace B de $L^2(\mu)$ s'il existe $0 < \gamma < 1$ tel que

$$\forall f, g \in B, \quad \gamma^{-n} C_n(f, g) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Une bonne estimation de $C_n(f, g)$ pour f et g appartenant à B permet d'obtenir des théorèmes limites ([I, L], [Gor], [Li3]). Pour T ergodique, les théorèmes limites précisent la convergence de $\frac{1}{n} S_n(f) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$ vers $\int f d\mu$. Nous nous intéresserons plus particulièrement au théorème de la limite centrale.

L'application T vérifie le *théorème de la limite centrale* pour $f \in L^1(\mu)$ s'il existe $\sigma = \sigma(f) \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left[S_n f - n \int_X f d\mu \right] \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$$

où $\mathcal{N}(0, 1)$ désigne la loi normale centrée et réduite.

Un système dynamique aléatoire décrit la composition successive de transformations choisies au hasard, la *stabilité stochastique* exprime que le système est stable par perturbations aléatoires. De tels systèmes ont été introduits par Y. Kifer ([Ki1], [Ki2]). Plus précisément, soit $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, S)$ un système dynamique inversible, où Ω est un espace de Lebesgue, avec S ergodique et \mathbb{P} -invariant. Soient $M(X)$ un sous espace normé des applications mesurables de X dans X , B_ε la boule de centre T et de rayon ε de cet espace et une application mesurable $\mathcal{T} : \Omega \rightarrow M(X)$. La *dynamique aléatoire* est décrite par le produit gauche sur $\Omega \times X$, $\Theta : \Omega \times X \rightarrow \Omega \times X$ défini par $\Theta(\omega, x) = (S\omega, \mathcal{T}_\omega x)$. Si l'image de Ω par \mathcal{T} est incluse dans B_ε , on parle de *perturbations aléatoires*. Le système est stochastiquement stable s'il existe une mesure $\bar{\mu}$ sur $\Omega \times X$, invariante par Θ qui se désintègre en une famille $(\mu_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de sorte que $\int f(\omega, x) d\bar{\mu} = \int \int f(\omega, x) d\mu_\omega(x) d\mathbb{P}(\omega)$ et telle que pour \mathbb{P} -presque tout $\omega \in \Omega$, μ_ω converge faiblement vers une mesure μ , T -invariante quand ε tend vers zéro.

Nous n'étudierons ici que les propriétés statistiques de systèmes dynamiques symboliques.

Rappelons quelques définitions relatives aux sous-décalages de type fini.

1.2 Sous-décalages de type fini

Soit A un alphabet dénombrable (fini ou non) muni de la topologie discrète, le *décalage* (ou décalage plein) σ sur $A^\mathbb{N}$ est défini par $(\sigma x)_n = x_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in A^\mathbb{N}$. L'espace $A^\mathbb{N}$ est muni de la topologie produit, de la distance $d(x, y) = r^n$ si $x_i = y_i$, $i = 0, \dots, n-1$ et $x_n \neq y_n$, $0 < r < 1$ et de la tribu des boréliens. Un *sous-décalage* sur l'alphabet A est la restriction de σ à un sous-ensemble X de $A^\mathbb{N}$, invariant et fermé. La restriction de σ à X est encore notée σ et nous parlerons de sous-décalage pour désigner aussi bien cette restriction que l'espace X . Étant donné $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in A^k$, soit

$$[a_0, \dots, a_{k-1}] = \{x \in X / x_i = a_i, i = 0, \dots, k-1\}.$$

Si $[a_0, \dots, a_{k-1}]$ est non vide, il est appelé *cylindre* ou *k-cylindre*. Les cylindres engendrent la topologie sur X , en particulier, les sous-décalages sont séparables. Les *sous-décalages de type fini (STF)* sont définis de la façon suivante. Soit B une $A \times A$ matrice positive : $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in A \times A}$, $b_{i,j} \geq 0$, soit

$$X_B = \{x \in A^{\mathbb{N}} / b_{x_i, x_{i+1}} > 0\}.$$

Le sous-espace X_B est fermé et invariant par σ , il est appelé sous-décalage de type fini associé à B .

Si l'alphabet A est fini, X_B est compact. Lorsque l'alphabet est infini, X_B n'est pas en général compact ni même localement compact. En fait, les affirmations suivantes sont équivalentes :

- X_B est localement compact,
- sur chaque ligne de la matrice B le nombre d'éléments non nuls est fini,
- les cylindres sont compacts.

Remarquons que les STF vérifient la *propriété de Markov* suivante : étant donnés i et j dans A , x et y dans $[j] \cap X_B$, l'élément ix de $A^{\mathbb{N}}$ appartient à X_B si et seulement si iy lui appartient. Ceci n'est pas le cas pour des sous-décalages généraux. Par exemple, soit $X \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ défini par

$$X = \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} / \text{si } x_n = 1 \text{ et } x_p = 1, \text{ alors } |p - n| = 2^k, k \in \mathbb{N}\}.$$

L'espace X définit bien un sous-décalage mais ne possède pas la propriété de Markov.

Un STF est dit *irréductible* si pour tout $i, j \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b_{i,j}^n > 0$, il est dit *apériodique* si pour tout $i, j \in A$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, $b_{i,j}^n > 0$. Si l'alphabet est fini, l'apériodicité est équivalente à $B^n > 0$ pour n assez grand. Lorsque l'alphabet n'est pas fini, il peut n'exister aucun entier n tel que $B^n > 0$ (voir [Se]).

Un outil puissant pour l'étude de tels systèmes est le formalisme thermodynamique. Il a été introduit par D. Ruelle ([Ru1], [Ru2]) dans le cadre de la mécanique statistique, puis a été étendu à l'étude de systèmes dynamiques ([Bo], [Wa1]). Ce point de vue a permis notamment de construire des mesures invariantes dites de Sinai-Ruelle-Bowen, pour des difféomorphismes Axiome A en codant la dynamique par un STF sur un alphabet fini.

2 Formalisme thermodynamique et opérateurs de transfert

Considérons un STF sur un alphabet fini et Φ appartenant à l'espace $C(X)$ des fonctions continues de X à valeurs réelles ou complexes, une telle fonction est appelée potentiel. Soit $\mathcal{M}(X, \sigma)$ l'ensemble des probabilités sur X , invariantes par σ .

2.1 Formalisme thermodynamique

La *pression topologique* $\pi(\Phi)$ de Φ peut être définie par le principe variationnel suivant ([Wa2]) :

$$\pi(\Phi) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X, \sigma)} \{h_\sigma(\mu) + \int \Phi d\mu\},$$

où $h_\sigma(\mu)$ désigne l'entropie mesurée de σ par rapport à μ . Une probabilité invariante μ est appelée *état d'équilibre* si elle réalise ce sup : $\pi(\Phi) = h_\sigma(\mu) + \int \Phi d\mu$. L'existence d'états d'équilibre est assurée par la continuité de σ sur X et le fait que le système soit expansif, c'est-à-dire, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $d(\sigma^n x, \sigma^n y) < \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $x = y$ ([Wa2]). En particulier, si $\Phi \equiv 0$, les états d'équilibre sont les mesures d'entropie maximale. Les propriétés statistiques des mesures d'équilibre sont liées aux propriétés spectrales de *l'opérateur de transfert* \mathcal{L}_Φ ou *opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius*, associé au potentiel Φ . Il est défini comme suit, $\mathcal{L}_\Phi : C(X) \rightarrow C(X)$, pour $f \in C(X)$,

$$\mathcal{L}_\Phi f(x) = \sum_{\sigma y = x} f(y) e^{\Phi(y)},$$

son dual agit sur les mesures régulières sur X par

$$\int f d(\mathcal{L}_\Phi^* m) = \int \mathcal{L}_\Phi f dm.$$

Remarquons que si f et g appartiennent à $C(X)$, $\mathcal{L}_\Phi(f \circ \sigma g) = f \mathcal{L}_\Phi g$. S'il existe $c > 0$ une valeur propre de \mathcal{L}_Φ , $h \in C(X)$, une fonction propre positive associée à c et ν une probabilité régulière sur X telle que $\mathcal{L}_\Phi^* \nu = c\nu$, (une telle mesure est dite *c-conforme*), alors $\mu = h\nu$ est σ invariante. En effet, soit $f \in C(X)$,

$$\int (f \circ \sigma) h d\nu = c^{-1} \int \mathcal{L}_\Phi(f \circ \sigma h) d\nu = c^{-1} \int f \mathcal{L}_\Phi h d\nu = \int f h d\nu.$$

De plus, si ν est une mesure 1-conforme, \mathcal{L}_Φ apparaît comme le dual de l'opérateur sur $L^1(\nu) : f \mapsto f \circ \sigma$. En effet, soient $f \in L^1(\nu)$ et $g \in L^\infty(\nu) = (L^1(\nu))^*$,

$$\begin{aligned} \int (f \circ \sigma)g d\nu &= \int \mathcal{L}_\Phi(f \circ \sigma)g d\nu \text{ car } \nu \text{ est 1-conforme} \\ &= \int f \mathcal{L}_\Phi g d\nu. \end{aligned}$$

Le résultat suivant permet de relier les propriétés spectrales de \mathcal{L}_Φ aux états d'équilibre.

Théorème a ([Wa1]) *Soit $\Psi \in C(X)$ un potentiel tel que $\mathcal{L}_\Psi \mathbf{1} = \mathbf{1}$, alors $\pi(\Psi) = 0$ et pour $\mu \in \mathcal{M}(X, \sigma)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathcal{L}_\Psi^* \mu = \mu$,
2. μ est un état d'équilibre pour Ψ .

Si Φ est un potentiel tel que \mathcal{L}_Φ admette une valeur propre c strictement positive, une fonction propre associée $h \in C(X)$ strictement positive et une probabilité ν c -conforme, alors $\mu = h\nu$ est un état d'équilibre et $\pi(\Phi) = \log c$. En effet, il suffit de considérer $\Psi = \Phi + \log h - \log h \circ \sigma - \log c$ et d'appliquer le théorème a.

L'introduction des opérateurs de transfert est naturelle dans l'étude des endomorphismes dilatants sur une variété Riemannienne compacte et connexe. Soient M une telle variété, $T : M \rightarrow M$, C^1 et dilatante¹, m la mesure de Lebesgue sur M et $\Phi = -\log |JT|$ (où JT désigne le jacobien de T). Soit $\mu = hm$ une mesure absolument continue par rapport à m alors μ est T -invariante si et seulement si $\mathcal{L}_\Phi h = h$. En effet, il suffit de remarquer que la formule de changement de variables implique que m est 1-conforme et procéder comme plus haut. Pour $T : M \rightarrow M$ continue, une mesure T -invariante μ vérifie la propriété de Sinai-Ruelle-Bowen ou est une mesure SRB² s'il existe $A \subset X$ de m -mesure strictement positive tel que

$$\forall x \in A, \forall f \in C(X), \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x) \rightarrow \int f d\mu.$$

¹ T est dilatante sur M s'il existe $\lambda > 1$ tel que

$$\|DT(x) \cdot v\| \geq \lambda \|v\| \text{ pour tout } x \in M \text{ et } v \in T_x M.$$

²Voir [Ru3] pour la définition historique de mesures SRB.

En particulier, une mesure ergodique absolument continue par rapport à m est une mesure SRB. Les opérateurs de transfert permettent de construire des mesures SRB pour des difféomorphismes $C^{1+\varepsilon}$ Axiome A, soit en codant la dynamique sur un STF sur un alphabet fini ([Bo]), soit en travaillant directement sur la variété ([Li2], [V]).

2.2 Propriété de trou spectral

La théorie des opérateurs quasi-compacts, appliquée à l'étude des opérateurs de transfert, permet d'obtenir des résultats sur les propriétés statistiques des mesures d'équilibre : la propriété de mélange exponentiel d'une part, des théorèmes limites d'autre part.

Le *rayon spectral essentiel* $r_{es}(P)$ d'un opérateur borné P agissant sur un espace de Banach B est défini par R. D. Nussbaum ([Nu]) :

$$r_{es}(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|P^n\|_C^{1/n} \text{ où } \|P\|_C = \inf_{K \text{ compact}} \|P - K\|.$$

Soit $r(P)$ le rayon spectral de P , si $r_{es}(P) < r(P)$, P est dit *quasi-compact* et pour tout $r_{es}(P) < \Theta < r(P)$, P se décompose ([D, S], VIII 8.2) en $P = R + K$ avec $RK = KR = 0$, $PR = RP$ et $KP = PK$, R est un opérateur borné de rayon spectral inférieur à Θ et K est un opérateur compact n'ayant qu'un nombre fini de valeurs propres de multiplicité finie dans la couronne $\{x \in \mathbb{C} / \Theta \leq |x| \leq r(P)\}$.

Si \mathcal{L}_Φ est quasi-compact sur un espace de Banach $B \subset C(X)$, soient $spp = \{\lambda \in r(\mathcal{L}_\Phi) / |\lambda| = r(\mathcal{L}_\Phi) = c\}$ le *spectre périphérique* de \mathcal{L}_Φ et Π la projection sur l'espace propre associé alors,

$$\frac{\mathcal{L}_\Phi^n f}{c^n} \longrightarrow \Pi(f) \text{ exponentiellement vite.}$$

Le taux de cette convergence est $\tau = \left\lfloor \frac{2}{c} \right\rfloor$ où γ est la seconde valeur propre (en module) de \mathcal{L}_Φ si elle existe, $r_{es}(\mathcal{L}_\Phi)$ sinon. Si $spp = \{c\}$ avec c valeur propre simple, \mathcal{L}_Φ possède alors la *propriété du trou spectral*, si $h \in B$ et $\nu \in \mathcal{M}(X)$ vérifient $\mathcal{L}_\Phi h = ch$, $\mathcal{L}_\Phi^* \nu = c\nu$ alors,

$$\frac{\mathcal{L}_\Phi^n f}{c^n} \xrightarrow{\text{expo}} h \int f d\nu.$$

Cette convergence a lieu dans la norme du Banach B et permet de montrer le mélange exponentiel pour des fonctions de B . D'autre part, c étant alors valeur propre isolée et simple, les théories de perturbations des opérateurs ([Ka], [D, S]) permettent de démontrer des théorèmes limites ([G,H], [Bre], [Bro]).

Pour un STF sur un alphabet fini, lorsque Φ est höldérienne pour la métrique usuelle, la situation est bien connue ([Bo], [Pa, Po], [Ru1]) : \mathcal{L}_Φ en tant qu'opérateur sur un espace de fonctions höldériennes est quasi-compact. Si le sous-décalage est apériodique, Φ possède un unique état d'équilibre et cet état d'équilibre est exponentiellement mélangeant pour des observables höldériennes. Dans ce cas, il peut être intéressant d'avoir une estimation du taux de cette convergence, ce que ne permet pas la théorie des opérateurs quasi-compacts. Lorsque l'opérateur de transfert n'est pas quasi-compact, il existe diverses méthodes pour estimer la décroissance des corrélations ([Y1], [L, S, V2], [I]). Nous utiliserons la technique des cônes et métriques projectives de G. Birkhoff, introduite pour l'étude de systèmes dynamiques par P. Ferrero et B. Schmitt ([F,S 1]). Nous exposerons cette théorie dans le chapitre 1.

3 Résultats pour des potentiels non höldériens

Soit (X, σ) un STF sur un alphabet fini, apériodique. Dans les chapitres 2 et 3, nous considérerons des potentiels non höldériens. Ces potentiels vérifient néanmoins une condition de régularité due à P. Walters ([Wa1]), cette condition est plus faible que celle de sommabilité du module de continuité utilisée dans [Sc] et [Go]. Elle est vérifiée par exemple par des dynamiques de l'intervalle considérées par P. Collet, dont la dérivée est de la forme $K + (1 + |\log x|)^{-1-\alpha}$, $\alpha > 0$, $K > 1$, pour x près de 0 ([Co]). Pour de tels potentiels, il existe un sous-espace de Banach L de l'espace des fonctions continues, naturel et stable par l'opérateur \mathcal{L}_Φ . C'est un espace de fonctions lipschitziennes par rapport à une métrique produit "inusuelle". Cet espace est dense dans l'espace des fonctions continues, la norme sur cet espace est notée $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme uniforme sur X . Dans [Wa1], P. Walters montre l'existence et l'unicité d'un triplet (h, c, ν) vérifiant $\mathcal{L}_\Phi h = ch$, $\mathcal{L}_\Phi^* \nu = c\nu$, $\nu(h) = 1$, $\nu(\mathbf{1}) = 1$. Nous montrerons les résultats suivants (chapitre 2) obtenus sous une première forme en collaboration avec A. Kondah et B. Schmitt ([K,M,S]).

Théorème A *Il existe une suite de réels positifs $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, telle que pour toute fonction $f \in L$,*

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_\Phi^n f}{c^n} - h \int f d\nu \right\|_\infty \leq Cte u_n \|f\|.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut être déterminée explicitement et dépend de la régularité de Φ .

De tels résultats ont été obtenus simultanément par M. Pollicott ([Po2]) en utilisant une méthode d'approximation mise en place par N. Chernov ([Ch]) et C. Liverani ([Li4]). La méthode que nous utilisons donne une estimation plus précise de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans certains cas.

Théorème B *Si Φ vérifie une propriété supplémentaire exprimant que son module de continuité n'est "vraiment pas exponentiel", le spectre de \mathcal{L}_Φ sur L est le disque fermé $D(0, c)$, chaque point du disque ouvert est une valeur propre de multiplicité infinie. En particulier, la vitesse de mélange sur L ne peut pas être exponentielle.*

Lorsque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable, des techniques probabilistiques introduites par M.I. Gordin ([Gor]), I.M. Ibragimov & Y. Linnik ([I, L]) et généralisées par C. Liverani ([Li3]) permettent de démontrer le théorème de la limite centrale (section 2.3).

De plus, ces systèmes sont stochastiquement stables : on montre qu'il n'existe qu'une seule "bonne" mesure invariante sur $\Omega \times X$ pour le produit gauche et qu'elle converge au sens de la section 1 vers la mesure invariante déterministe μ . Ces résultats sur les perturbations aléatoires peuvent être étendus à certains systèmes dynamiques aléatoires.

Systèmes dynamiques aléatoires et principe variationnel relativisé

Le formalisme thermodynamique a été étendu aux systèmes dynamiques aléatoires par F. Ledrappier et P. Walters ([L, W]), Y. Kifer ([Ki3]) et T. Bogenschütz ([Bog1]). Considérons $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, S)$ un système dynamique inversible, où Ω est un espace de Lebesgue, avec S ergodique et \mathbb{P} -invariant et $\Psi : \Omega \rightarrow C(X)$ tel que $\int_{\Omega} \|\Psi_\omega\|_{\infty} d\mathbb{P}(\omega) < \infty$ ($\Psi \in L^1(\Omega, C(X))$); Ψ est appelé *potentiel aléatoire*. Ici, seul le potentiel est aléatoire et le produit "gauche" Θ est en fait l'application produit direct $\Theta(\omega, x) = (S\omega, \sigma x)$. Néanmoins, un tel système dynamique aléatoire peut représenter des petites perturbations C^1 de difféomorphismes Axiome A (Annexe).

Soit $\mathcal{M}(\mathbb{P}, \sigma)$ l'espace des probabilités invariantes par Θ et dont la marginale sur Ω est \mathbb{P} . Les éléments de $\mathcal{M}(\mathbb{P}, \sigma)$ se désintègrent en une famille $\bar{\mu} = (\mu_\omega)_{\omega \in \Omega}$, μ_ω appartenant à $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des probabilités régulières sur X . La dynamique que l'on souhaite décrire est celle de σ , associée au potentiel aléatoire Ψ , c'est pourquoi on considère l'entropie $h_{\bar{\mu}}(\sigma)$ de Θ relative à S définie par $h_{\bar{\mu}}(\sigma) = h_{\bar{\mu}}(\Theta|p^{-1}\mathcal{F})$ ³ où p est la projection canonique de $\Omega \times X$ sur Ω . La pression aléatoire $\pi : L^1(\Omega, C(X)) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ peut être

³L'entropie $h_{\bar{\mu}}(\Theta|p^{-1}\mathcal{F})$ de Θ relativement à la tribu $p^{-1}\mathcal{F}$ est définie dans [Bog1] par exemple.

définie par le principe variationnel relativisé suivant : ([L, W] [Ki3], [Bog1])

$$\pi(\Psi) = \sup_{\bar{\mu} \in \mathcal{M}(\mathbb{P}, \sigma)} \left[h_{\bar{\mu}}(\sigma) + \int_{\Omega \times X} \Psi d\bar{\mu} \right].$$

Une mesure $\bar{\mu} \in \mathcal{M}(\mathbb{P}, \sigma)$ est un état d'équilibre pour Ψ si elle réalise ce sup : $\pi(\Psi) = h_{\bar{\mu}}(\sigma) + \int_{\Omega \times X} \Psi d\bar{\mu}$. Comme dans le cas déterministe, les opérateurs de transfert jouent un rôle primordial dans l'étude des mesures d'équilibre. Notons \mathcal{L}_ω l'opérateur de transfert associé à Ψ_ω et $\mathcal{L}_{\omega, n}$ la composition $\mathcal{L}_{S^n \omega} \circ \cdots \circ \mathcal{L}_\omega$.

Théorème b([Ki3]) *Soit G un potentiel aléatoire appartenant à $L^1(\Omega, C(X))$, tel que pour tout ω , $\mathcal{L}_{G_\omega} \mathbf{1} = \mathbf{1}$, alors $\pi(G) = 0$ et pour $\bar{\mu} \in \mathcal{M}(\mathbb{P}, \sigma)$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $\mathcal{L}_{G_\omega}^* \mu_{S\omega} = \mu_\omega$
2. $\bar{\mu}$ est un état d'équilibre pour G .

En posant $G_\omega = \Psi_\omega + \log h_\omega - \log h_{S\omega} \circ \sigma - \log c_\omega$, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire b.1([Ki3]) *S'il existe trois applications mesurables :*

$$\begin{array}{llll} H : \Omega & \longrightarrow & C(X) & C : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ / \{0\} & \bar{\nu} : \Omega & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ \omega & \longrightarrow & h_\omega & \omega & \longrightarrow & c_\omega & \omega & \longrightarrow & \nu_\omega, \end{array}$$

telles que

- $\forall \omega \in \Omega$, $\mathcal{L}_\omega h_\omega = c_\omega h_{S\omega}$ et $\mathcal{L}_\omega^* \nu_{S\omega} = c_\omega \nu_\omega$,
- $\nu_\omega(h_\omega) = 1$, $\log c_\omega$ et $\|\log h_\omega\|_\infty$ sont intégrables,

alors $\bar{\mu} = (h_\omega \nu_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est un état d'équilibre pour Ψ et $\pi(\Psi) = \int_{\Omega} \log c_\omega d\mathbb{P}(\omega)$.

Par analogie avec le cadre déterministe, on peut définir les *corrélations aléatoires*, pour $\bar{\mu} \in \mathcal{M}(\mathbb{P}, \sigma)$, pour f et g dans $L^2(\mu_\omega)$ et pour tout ω ,

$$C_n^\omega(f, g) = \left| \int f(g \circ \sigma^n) d\mu_\omega - \int g d\mu_{S^n \omega} \int f d\mu_\omega \right|.$$

Soit Φ un potentiel dont le module de continuité (défini page 3) est sommable et Ψ un potentiel aléatoire tel que le module de continuité de $|\Psi_\omega - \Phi|$ est ε proche de celui de Φ

et $\|\Psi_\omega - \Phi\|_\infty < \varepsilon$, Ψ décrit des perturbations aléatoires de Φ . Dans le chapitre 3 nous montrerons les résultats suivants parus dans [Ma].

Théorèmes D, E *Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, il existe un unique triplet $(H, C, \bar{\nu})$ d'applications mesurables vérifiant les hypothèses du corollaire b.1. De plus, il existe une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour $f \in L$,*

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_{n,\omega} f}{c_{S^{n-1}\omega} \times \dots \times c_\omega} - h_{S^n\omega} \int f d\nu_\omega \right\|_\infty \leq Cte v_n \|f\| \text{ et}$$

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega} f}{c_{S^{-1}\omega} \times \dots \times c_{S^{-n}\omega}} - h_\omega \int f d\nu_{S^{-n}\omega} \right\|_\infty \leq Cte v_n \|f\|,$$

Ceci permet d'estimer les corrélations :

$$C_n^\omega(f, g) \leq Cte v_n \sup_{s \in \Omega} \left(\left| \int g d\nu_s \right| \right) \|f\| \text{ et}$$

$$C_n^{S^{-n}\omega}(f, g) \leq Cte v_n \sup_{s \in \Omega} \left(\left| \int g d\nu_s \right| \right) \|f\|$$

pour $f \in L$ et g telle que $\sup_{s \in \Omega} \left(\left| \int g d\nu_s \right| \right) < \infty$. La mesure $\bar{\mu} = (h_\omega \nu_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est le seul état d'équilibre de Ψ . Par ailleurs, $(H, C, \bar{\nu})$ vérifie les propriétés de stabilité forte suivantes :

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\omega \in \Omega_\varepsilon} \|h_0 - h_\omega\|_\infty &= 0, \\ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\omega \in \Omega_\varepsilon} \frac{c}{c_\omega} &= 1, \\ \forall f \in C(X), \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\omega \in \Omega_\varepsilon} |\nu(f) - \nu_\omega(f)| &= 0. \end{aligned}$$

Des résultats de stabilité forte similaires ont été obtenus par V. Baladi, A. Kondah & B. Schmitt ([B,K,S]) pour des perturbations d'endomorphismes dilatants C^k , $k \geq 1 + \alpha$, T. Bogenschütz ([Bog2]) obtient des résultats similaires dans un cadre symbolique, pour des potentiels höldériens.

Enfin, pour certains systèmes dynamiques aléatoires (qui ne sont pas nécessairement des perturbations) non höldériens, nous obtenons l'existence et l'unicité d'un état d'équilibre et la convergence des opérateurs $\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega}$ vers un opérateur de rang 1 (proposition 3.10). Des résultats similaires ont été obtenus par P. Ferrero & B. Schmitt ([F,S 1]), Y. Kifer ([Ki3]), V.aladi ([Ba]), T. Bogenschütz ([Bog1]) et K. Khanin & Y. Kifer ([Kh,Ki]) dans diverses situations pour des potentiels aléatoires höldériens. Dans [F,S 1] et [Bog1], les corrélations aléatoires sont exponentielles pour des observables höldériennes. J. Buzzi

([Buz1], [Buz2]) considère une famille d'applications aléatoires de Lasota-Yorke de l'intervalle. Il construit des mesures invariantes pour le produit gauche dont les fibres μ_ω sur l'intervalle sont toutes absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. En utilisant une condition de "recouvrement aléatoire" il obtient des corrélations aléatoires exponentielles.

4 Espace d'états dénombrable

Lorsque l'espace d'états n'est pas fini, les premiers résultats concernent les chaînes de Markov et les matrices dénombrables positives ([Se], [V-J2]). Ils généralisent les notions de récurrence, transience, récurrence positive et récurrence nulle à des matrices dénombrables positives et irréductibles. Lorsque la matrice est apériodique et récurrente positive, les itérés de la matrice convergent vers l'unique mesure stationnaire (théorème de type Perron-Frobenius).

Concernant des potentiels non constants par morceaux, citons les travaux de X. Bressaud et O. Sarig.

X. Bressaud ([Bre]) étudie des sous-décalages (non nécessairement markoviens) sur un alphabet infini et donne des conditions garantissant la quasi-compacité de l'opérateur de transfert sur un sous-espace de Banach de l'espace des fonctions continues sur Σ et l'existence d'une mesure conforme. Il utilise en particulier une condition sur la "pression à l'infini" : pour $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta_{p,n} := \sup_{j > p} \sup_{x \in [j]} \mathcal{L}_\Phi^n \mathbf{1}(x),$$

$$\Delta_{\infty,n} := \inf_{p \in \mathbb{N}} \Delta_{p,n} \text{ et la pression à l'infini de } \Phi \text{ est } P_\infty(\Phi) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \Delta_{\infty,n},$$

il suppose que $P_\infty(\Phi) < 0$. Cette condition est assez proche des conditions (**Exp1**) et (**Exp2**) du chapitre 5 (pages 73 et 81).

Plus récemment, O. Sarig ([Sa]) développe un formalisme thermodynamique pour des STF sur un alphabet dénombrable en utilisant la "pression de Gurevich" et obtient des décroissances des corrélations exponentielles pour certaines applications vérifiant une propriété de "grandes branches" : $\inf(m(\sigma[a]) / a \in A) > 0$ pour toute mesure m dont le support est X .

D'autres résultats concernent des généralisations d'applications de l'intervalle $[0, 1] = I$

de type Lasota-Yorke possédant un nombre dénombrable infini de branches de monotonie. Le premier résultat est celui de M. Rychlick ([Ri]) : sous l'hypothèse que $(T')^{-1}$ peut être pris égal à zéro sur les bord de la partition, il montre la quasi-compacité de l'opérateur de transfert sur l'espace des fonctions à variations bornées. Pour des applications ayant une propriété de grandes branches, A. Broise ([Bro]) obtient le même résultat. En utilisant la propriété de "recouvrement" :

pour tout sous-intervalle ouvert et non vide J de I , il existe un entier $N(J)$ et une constante $C(J) > 0$ tels que $\mathcal{L}_\Phi^{N(J)} \mathbf{1}_J \geq C(J)$,

une hypothèse similaire à celle de M. Rychlick et une hypothèse sur la pression de Φ , C. Liverani, B. Saussol et S. Vaienti ([L, S, V1]) construisent des mesures conformes pour des potentiels à variation bornée et montrent que la décroissance des corrélations est exponentielle sur l'espace des fonctions à variations bornées.

Le but de la deuxième partie de ce travail est de donner des estimations de la vitesse de mélange, pour des systèmes markoviens à espace d'états dénombrable, lorsque celle-ci n'est pas exponentielle. Les techniques développées sont bien adaptées aux systèmes ayant des "petites branches" (voir les définitions de "portée bornée" page 92 et de systèmes "sans grandes branches à l'infini" page 82).

Le point de vue adopté est celui de J. Aaronson, M. Denker et M. Urbanski ([A,D,U], [A,D]) sur les applications markoviennes non singulières.

Soit (X, \mathcal{B}, m) un espace de Lebesgue. Une application $T : X \rightarrow X$ est *Markovienne* s'il existe une partition $\mathcal{R} = \{a_j, j \in \mathcal{S}\}$ (modulo m) de X , ici \mathcal{S} sera infini dénombrable, telle que :

1. pour $a \in \mathcal{R}$, Ta est une union (mod m) d'éléments de \mathcal{R} ,
2. \mathcal{R} engendre la tribu \mathcal{B} sous T , c'est-à-dire, si \mathcal{B}_i désigne la tribu engendrée par la partition

$$\mathcal{R}_i = \left\{ \bigcap_{p=0}^i T^{-p} a_p, a_p \in \mathcal{R} \right\},$$

alors $\mathcal{B}_\infty = \bigcup_i \mathcal{B}_i$ coïncide avec la tribu \mathcal{B} aux ensembles de mesure nulle près.

3. pour $a \in \mathcal{R}$, $T|_a : a \rightarrow Ta$ est bijective et *non singulière*, c'est-à-dire $m(A) = 0$ implique $m(T^{-1}A) = 0$, $A \in \mathcal{B} \cap [a]$.

Un tel système est mesurablement conjugué au décalage :

$$\Sigma = \{s = (s_1, s_2, \dots) \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}, m \left(\bigcap_{k=1}^n T^{-k} a_{s_k} \right) > 0 \forall n \geq 1\},$$

muni de la mesure image encore notée m , dont le support est Σ . En effet, comme \mathcal{R} engendre la tribu \mathcal{B} sous T , il existe $X_0 \subset X$ de m -mesure pleine tel que

$$\forall x \in X_0, x = \bigcap_{i=1}^{\infty} T^{-i} a_{s_i(x)}$$

où $s_i(x)$ est défini par $s_i(x) = s$ si $T^i x \in a_s$. L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : X_0 &\longmapsto \Sigma \\ x &\rightsquigarrow (s_1(x), \dots, s_i(x), \dots) \end{aligned}$$

est bien définie et bijective, elle vérifie $\sigma \circ \mathcal{T} = \mathcal{T} \circ T$, \mathcal{T} est l'application de conjugaison.

L'image par \mathcal{T} de la tribu \mathcal{B} est la tribu produit \mathcal{F} sur Σ (car l'image par \mathcal{T} de $\bigcap_{i=1}^n T^{-i} a_{s_i}$ est le cylindre $[s_1, \dots, s_n]$ et les cylindres engendrent \mathcal{F}).

Le système markovien (X, \mathcal{R}, T, m) sera dit *irréductible* si :

$$\forall i, j \in \mathcal{S}, \exists n(i, j) > 0 \text{ tel que } m(a_i \cap T^{-n} a_j) > 0,$$

c'est-à-dire si le décalage associé est irréductible.

Il sera dit *apériodique* si :

$$\forall i, j \in \mathcal{S}, \exists n(i, j) > 0 \text{ tel que } \forall N > n(i, j), m(a_i \cap T^{-N} a_j) > 0,$$

c'est-à-dire si le décalage associé est apériodique.

Nous considérerons $(\Sigma, \mathcal{F}, m, \sigma)$ un sous-décalage de type fini sur un alphabet infini dénombrable \mathcal{S} , muni de la tribu \mathcal{F} des boréliens et de m une probabilité borélienne dont le support est Σ et par rapport à laquelle σ est non singulière. On peut toujours supposer $\mathcal{S} = \mathbb{N}$, ce que nous ferons par la suite.

Pour $r \in]0, 1[$ fixé, la métrique usuelle sur Σ est définie par $d(x, y) = r^{t(x, y)}$ où $t(x, y) = \min\{n \geq 1 / x_n \neq y_n\}$. Pour cette métrique, σ est lipschtzienne sur Σ .

La formule suivante définit une mesure σ -finie sur Σ :

$$m \circ \sigma(A) = \sum_{a \in \mathcal{S}} m(\sigma([a] \cap A)) \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

La non singularité de σ par rapport à m implique que m est absolument continue par rapport à $m \circ \sigma$. Soit $\Phi = \log \frac{dm}{dm \circ \sigma}$ et \mathcal{L}_Φ l'opérateur de transfert associé, m est une mesure 1-conforme pour \mathcal{L}_Φ ($m(\mathcal{L}_\Phi f) = m(f)$ pour toute $f \in L^1(m)$). Trouver une mesure finie invariante par σ et absolument continue par rapport à m revient à trouver un point fixe dans $L^1(m)$ pour \mathcal{L}_Φ . Les propriétés ergodiques de cette mesure invariante sont alors liées aux propriétés spectrales de l'opérateur, agissant sur un espace approprié. L désigne l'espace des fonctions de Σ lipschitziennes et bornées, $C_u(\Sigma)$ l'espace des fonctions uniformément continue et bornées sur Σ . Si Φ est telle que $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}\|_\infty < \infty$ (hypothèse **(K)** page 60), nous montrons le résultat suivant (chapitre 4).

Théorème F *Si Φ est lipschitzienne, vérifie **(K)** et si σ est irréductible alors 1 est valeur propre simple de l'opérateur \mathcal{L}_Φ agissant sur L . La fonction propre associée h est strictement positive sur Σ . De plus, \mathcal{L}_Φ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres de module 1. Si σ est apériodique, 1 est la seule valeur propre de module maximal et on a la convergence :*

$$\mathcal{L}_\Phi^n f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h \int f dm,$$

uniformément sur les compacts de Σ et dans $L^1(m)$, pour $f \in C_u(\Sigma)$.

Le chapitre 5 est consacré à l'estimation de la vitesse de convergence pour des observables de L , lorsque σ est apériodique. En utilisant les techniques de cônes et métriques projectives, on obtient, sous une condition proche de celle de X. Bressaud sur la pression à l'infini que la vitesse de mélange est exponentielle sur l'espace L .

Théorème G *Si Φ vérifie (**Exp1** définition page 73) alors, il existe $0 < \kappa < 1$, $C > 0$ tels que :*

$$\forall f \in L, \|\mathcal{L}_\Phi^n f - h \int f dm\|_\infty \leq C \kappa^n \|f\|.$$

L'intérêt d'utiliser les métriques projectives pour obtenir ce résultat est que ces techniques s'étendent pour donner des vitesses sous-exponentielles dans le cas où cette condition n'est plus vérifiée.

Proposition 5.6 *Si (Σ, σ) est sans grandes branches à l'infini (définition page 82) et vérifie (**S-Exp1** définition page 83) alors, pour N et k suffisamment grands, il existe une suite $(\alpha_j(N))_{j \in \mathbb{N}}$, $\alpha_j(N) \rightarrow 0$ telle que $\forall f \in L$,*

$$\|\mathcal{L}_\Phi^{kj} f - h \int f\|_N \leq \alpha_j \|f\| + m(\llbracket 0, N \rrbracket^c) \sup f,$$

où $\llbracket 0, N \rrbracket$ désigne l'ensemble des x de Σ tels que $x_0 \leq N$ et $\|\cdot\|_N$ la norme uniforme sur $\llbracket 0, N \rrbracket$. La suite $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}$ peut être déterminée explicitement et dépend de la contribution à $\mathcal{L}_{\Phi}^k \mathbf{1}$ du complémentaire d'un nombre fini de cylindres.

En choisissant convenablement N par rapport à j , on obtient ainsi une estimation de la vitesse de convergence sur chaque compact de Σ et de la décroissance des corrélations.

Des exemples de systèmes vérifiant **(Exp1)** ou **(S-Exp1)** sont traités au chapitre 6. En particulier, on obtient des estimations effectives de la vitesse de mélange pour des applications à “petites branches” ne vérifiant pas les hypothèses de [Bre] ou [L, S, V1]. On estime aussi la décroissance des corrélations pour des applications non uniformément dilatantes de l'intervalle, de type Gaspard-Wang sur un espace d'observables contenant les fonctions lipschitziennes (section 6.3).

Première partie

Potentiels non höldériens :
dynamiques déterministes et
aléatoires

Introduction

Cette partie est consacrée à l'étude des propriétés statistiques de sous-décalages de type fini sur un alphabet fini, associé à un potentiel non höldérien.

Soit (X, σ) un sous-décalage de type fini sur un alphabet fini A , associé à une matrice positive T . Nous supposons que (X, σ) est apériodique. M désigne alors le plus petit entier tel que $T^M > 0$. La topologie produit sur X est donnée par la distance $d(x, y) = r^n$, si $x_j = y_j$ pour $j = 0, \dots, n-1$ et $x_n \neq y_n$, pour $0 < r < 1$. Notons $x \stackrel{n}{\sim} y$ si $d(x, y) \leq r^n$ et \mathcal{B} la tribu des boréliens de X .

Soit $f \in C(X) = C(X, \mathbb{R})$, le module de continuité de f est la suite $(v_n(f))_{n \geq 0}$ avec :

$$v_n(f) = \sup_{x \stackrel{n}{\sim} y} |f(x) - f(y)|.$$

Nous étudions, dans un premier temps, le système déterministe associé à un potentiel vérifiant une condition un peu moins forte que celle de sommabilité du module de continuité (chapitre 2). Pour de tels potentiels, nous estimons la vitesse de convergence vers l'état d'équilibre pour des observables dans un sous-espace de Banach de l'espace des fonctions continues (théorème A). Nous déterminons le spectre de l'opérateur de transfert sur cet espace (théorème B) et montrons le théorème de la limite centrale (théorème C).

Dans un second temps, nous étudions des dynamiques aléatoires (chapitre 3). Nous considérons tout d'abord des perturbations aléatoires de potentiels dont le module de continuité est sommable et nous montrons que ces systèmes sont stochastiquement stables (théorèmes D et E). Des systèmes dynamiques aléatoires non höldériens plus généraux sont étudiés ensuite (proposition 3.10).

La plupart des résultats de cette partie reposent sur l'utilisation des techniques de cônes et métriques projectives de G. Birkhoff. Ces techniques sont exposées dans le chapitre 1.

Chapitre 1

Cônes et métriques projectives

La théorie des cônes et métriques projectives de G. Birkhoff [Bi1] constitue un outil puissant pour l'étude des opérateurs linéaires. P. Ferrero et B. Schmitt [F,S 1] l'ont appliquée pour estimer la décroissance des corrélations de systèmes dynamiques aléatoires. Cette stratégie a ensuite été utilisée par de nombreux auteurs. C. Liverani [Li1] l'a adaptée pour estimer la décroissance des corrélations d'applications de Lasota-Yorke possédant la propriété de "recouvrement". C. Liverani, B. Saussol et S. Vaienti [L, S, V1] ont amélioré la technique afin de construire une mesure conforme et obtenir des corrélations exponentielles pour une classe de dynamiques de type Lasota-Yorke sur un nombre dénombrable de morceaux et possédant la propriété de "recouvrement", associées à un potentiel à variation bornée. En dimension plus grande, C. Liverani [Li2] a adapté la méthode pour retrouver des corrélations exponentielles dans le cas d'Anosov préservant la mesure de Lebesgue; M. Viana [V] a mis en œuvre cette technique pour retrouver les résultats relatifs aux difféomorphismes Axiome A attracteurs. V. Baladi, A. Kondah, B. Schmitt [B,K,S] ont estimé les corrélations aléatoires de perturbations aléatoires de systèmes dynamiques dilatants et montré la stabilité stochastique de ces systèmes. T. Bogenschütz a utilisé ces techniques dans un cadre de sous-décalages aléatoires ([Bog1]), J. Buzzi ([Buz2]) pour obtenir des corrélations aléatoires exponentielles, dans le cas des dynamiques de Lasota-Yorke aléatoires.

Rappelons les définitions et propriétés des cônes et métriques projectives.

1.1 Définitions

Considérons B un espace vectoriel et $C \subset B$ un cône convexe. C'est-à-dire si x appartient à C , alors λx appartient à C pour tout $\lambda > 0$ et C est convexe. C est un *bon*

cône si :

- $C \cap -C = \emptyset$,
- si α_n est une suite de réels tels que $\alpha_n \rightarrow \alpha$ et $x - \alpha_n y \in C \forall n$ alors $x - \alpha y \in C$.
On dit alors que le cône est "intégralement clos".

Pour un tel cône, la pseudo-métrique θ sur C est définie de la façon suivante. Soient $x, y \in C$,

$$\begin{aligned}\mu(x, y) &= \inf\{\beta > 0 \text{ tel que } \beta x - y \in C\}, \\ \lambda(x, y) &= \sup\{\alpha > 0 \text{ tel que } y - \alpha x \in C\},\end{aligned}$$

en convenant que $\mu(x, y) = \infty$ et $\lambda(x, y) = 0$ si les ensembles correspondants sont vides. Soit $\theta_C(x, y) = \log \frac{\mu}{\lambda}$. θ est une pseudo-métrique car $\theta(x, y)$ n'est pas nécessairement finie. Par exemple, si x appartient au bord du cône, $\theta(x, y)$ est infini pour tout y . De plus, θ est une pseudo-métrique projective : si x et x_1 sont proportionnels, pour tout y dans le cône, $\theta(x, y) = \theta(x_1, y)$. Enfin, si on appelle a et b les points d'intersection du bord du cône avec la droite (x, y) , $\theta(x, y)$ est le log du birapport de ces quatre points :

$$\theta(x, y) = \left| \log \frac{|x - a| |y - b|}{|x - b| |y - a|} \right|.$$

Par exemple, si C est le quart de plan positif, $\theta(x, y) = |\log(\frac{x_1 y_1}{x_2 y_2})|$ ($x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$).

Si $C^+(X)$ est le cône des fonctions continues et positives sur un espace métrique compact X , $\theta_{C^+}(f, g) =: \theta_+(f, g) = \log(\frac{\sup f \sup g}{\inf f \inf g})$.

1.2 Propriétés

L'intérêt des métriques projectives réside dans les deux résultats suivants.

Soient C et C' deux bons cônes et P un opérateur linéaire $P : C \rightarrow C'$. Notons Δ le diamètre de PC dans C' :

$$\Delta = \sup_{f, g \in C} \theta_{C'}(Pf, Pg).$$

Proposition 1.1 [Bi1] Pour f, g dans C , on a :

$$\theta_{C'}(Pf, Pg) \leq \tanh\left(\frac{\Delta}{4}\right) \theta_C(f, g).$$

Preuve : Soient f et g appartenant à C . Si $\theta_C(f, g) = \infty$, l'inégalité est triviale. Supposons donc $\theta_C(f, g) = \log \frac{\mu}{\lambda} < \infty$ en particulier, $\mu \neq \infty$ et $\lambda \neq 0$. La propriété de clôture intégrale implique que μ et λ vérifient : $\mu f - g \in C$ et $g - \lambda f \in C$. On a alors $\mu Pf - Pg \in C'$ et $Pg - \lambda Pf \in C'$, ainsi $\theta_{C'}(Pf, Pg) \leq \theta_C(f, g)$, ce qui donne le résultat si $\Delta = \infty$. Supposons donc que Δ soit fini. On a alors

$$\theta_{C'}(P(\mu f - g), P(g - \lambda f)) \leq \Delta,$$

par définition de la métrique projective, il existe α et β tels que $\log \frac{\beta}{\alpha} \leq \Delta$ et

$$\beta P(\mu f - g) - P(g - \lambda f) \in C', \quad P(g - \lambda f) - \alpha P(\mu f - g) \in C'.$$

Cela s'écrit aussi :

$$\frac{\beta\mu + \lambda}{\beta + 1} Pf - Pg \in C' \quad \text{et} \quad Pg - \frac{\lambda + \alpha\mu}{\alpha + 1} Pf \in C'.$$

Ainsi, par définition de la métrique, Pf et Pg vérifient :

$$\begin{aligned} \theta_{C'}(Pf, Pg) &\leq \log \frac{(\beta\mu + \lambda)(\alpha + 1)}{(\lambda + \alpha\mu)(\beta + 1)} \\ &= \log \frac{\beta + e^{-\theta_C(f, g)}}{\alpha + e^{-\theta_C(f, g)}} - \log \frac{\beta + 1}{\alpha + 1} \\ &= \int_0^{\theta_C(f, g)} \frac{(\beta - \alpha)e^{-x}}{(e^{-x} + \alpha)(e^{-x} + \beta)} dx \\ &\leq \theta_C(f, g) \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{(\beta - \alpha)t}{(t + \alpha)(t + \beta)} \\ &\leq \theta_C(f, g) \frac{1 - \frac{\alpha}{\beta}}{(1 + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}})^2} \\ &\leq \theta_C(f, g) \tanh \frac{\Delta}{4} \end{aligned}$$

□

Cette proposition implique qu'un opérateur $P : C \rightarrow C'$ est toujours une contraction (au sens large) pour les métriques projectives. Si $\Delta < \infty$, P est une contraction stricte.

Remarque 1.1 Pour $C \subset C'$ et $P = Id$, la proposition 1.1 implique :

$$\forall f, g \in C, \quad \theta_{C'}(f, g) \leq \theta_C(f, g).$$

La proposition suivante relie la métrique θ à certaines normes sur B . Une norme $\| \cdot \|$ sur B est une *norme adaptée à C* , si pour f et g dans B tels que $f + g$ appartient à C et $f - g$ appartient à C alors $\|g\| \leq \|f\|$, ρ est une *forme homogène adaptée à C* si ρ est une application de C dans \mathbb{R}^+ vérifiant, pour $\lambda > 0$, $\rho(\lambda f) = \lambda\rho(f)$ et si $f - g \in C$ alors $\rho(g) \leq \rho(f)$.

Proposition 1.2 [Bi1], [L, S, V1] Soient $\| \cdot \|$ une norme et ρ une forme homogène adaptées à un cône C . Toutes fonctions f et g dans C telles que $\rho(f) = \rho(g) \neq 0$ vérifient :

$$\|f - g\| \leq (e^{\theta(f,g)} - 1) \min(\|f\|, \|g\|).$$

Preuve : Soient f et g appartenant à C telles que $\rho(f) = \rho(g) \neq 0$. Si $\theta(f, g) = \infty$, l'inégalité est trivialement vérifiée. Supposons donc que $\theta(f, g) = \log \frac{\mu}{\lambda}$ avec $\mu \neq \infty$, $\lambda \neq 0$ et $\mu f - g \in C$, $g - \lambda f \in C$. Les propriétés de la forme ρ donnent :

$$\lambda\rho(f) \leq \rho(g) \leq \mu\rho(f),$$

ainsi, $\lambda \leq 1 \leq \mu$. Comme λ est le plus petit réel positif tel que $g - \lambda f \in C$, ceci implique que

$$g - f - (\lambda - \mu)f \in C$$

et de même, $(\mu - \lambda)f - (g - f) \in C$. Le fait que la norme $\| \cdot \|$ soit adaptée au cône C implique alors :

$$\begin{aligned} \|f - g\| &\leq (\mu - \lambda)\|f\| \\ &\leq \frac{(\mu - \lambda)}{\lambda}\|f\| \\ &= [\exp(\theta_C(f, g)) - 1]\|f\|. \end{aligned}$$

L'inégalité annoncée résulte du fait que les rôles de f et g peuvent être échangés. \square

Par exemple, pour X un espace métrique et m une mesure sur X , la norme uniforme et $\rho = \int dm$ sont adaptées à $C^+(X)$, $\rho = \| \cdot \|_\infty$ convient aussi. L'exemple suivant sera utilisé dans le chapitre 3.

Exemple 1.1 Pour $g \in C^+(X)$, l'ensemble :

$$\pi(g) = \{f \in \widetilde{C^+(X)} / \theta_{C^+(X)}(f, g) < \infty\},$$

où $\widetilde{C^+(X)}$ est l'espace projectif de $C^+(X)$ identifié à $\widetilde{C^+(X)} = \{f \in C^+(X) / \int f dm = 1\}$, est complet pour la métrique projective.

Soit $g \in C^+(X)$, vérifions que l'ensemble $\pi(g)$ est complet pour la métrique projective. θ définit une métrique sur $\pi(g)$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\pi(g)$. Par la proposition 1.2, cette suite vérifie

$$\begin{aligned} \|f_n - f_0\|_\infty &\leq (e^{\theta(f_n, f_0)} - 1) \|f_0\|_\infty \text{ et} \\ \|f_n - f_{n+m}\|_\infty &\leq (e^{\theta(f_n, f_{n+m})} - 1) \|f_n\|_\infty. \end{aligned}$$

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant de Cauchy pour la métrique projective, $\theta(f_n, f_0)$ est bornée et $\theta(f_n, f_{n+m})$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Ainsi, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la norme uniforme sur X . Soit f la limite de cette suite pour la norme uniforme. f appartient au cône $C^+(X)$, car celui-ci est fermé pour la norme uniforme, et vérifie $\int f dm = 1$ (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int f_n dm = 1$). Vérifions que f_n converge vers f pour la métrique θ . Par définition de la métrique projective,

$$\mu(f_n, f) = \sup_{x \in X} \frac{f(x)}{f_n(x)}.$$

Comme f_n converge vers f en norme uniforme, $\mu(f_n, f)$ tend vers 1. De la même manière, $\lambda(f_n, f)$ tend vers 1. Ainsi, $\theta(f_n, f)$ tend vers zéro et l'espace $\pi(g)$ est bien complet.

Chapitre 2

Dynamiques déterministes non höldériennes

Les résultats de ce chapitre sont parus sous une première forme dans l'article [K,M,S] : A. KONDAH, V. MAUME et B. SCHMITT *Vitesse de convergence vers l'état d'équilibre pour des dynamiques markoviennes non höldériennes*, Ann. Inst. Poincaré Sec. Prob. Stat. (1997) **33** (6) 675-695. La principale différence entre les résultats présentés ici et ceux de l'article réside dans les cônes utilisés pour estimer la vitesse de convergence vers l'état d'équilibre. Dans [K,M,S] nous utilisons des cônes de fonctions strictement positives. Ici, nous utilisons des cônes de fonctions dont l'espérance conditionnelle par rapport à une partition finie est strictement positive. Cette nouvelle approche fait suite à des conversations électroniques avec C. Liverani et B. Saussol. Elle permet de préciser la vitesse de convergence en fonction du module de continuité du potentiel (voir section 2.1.2).

Soit $\Phi \in C(X)$ un potentiel à valeurs réelles. Le décalage σ étant markovien, pour x et y dans un même 1-cylindre, les antécédents de x par σ^n , $n \in \mathbb{N}$, sont en bijection avec ceux de y . Si $\sigma^n x' = x$ et $x' \in [a]$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$, notons y' l'antécédent de y qui appartient à $[a]$. Pour x et y dans X appartenant au même 1-cylindre, notons

$$C_\Phi(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \sup_{\sigma^n x' = x} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \Phi \circ \sigma^i(x') - \Phi \circ \sigma^i(y') \right|.$$

On suppose qu'il existe $C_\Phi > 0$ tel que $C_\Phi(x, y) \leq C_\Phi \forall x, y \in X$. Soit :

$$C_\Phi(p) = \sup_{x \mathcal{L} y} C_\Phi(x, y).$$

L'hypothèse **(W)** due à P. Walters [Wa1] est :

La suite $(C_\Phi(p))_{p \in \mathbb{N}}$ est strictement positive et décroît vers 0.

Rappelons que pour $f \in C(X)$, la suite $(v_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ est le module de continuité de f (définition page 3).

Remarque 2.1 Soient x et y tels que $x \stackrel{p}{\sim} y$, $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \Phi \circ \sigma^i(x') - \Phi \circ \sigma^i(y') \right| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} v_{n+p-i}(\Phi) \\ &= \sum_{i=p+1}^{n+p} v_i(\Phi). \end{aligned}$$

De plus, $C_\Phi(p) \geq \sup_{x \stackrel{p}{\sim} y} \sup_{\sigma x' = x} |\Phi(x') - \Phi(y')| = v_{p+1}(\Phi)$, en particulier, si le module de continuité de Φ est sommable, $v_{p+1}(\Phi) \leq C_\Phi(p) \leq \sum_{i=p+1}^{\infty} v_i(\Phi)$ et Φ vérifie l'hypothèse **(W)**. Par ailleurs, la suite $C_\Phi(p)$ est majorée par une suite géométrique si et seulement si la suite $v_\Phi(p)$ l'est aussi.

La suite $C_\Phi(n)$ définit une métrique sur X :

$$d_0(x, y) = C_\Phi(n) \text{ si } d(x, y) = r^n, d_0(x, x) = 0.$$

Soit L , l'espace des fonctions lipschitziennes par rapport à cette métrique ; c'est-à-dire :

$$L = \{f \in C(X) / \exists K \geq 0 / \forall n \geq 1, v_n(f) \leq KC_\Phi(n)\}.$$

Pour $f \in L$, la constante de Lipschitz $K(f)$ est définie par :

$$K(f) = \inf\{K > 0 / \forall n \geq 1, v_n(f) \leq KC_\Phi(n)\}.$$

Soit $\|f\| = \max(\|f\|_\infty, K(f))$. $\|\cdot\|$ définit une norme sur L qui en fait un espace de Banach. L'espace L est dense dans $C(X)$: il suffit de remarquer que les fonctions caractéristiques des cylindres appartiennent à L . Remarquons de plus, que si f et g appartiennent à L , alors $fg \in L$ et $K(fg) \leq \|f\|_\infty K(g) + \|g\|_\infty K(f)$; si $f \in L$, $f > 0$ alors $\frac{1}{f} \in L$ et $K(\frac{1}{f}) \leq \frac{1}{(\inf f)^2} K(f)$.

Remarque 2.2 Si le potentiel Φ est localement constant, l'hypothèse **(W)** n'est pas vérifiée car $C_\Phi(n) = 0$ pour n suffisamment grand. Dans ce cas, pour $0 < \theta < 1$ fixé,

posons $\widetilde{C_\Phi(n)} := \max(C_\Phi(n), \theta^n)$. Par convention, nous travaillerons alors avec $\widetilde{C_\Phi(n)}$ au lieu de $C_\Phi(n)$. En fait, on peut utiliser à la place de la suite $(C_\Phi(n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'importe quelle suite décroissante vers zéro qui la majore.

Remarquons que \mathcal{L}_Φ préserve l'espace L : soient $n \geq 1$, x et y tels que $x \stackrel{n}{\sim} y$ et $f \in L$,

$$\begin{aligned} & |\mathcal{L}_\Phi f(x) - \mathcal{L}_\Phi f(y)| \\ & \leq \sum_{\sigma x' = x} e^{\Phi(x')} |f(x') - f(y')| + \sup |f| \sum_{\sigma x' = x} e^{\Phi(y')} |\exp(\Phi(x') - \Phi(y')) - 1|, \\ & \leq K(f) C_\Phi(n+1) \|\mathcal{L}_\Phi \mathbf{1}\|_\infty + \|f\|_\infty \|\mathcal{L}_\Phi \mathbf{1}\|_\infty |e^{C_\Phi(n)} - 1| \\ & \leq \text{Cte } C_\Phi(n). \end{aligned}$$

Le théorème suivant, dû à P. Walters, est à la base de ce chapitre.

Théorème 2.1 [Wa1] *Si (X, σ) vérifie (\mathbf{W}) , il existe un unique triplet (h, c, ν) vérifiant*

1. $h \in L$, $\|\log h\|_\infty < \infty$, $c \in \mathbb{R}^+$ et ν est une probabilité sur X de support X et telle que $\nu(h) = 1$,
2. $\mathcal{L}_\Phi h = ch$,
3. $\mathcal{L}_\Phi^* \nu = c\nu$.

De plus, toute fonction f de $C(X)$ vérifie

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_\Phi^n f}{c^n} - h\nu(f) \right\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.1)$$

et Φ a un unique état d'équilibre $\mu = h\nu$.

Dans toute la suite de ce chapitre, h , c , ν et μ sont les objets définis par le théorème 2.1. La convergence (2.1) implique que μ est mélangeante. En effet, remarquons tout d'abord que par densité de $C(X)$ dans $L^1(\mu)$, les fonctions f de $L^1(\mu)$ vérifient

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_\Phi^n f}{c^n} - h\nu(f) \right\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Soient $f \in L^1(\mu)$ et $g = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} |\mu(f(g \circ \sigma^n)) - \mu(f)\mu(g)| &= \left| \int \left[\frac{\mathcal{L}_\Phi^n(fh)}{c^n} - h\nu(fh) \right] g d\nu \right| \\ &\leq \left\| \frac{\mathcal{L}_\Phi^n(fh)}{c^n} - h\nu(fh) \right\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

ce qui suffit pour montrer le mélange.

L'objet de ce chapitre est d'estimer la vitesse de convergence dans (2.1) pour des observables de L , lorsque le potentiel Φ n'est pas nécessairement höldérien. Lorsque le module de continuité de Φ est géométrique : $v_n(\Phi) \leq C\theta^n$, $0 < \theta < 1$ (c'est à dire que Φ est höldérienne pour la métrique usuelle d), la situation est bien connue ([Bo], [Pa, Po], [Ru1]) : \mathcal{L}_Φ en tant qu'opérateur sur L est quasi-compact¹. Ceci implique que la vitesse de convergence vers l'état d'équilibre, sur cet espace, est exponentielle. Cette propriété du trou spectral ou de la vitesse exponentielle des corrélations peut aussi être établie en utilisant les métriques projectives. En effet, le cône

$$\mathcal{C} = \{f \in C^+(X) / f(x) \leq f(y)e^{av_\Phi(n)} \text{ si } x \stackrel{n}{\sim} y, n \geq 1\},$$

est strictement contracté par \mathcal{L}_Φ^k pour k et a suffisamment grands. Les résultats du chapitre 1 (propositions 1.1 et 1.2) permettent alors de montrer que la vitesse de convergence dans (2.1) est exponentielle. Dans le cadre non höldérien, il n'existe pas, a priori, de cône strictement \mathcal{L}_Φ -invariant. Afin d'obtenir une estimation de la vitesse de mélange sur L , nous suivons une nouvelle approche en introduisant une suite de cônes. Précisément, on construit une suite $(\Lambda_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ de cônes convexes de fonctions de L et une suite $(k_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ d'entiers tels que : $\mathcal{L}_\Phi^{k_\ell} \Lambda_{\ell-1} \subset \Lambda_\ell$, $\ell \geq 1$ et pour lesquels, $\mathcal{L}_\Phi^{k_\ell}$ est une contraction de $\Lambda_{\ell-1}$ dans Λ_ℓ , de coefficient de contraction uniforme $\delta < 1$. Le captage d'une décroissance des corrélations non exponentielle provient alors du fait que $\mathcal{L}_\Phi^{k_1+\dots+k_\ell}$ est une contraction de Λ_0 dans Λ_ℓ , dont le coefficient de contraction est majoré par δ^ℓ (section 2.1). L'analyse de l'application $\ell \rightarrow k_\ell$ permet de préciser δ^ℓ en fonction de la suite $(C_\Phi(n))_{n \in \mathbb{N}}$ (section 2.1.2). Évidemment, dans le cas hölder, la suite k_ℓ est constante et on retrouve une vitesse de convergence exponentielle. Cette méthode nous permet d'estimer la vitesse dans d'autres cas ; par exemple, si $C_\Phi(n) = O(n^{-\alpha})$, $\alpha > 0$ alors la vitesse de mélange est en $\frac{1}{n^\alpha}$.

Lorsque la vitesse de mélange est sommable, les fonctions de L vérifient un théorème de la limite centrale (section 2.3).

Enfin, si $C_\Phi(n)$ vérifie une propriété supplémentaire impliquant que la suite $(\frac{\theta^n}{C_\Phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour tout $0 < \theta < 1$, le spectre de \mathcal{L}_Φ sur L est le disque fermé $D(0, c)$, chaque point du disque ouvert est une valeur propre de multiplicité infinie. En particulier, la vitesse de mélange ne peut pas être exponentielle (section 2.2).

¹Dans ce cas, L est un espace de fonctions höldériennes par rapport à la métrique usuelle.

2.1 Estimation de la vitesse de convergence

Dans cette section, nous montrons le résultat suivant.

Théorème A *Il existe $0 < \delta < 1$, $C > 0$ et $(\ell(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers tendant vers l'infini tels que, pour $f \in L$,*

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_{\Phi}^n f}{c^n} - h\nu(f) \right\|_{\infty} \leq C \delta^{\ell(n)} \|f\|. \quad (I)$$

De plus,

- si $C_{\Phi}(n) = O(n^{-\alpha})$, $\alpha > 0$ alors $\delta^{\ell(n)} = O(n^{-\alpha})$,
- si $C_{\Phi}(n) = O(\theta^n)$, $0 < \theta < 1$ alors il existe $0 < \gamma < 1$ tel que $\delta^{\ell(n)} = O(\gamma^n)$,
- si $C_{\Phi}(n) = O(\theta^{(\log n)^{\alpha}})$, $0 < \theta < 1$, $\alpha > 1$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $\delta^{\ell(n)} = O(\theta^{(\log n)^{\alpha-\varepsilon}})$.

Récemment M. Pollicott ([Po2]) et X. Bressaud, R. Fernández & A. Galves ([B,F,G]) obtiennent des résultats similaires. Ce résultat précise celui de A. Raugi ([Ra]) : si $\sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq n} v_{\Phi}(k) < \infty$, alors

$$\sum_n \|\mathcal{L}_{\Phi}^n f\|_{\infty} < \infty$$

pour f vérifiant $\sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq n} v_f(k) < \infty$ et $\int f d\nu = 0$.

Considérons l'opérateur \mathcal{L} normalisé : $\mathcal{L}f = c^{-1}h^{-1}\mathcal{L}_{\Phi}(fh)$, il vérifie $\mathcal{L}\mathbf{1} = \mathbf{1}$ et $\mathcal{L}^*\mu = \mu$. En effet, pour $f \in L^1(X)$,

$$\begin{aligned} \int_X \mathcal{L}f d\mu &= c^{-1} \int_X h^{-1} \mathcal{L}_{\Phi}(fh) h d\nu \\ &= \int_X fh d\nu = \int f d\mu. \end{aligned}$$

Pour obtenir la vitesse de convergence dans (2.1) pour $f \in L$, il suffit d'estimer la vitesse de convergence de $\mathcal{L}^n f$ vers $\mu(f)$ pour f dans L . En effet, h étant un élément de L borné loin de zéro, f appartient à L si et seulement si $\frac{f}{h}$ y appartient et on a

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_{\Phi}^n f}{c^n} - h\nu(f) \right\|_{\infty} \leq \|h\|_{\infty} \|\mathcal{L}^n(f/h) - \mu(f/h)\|_{\infty}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, soit

$$g_k = \frac{h}{c^k h \circ \sigma} \exp\left(\sum_{i=0}^{k-1} \Phi \circ \sigma^i\right),$$

g_k vérifie :

$$\mathcal{L}^k f(x) = \sum_{\sigma^k x' = x} g_k(x') f(x').$$

comme h appartient à L et est bornée loin de zéro, $\log h$ appartient à L , g_k vérifie alors la propriété de distorsion bornée : il existe alors $K > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left| 1 - \frac{g_k(x')}{g_k(y')} \right| \leq KC_\Phi(n) \text{ pour } x \stackrel{n}{\sim} y, n \geq 1.$$

En effet,

$$\frac{g_k(x')}{g_k(y')} = \frac{h(x')}{h(y')} \frac{h(y)}{h(x)} \exp\left[\sum_{i=0}^{k-1} \Phi \circ^i x' - \Phi \circ^i y'\right]$$

et

- $\frac{h(x')}{h(y')} \leq \frac{K(h)}{\inf h} C_\Phi(n+k) + 1 \leq \exp[\text{Cte } C_\Phi(n)],$
- $\frac{h(y)}{h(x)} \leq \frac{K(h)}{\inf h} C_\Phi(n) + 1 \leq \exp[\text{Cte } C_\Phi(n)],$
- $\exp\left[\sum_{i=0}^{k-1} \Phi \circ^i x' - \Phi \circ^i y'\right] \leq \exp[C_\Phi(n)]$ par définition de $C_\Phi(n)$.

Ces trois inégalités impliquent la propriété de distorsion bornée.

La mesure μ étant mélangeante, pour toute partition finie, \mathcal{P} , de X , formée d'ouverts non vides, pour tout $\alpha < 1 < \alpha'$, il existe k_0 tel que $\forall k > k_0$,

$$\forall P, P' \in \mathcal{P}, \alpha \leq \frac{\mu(\sigma^{-k}P \cap P')}{\mu(P)\mu(P')} \leq \alpha', \quad (2.2)$$

(remarquons que $\mu(P) > 0$ pour tout $P \in \mathcal{P}$ car le support de ν est X et h est strictement positive).

Pour $s \in \mathbb{N}^*$, notons \mathcal{P}_s la partition finie de X en s -cylindres, soient a, b des réels positifs. $\Lambda_{a,b}$ est le cône des fonctions de L qui vérifient :

1. $\forall P \in \mathcal{P}_s, 0 < \frac{1}{\mu(P)} \int_P f d\mu \leq a \int f d\mu$, (c'est à dire $0 < \mathbb{E}(f|\mathcal{P}_s) \leq a \int f d\mu$)
2. $K(f) \leq b \int f d\mu$,

Remarquons que $\Lambda_{a,b}$ est un bon cône au sens du chapitre 1.

2.1.1 Construction des cônes.

Nous allons maintenant construire une suite de métriques d_ℓ , une suite d'entiers k_ℓ et une suite de cônes Λ_ℓ tels que $\mathcal{L}^{k_\ell}\Lambda_\ell \subset \Lambda_{\ell+1}$ et vérifiant, de plus, le diamètre Δ_ℓ de $\mathcal{L}^{k_\ell}\Lambda_\ell$ dans $\Lambda_{\ell+1}$ est uniformément borné en ℓ .

Commençons par étudier l'action de \mathcal{L}^k sur les fonctions de $\Lambda_{a,b}$.

Notons D_0 le diamètre pour la métrique d_0 de la partition \mathcal{P}_s définie ci-dessus,

$$D_0 = \sup_{P \in \mathcal{P}_s} \sup_{x, y \in P} d_0(x, y) = C_\Phi(s).$$

Nous utiliserons aussi la convention suivante, pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a = b \pm c$ signifie que $b - c \leq a \leq b + c$.

Remarquons que toute fonction φ de L vérifie pour $P \in \mathcal{P}_s$ et $x \in P$:

$$\frac{1}{\mu(P)} \int_P \varphi d\mu - K(\varphi)D_0 \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{\mu(P)} \int_P \varphi d\mu + K(\varphi)D_0. \quad (2.3)$$

En effet, soient x et y appartenant à P ,

$$\varphi(y) - K(\varphi)d_0(x, y) \leq \varphi(x) \leq \varphi(y) + K(\varphi)d_0(x, y),$$

ceci donne (2.3) en intégrant en y . Soient $f \in \Lambda_{a,b}$, et $x \stackrel{n}{\sim} y$, $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}^k f(x) - \mathcal{L}^k f(y)| &= \left| \sum_{\sigma^k x' = x} g_k(x')f(x') - \sum_{\sigma^k y' = y} g_k(y')f(y') \right| \\ &\leq \sum_{\sigma^k x' = x} g_k(x')|f(x') - f(y')| + \sum_{\sigma^k x' = x} |g_k(x') - g_k(y')| |f(y')| \\ &\leq \mathcal{L}^k \mathbf{1}(x)K(f)C_\Phi(n+k) + \sup |f| \sum_{\sigma^k x' = x} g_k(x') \left| 1 - \frac{g_k(y')}{g_k(x')} \right| \\ &\leq K(f)C_\Phi(n+k) + \sup |f| K C_\Phi(n) \end{aligned}$$

soit, en utilisant (2.3) et la définition de $\Lambda_{a,b}$

$$|\mathcal{L}^k f(x) - \mathcal{L}^k f(y)| \leq b \int f d\mu \left[C_\Phi(n+k) + C_\Phi(n)K \frac{a + bD_0}{b} \right]. \quad (2.4)$$

Pour $k_1 \in \mathbb{N}^*$ qui sera fixé plus tard et $D > 1$ considérons

$$C_1(n) = D[C_\Phi(n+k_1) + C_\Phi(n)].$$

La suite $(C_1(n))_{n \in \mathbb{N}}$ définit une nouvelle métrique sur X notée d_1 :

$d_1(x, y) = C_1(n)$ si $d(x, y) = r^n$, soit $K_1(f)$ la constante de Lipschitz de f pour la métrique d_1 .

L'équation (2.4) montre que si D_0 est suffisamment petit et b suffisamment grand,

$$K_1(\mathcal{L}^{k_1} f) \leq \frac{b}{D} \int f d\mu,$$

Par ailleurs, pour un élément P de \mathcal{P}_s , (2.3) donne aussi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(P)} \int_P \mathcal{L}^k f d\mu &= \frac{1}{\mu(P)} \int_{\sigma^{-k}P} f d\mu = \frac{1}{\mu(P)} \sum_{P'} \int_{\sigma^{-k}P \cap P'} f d\mu \\ &= \sum_{P'} \frac{\mu(\sigma^{-k}P \cap P')}{\mu(P')\mu(P)} \int_{P'} f d\mu \pm D_0 K(f) \sum_{P' \in \mathcal{P}_1} \frac{\mu(\sigma^{-k}P \cap P')}{\mu(P')\mu(P)} \mu(P'). \end{aligned}$$

Ainsi, si k vérifie (2.2), on obtient :

$$[\alpha - \alpha' b D_0] \int f d\mu \leq \frac{1}{\mu(P)} \int_P \mathcal{L}^k f d\mu \leq \alpha' [1 + b D_0] \int f d\mu. \quad (2.5)$$

Soit $\Lambda_{a,b}^1$ le cône des fonctions de L qui vérifient :

- $\forall P \in \mathcal{P}_s, 0 < \frac{1}{\mu(P)} \int_P f d\mu \leq a \int f d\mu,$
- $K_1(f) \leq b \int f d\mu,$

Le lemme suivant montre que si les paramètres sont bien choisis, \mathcal{L}^{k_1} est une contraction de $\Lambda_{a,b}$ dans Λ_1 .

Lemme 2.2 *Il existe $D > 1$, $k_1 \in \mathbb{N}^*$, $a > 0$, $b > 0$ et $s \in \mathbb{N}^*$ tels que, $\mathcal{L}^{k_1} \Lambda_{a,b} \subset \Lambda_{a,b}^1$. De plus, le diamètre Δ_1 de $\mathcal{L}^{k_1} \Lambda_{a,b}$ dans $\Lambda_{a,b}^1$ est majoré par $2 \log \frac{D+1}{D-1}$.*

Preuve : Fixons $0 < \zeta < 1$, $\alpha < 1 < \alpha'$ et k_0 tel que (2.2) soit vérifiée pour α et α' . Soient

- a. a tel que $a \geq \zeta^{-1}(\alpha' + \alpha/2)$,
- b. b tel que $b > K(a + 1)$,
- c. $D > 1$ tel que $\frac{D+1}{D-1} \geq \max \left[\frac{2\alpha' + \alpha}{\alpha}, \frac{1}{1-\zeta} \right]$,
- d. $s \in \mathbb{N}$ tel que $b(D + 1)C_\Phi(s) < \frac{\alpha}{2\alpha'}$,
- e. k_1 tel que (2.2) soit vérifiée et $DC_\Phi(s + k_1) \leq C_\Phi(s)$,

Soit $f \in \Lambda_{a,b}$, avec les choix ci-dessus, $bD_0 = bC_\Phi(s) < \frac{\alpha}{2\alpha'} < 1$, l'équation (2.5) donne :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \int \mathcal{L}^k f d\mu &\leq \frac{1}{\mu(P)} \int_P \mathcal{L}^k f d\mu \\ &\leq (\alpha' + \alpha/2) \int \mathcal{L}^k f d\mu \leq \zeta a \int \mathcal{L}^k f d\mu \quad (a \text{ vérifie a.}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

et l'équation (2.4), $K_1(\mathcal{L}^k f) \leq \frac{b}{D} \int f d\mu$. Ainsi, $\mathcal{L}^{k_1} \Lambda_{a,b} \subset \Lambda_{a,b}^1$.

Il reste à estimer le diamètre projectif. Soient f et g appartenant à $\mathcal{L}^{k_1}(\Lambda_{a,b})$ et $\eta > 0$ tel que $\eta f - g$ appartienne à $\Lambda_{a,b}^1$, η doit vérifier :

$$1. \forall P \in \mathcal{P}_s, 0 \leq \frac{\eta}{\mu(P)} \int_P f d\mu - \frac{1}{\mu(P)} \int_P g d\mu \leq a\eta \int f d\mu - a \int g d\mu,$$

2. pour x et y dans un même 1-cylindre,

$$\begin{aligned} -b\eta \int f d\mu + b \int g d\mu &\leq \frac{\eta(f(x) - f(y)) - (g(x) - g(y))}{d_1(x, y)} \\ &\leq b\eta \int f d\mu - b \int g d\mu, \end{aligned}$$

Pour vérifier 1., il faut

$$\eta \geq \sup_{P \in \mathcal{P}_s} \frac{a \int g - 1/\mu(P) \int_P g}{a \int f - 1/\mu(P) \int_P f} \text{ et } \eta \geq \sup_{P \in \mathcal{P}_s} \frac{\int_P g}{\int_P f}.$$

Or, par (2.6), on a :

$$\frac{\int g d\mu - \frac{1}{\mu(P)} \int_P g d\mu}{\int f d\mu - \frac{1}{\mu(P)} \int_P f d\mu} \leq \frac{1}{1 - \zeta} \frac{\int g d\mu}{\int f d\mu} \quad \forall P \in \mathcal{P}_s$$

$$\text{et } \frac{\int_P g d\mu}{\int_P f d\mu} \leq \frac{2\alpha' + \alpha}{\alpha} \frac{\int g d\mu}{\int f d\mu} \quad \forall P \in \mathcal{P}_s.$$

Ainsi, pour avoir 1., il suffit que η vérifie :

$$\eta \geq \frac{\int g}{\int f} \max \left(\frac{1}{1 - \zeta}, \frac{2\alpha' + \alpha}{\alpha} \right).$$

Pour vérifier 2., il faut, pour x et y dans un même 1-cylindre,

$$\begin{aligned} \eta &\geq \frac{b \int_X g - \frac{gx - gy}{d_1(x, y)}}{b \int_X f - \frac{fx - fy}{d_1(x, y)}} \text{ et} \\ \eta &\geq \frac{b \int_X g + \frac{gx - gy}{d_1(x, y)}}{b \int_X f + \frac{fx - fy}{d_1(x, y)}}, \end{aligned}$$

comme $K_1(f) \leq \frac{b}{D} \int f d\mu$ et $K_1(g) \leq \frac{b}{D} \int g d\mu$, il suffit d'avoir :

$$\eta \geq \frac{\int g d\mu}{\int f d\mu} \frac{1 + D}{D - 1}.$$

De la même manière, soit $\zeta > 0$ tel que $g - \zeta f \in \Lambda_{a,b}^1$, il suffit que ζ vérifie :

$$\zeta \leq \frac{\int g}{\int f} \min \left[1 - \gamma, \frac{D - 1}{D + 1}, \frac{\alpha}{2\alpha' + \alpha} \right].$$

Comme D vérifie $\frac{D+1}{D-1} \geq \frac{2\alpha'+\alpha}{\alpha}$ et $\frac{D+1}{D-1} \geq \frac{1}{1-\gamma}$, le diamètre Δ_1 de $\mathcal{L}_\Phi^k \Lambda_{a,b}$ dans $\Lambda_{a,b}^1$ est alors majoré par $2 \log \frac{D+1}{D-1}$. \square

Remarque 2.3 Dans la preuve du lemme 2.2, on utilise $bD_0 < \frac{\alpha}{2\alpha'} < 1$.

La condition e. implique que le diamètre $D_1 = C_1(s)$ de \mathcal{P}_s pour la métrique d_1 est majoré par $(D + 1)C_\Phi(s)$. La condition $b(D + 1)C_\Phi(s) < \frac{\alpha}{2\alpha'}$ permet d'amorcer une récurrence. En effet, on a alors $bD_1 \leq \frac{\alpha}{2\alpha'}$.

Fixons a, b, D et s tels que le lemme 2.2 soit vérifié. Soit $k_0 = \inf\{k \in \mathbb{N} / (2.2) \text{ soit vérifiée}\}$ et $k_1 = \inf\{k > k_0 / DC_\Phi(k + s) \leq C_\Phi(s)\}$.

En procédant comme pour montrer (2.4), on obtient, pour x et y tels que $x \stackrel{n}{\sim} y$, $n \geq 1$ et $f \in \Lambda_{a,b}^1$:

$$|\mathcal{L}_\Phi^k f(x) - \mathcal{L}_\Phi^k f(y)| \leq b \int f d\mu \left[C_1(n + k) + C_\Phi(n) K \frac{a + bD_1}{b} \right],$$

on est alors conduit à définir par induction k_ℓ et $C_\ell(n)$ de la façon suivante :

- $k_{\ell+1} = \inf\{k > k_0 / DC_\ell(s + k_{\ell+1}) \leq C_\Phi(s)\}$,
- la suite $(C_\ell(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par induction par

$$C_\ell(n) = D[C_{\ell-1}(n + k_\ell) + C_\Phi(n)].$$

Chaque suite $(C_\ell(n))_{n \in \mathbb{N}}$ définit une métrique sur X notée d_ℓ . Pour $f \in L$, $K_\ell(f)$ désigne la constante de Lipschitz de f pour la métrique d_ℓ et D_ℓ désigne le diamètre de la partition \mathcal{P}_s pour la métrique d_ℓ , par construction, $D_\ell = C_\ell(s) \leq (D + 1)C_\Phi(s)$ et donc $bD_\ell \leq \frac{\alpha}{2\alpha'}$. Soit $\Lambda_{a,b}^\ell$ le cône des fonctions de L qui vérifient :

1. $\forall P \in \mathcal{P}_s, 0 < \frac{1}{\mu(P)} \int_P f d\mu \leq a \int f d\mu$,
2. $K_\ell(f) \leq b \int f d\mu$.

Notons $\Lambda_{a,b}^0 = \Lambda_{a,b}$. En procédant comme dans la démonstration du lemme 2.2 on obtient le résultat suivant.

Proposition 2.3 *La suite d'entiers $(k_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ et la suite de cônes $(\Lambda_{a,b}^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ vérifient :*

- $\mathcal{L}^{k_\ell} \Lambda_{a,b}^{\ell-1} \subset \Lambda_{a,b}^\ell$, $\ell \geq 1$,
- Le diamètre Δ_ℓ de $\mathcal{L}^{k_\ell} \Lambda_{a,b}^{\ell-1}$ dans $\Lambda_{a,b}^\ell$ est majoré par $2 \log \frac{D+1}{D-1} =: \Delta$.

Soit Λ le cône des fonctions f de L telles que $0 < \sup_{x \in X} |f(x)| \leq (a + 1) \int_X f d\mu$. Les propriétés suivantes découlent directement de la définition de Λ :

1. $\Lambda \cap -\Lambda = \emptyset$,
2. Λ est un cône convexe,
3. Λ est fermé pour la topologie de la norme uniforme.

Pour utiliser les résultats du chapitre 1, nous avons besoin d'une norme adaptée à Λ . Étant donné $d > 0$, considérons la norme

$$\|f\|_d = \max(d \left| \int f d\mu \right|, \|f\|_\infty).$$

Remarquons que pour tout d , la norme $\|\cdot\|_d$ est équivalente à la norme uniforme sur X .

Lemme 2.4 *Pour tout $d \geq a + 1$, la norme $\|\cdot\|_d$ est adaptée au cône Λ .*

Preuve : Si f et g sont telles que $f + g$ et $f - g$ appartiennent à Λ ,

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \pm(a+1) \int (f - g) d\mu \text{ et} \\ f(x) + g(x) &= \pm(a+1) \int (f + g) d\mu. \end{aligned}$$

Ceci donne, en soustrayant les deux inéquations,

$$|g(x)| \leq (a+1) \int f d\mu$$

de plus, si $f - g \in \Lambda$ et $f + g \in \Lambda$ alors $|\int g d\mu| \leq \int f d\mu$. Ainsi, pour $x \in X$, $\|g\|_d \leq \|f\|_d$ si $d \geq a + 1$. \square

Remarquons que par les choix de a, b, s et k_ℓ , les cônes $\Lambda_{a,b}^\ell$ sont des sous-cônes de Λ . En effet, si f appartient à $\Lambda_{a,b}^\ell$, f vérifie

- $\forall P \in \mathcal{P}_s, 0 < \frac{1}{\mu(P)} \int_P f d\mu \leq a \int f d\mu,$
- $K_\ell(f) \leq b \int f d\mu.$

En utilisant la métrique d_ℓ à la place de d_0 dans la démonstration de (2.3), on obtient

$$\begin{aligned} \sup |f| &\leq \sup \mathbb{E}(f | \mathcal{P}_s) + K_\ell(f) D_\ell \\ \sup |f| &\leq a \int f d\mu + b D_\ell \int f d\mu \\ \sup |f| &\leq (a+1) \int f d\mu \text{ car } b D_\ell \leq b(D+1)C_\Phi(s) < 1. \end{aligned}$$

La proposition 1.1 implique $\theta_\Lambda \leq \theta_{\Lambda_{a,b}^\ell}$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. Soient $\delta = \tanh \frac{\Delta}{4}$ et $f \in \Lambda_0$, $\mathcal{L}_\Phi^{k_1+\dots+k_\ell} f$ appartient à $\Lambda_{a,b}^\ell$, la proposition 1.1 donne alors

$$\theta_\Lambda(\mathcal{L}^{k_1+\dots+k_\ell} f, \mathbf{1}) \leq \theta_{\Lambda_{a,b}^\ell}(\mathcal{L}^{k_1+\dots+k_\ell} f, \mathbf{1}) \leq \delta \theta_{\Lambda_{a,b}^{\ell-1}}(\mathcal{L}^{k_1+\dots+k_{\ell-1}} f, \mathbf{1}) \leq \dots \leq \delta^{\ell-1} \Delta.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique entier $\ell(n)$ tel que

$$k_1 + \dots + k_{\ell(n)} \leq n < k_1 + \dots + k_{\ell(n)+1},$$

La proposition 1.2, appliquée avec $\|\cdot\|_d$ et μ comme forme homogène, permet alors d'estimer la vitesse de convergence de $\mathcal{L}^n f$ vers $\mu(f)$ pour f dans Λ_0 , soit $n = k_1 + \dots + k_{\ell(n)} + u$, $u \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}^n f - \mu(f)\|_d &= \|\mathcal{L}^u[\mathcal{L}^{k_1+\dots+k_{\ell}} f - \mu(f)]\|_d \\ &\leq \|\mathcal{L}^u\|_d \|\mathcal{L}^{k_1+\dots+k_{\ell}} f - \mu(f)\|_d \\ &\leq \text{Cte } \delta^{\ell(n)} \mu(f). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Le lemme suivant va nous permettre d'obtenir une estimation de la vitesse de convergence de $\mathcal{L}^n f$ vers $\mu(f)$ pour f dans L .

Lemme 2.5 *Pour toute fonction f de L , il existe $R(f) \geq 0$ tel que $f + R(f)\mathbf{1}$ appartienne à Λ_0 et $R(f) \leq \text{Cte}\|f\|$.*

Preuve : Soit $f \in L$, $R(f)$ doit vérifier

- $R(f) \geq \sup_{P \in \mathcal{P}_s} \frac{1/\mu(P) \int_P f d\mu - a \int_X f d\mu}{a-1},$
- $R(f) \geq \frac{K(f) - b \int_X f}{b}.$

Ainsi, choisissons $R(f)$ vérifiant

$$R(f) = \max \left[\frac{K(f)}{b} + \int f d\mu, \sup |f| \frac{a+1}{a-1} \right] \leq \text{Cte}\|f\|.$$

□

Soit $f \in L$, notons $f_{\Lambda_0} = f + R(f)\mathbf{1} \in \Lambda_0$. L'équation (2.7) et le lemme 2.5 impliquent,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}^n f - \mu(f)\|_d &\leq \|\mathcal{L}^n f_{\Lambda_0} - \mu(f_{\Lambda_0})\|_d + \|R(f)\mathcal{L}^n \mathbf{1} - R(f)\mu(\mathbf{1})\|_d \\ &\leq \text{Cte} \delta^{\ell(n)} \|f\|. \end{aligned}$$

Comme la norme $\|\cdot\|_d$ est équivalente à la norme uniforme sur X , on obtient, pour toute $f \in L$,

$$\|\mathcal{L}^n f - \mu(f)\|_{\infty} \leq \text{Cte} \delta^{\ell(n)} \|f\|.$$

On a ainsi obtenu l'inégalité (I) du théorème A.

2.1.2 Exemples d'estimation explicite de la vitesse de mélange.

Pour terminer la preuve du théorème A, estimons $\delta^{\ell(n)}$ dans les cas suivants :

i) $C_{\Phi}(n) = O(1/n^{\alpha})$, $\alpha > 0$,

ii) $C_{\Phi}(n) = O(\theta^n)$, $0 < \theta < 1$,

iii) $C_{\Phi}(n) = O(\theta^{(\log n)^{\alpha}})$, $0 < \theta < 1$, $\alpha > 1$.

Il s'agit d'expliciter $\ell(n)$ en fonction de n . Remarquons que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$$C_{\ell}(n) = DC_{\Phi}(n) + \cdots + D^{\ell}C_{\Phi}(n + k_{\ell} + \cdots + k_2) + D^{\ell}C_{\Phi}(n + k_{\ell} + \cdots + k_1). \quad (2.8)$$

La suite $C_{\Phi}(n)$ étant décroissante, (2.8) implique :

$$C_{\ell}(s + k_{\ell+1}) \leq C_{\Phi}(s + k_{\ell+1}) \sum_{i=1}^{\ell+1} D^i = C_{\Phi}(s + k_{\ell+1}) \frac{D^{\ell+2} - D}{D - 1}. \quad (2.9)$$

Dans ce qui suit, R désigne une constante ne dépendant que de la suite $(C_{\Phi}(n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Cas i).

Supposons que $C_{\Phi}(n) = O(1/n^{\alpha})$, $\alpha > 0$ et montrons que $\delta^{\ell(n)} = O(\frac{1}{n^{\alpha}})$. Par (2.9), pour avoir $DC_{\ell-1}(s + k_{\ell}) \leq C_{\Phi}(s)$, il suffit de choisir k_{ℓ} tel que $\frac{D^{\ell}R}{(k_{\ell})^{\alpha}} \leq 1$ prenons $k_{\ell} = O(D^{\frac{\ell}{\alpha}})$ et $k_{\ell} \geq k_0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit ℓ tel que

$$k_1 + \cdots + k_{\ell} \leq n < k_1 + \cdots + k_{\ell+1}$$

alors, $\ell > \alpha \frac{\log \frac{n}{R}}{\log D} - 1$. De plus, $\delta = \tanh \frac{\Delta}{4} = D^{-1}$, ainsi $\delta^{\ell(n)} \leq \text{Cte} (\frac{n}{R})^{-\alpha}$, ce qui est le résultat annoncé.

Cas ii).

Si maintenant $C_{\Phi}(n) = O(\theta^n)$, $0 < \theta < 1$, soit $k \in \mathbb{N}$, par (2.8),

$$C_{\ell}(s + k) \leq R\theta^s \sum_{i=1}^{\ell} (D\theta^k)^i,$$

ainsi, pour k suffisamment grand, $DC_{\ell}(s + k) \leq C_{\Phi}(s)$, c'est-à-dire que la suite k_{ℓ} peut être choisie constante et la vitesse de convergence est exponentielle. On retrouve ainsi le résultat classique ([Bo], [Pa, Po]).

Cas *iii*.

Supposons $C_\Phi(n) = O(\theta^{(\log n)^\alpha})$, $0 < \theta < 1$, $\alpha > 1$, montrons que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\delta^{\ell(n)} = O(\theta^{(\log n)^{\alpha-\varepsilon}})$. Par (2.9), pour avoir $DC_{\ell-1}(s + k_\ell) \leq C_\Phi(s)$, il suffit de choisir k_ℓ tel que $RD^\ell \theta^{(\log k_\ell)^\alpha} \leq 1$ on peut prendre $k_\ell = O(\exp \left[\frac{\ell \log D}{\log(\theta^{-1})} \right]^{\frac{1}{\alpha}})$ et $k_\ell \geq k_0$. Pour tout $u > 1$ et $\gamma < 1$, la somme $u + u^{2^\gamma} + \dots + u^{\ell^\gamma}$ est un $O(\ell^{-\gamma+1} u^{\ell^\gamma}) = O(u^{\ell^{\gamma-\eta}})$, pour tout $\eta > 0$. Avec $\gamma = \alpha^{-1}$ et $u = \exp \left[\frac{\log D}{\log \theta^{-1}} \right]$, pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient pour ℓ tel que

$$k_1 + \dots + k_\ell \leq n < k_1 + \dots + k_{\ell+1}$$

$\ell \geq (\log \frac{n}{R})^{\frac{\alpha}{\alpha-\eta}} \frac{\log \theta^{-1}}{\log D}$. Finalement, on obtient (avec $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{\alpha}{\alpha-\eta} = \alpha - \varepsilon$, un tel ε existe car $\alpha > 1$),

$$\delta^{\ell(n)} = \left(\frac{1}{D} \right)^{\ell(n)} \leq \exp \left[-(\log \frac{n}{R})^{\alpha-\varepsilon} \log \theta^{-1} \right] = O(\theta^{(\log n)^{\alpha-\varepsilon}}).$$

Ceci termine la preuve du théorème A. □

2.2 Spectre de \mathcal{L}_Φ .

Dans cette section, nous étudions le spectre de \mathcal{L}_Φ en tant qu'opérateur sur l'espace L . Dans le cas où $v_n(\Phi) \leq K\theta^n$ pour un $0 < \theta < 1$ (ou, de manière équivalente, dans le cas où Φ est höldérienne d'ordre $\zeta = \frac{\log \theta}{\log r}$ par rapport à la métrique d), \mathcal{L}_Φ , en tant qu'opérateur sur l'espace L des fonctions höldériennes d'ordre ζ par rapport à la métrique d , est quasi-compact ([Pa, Po]). Son spectre essentiel est le disque fermé $D(0, c\theta)$, chaque point du disque ouvert est une valeur propre de multiplicité infini.

Considérons les deux conditions suivantes sur Φ :

$$\text{la suite } \left(\frac{C_\Phi(n)}{C_\Phi(n+1)} \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée.} \quad (\mathbf{C0})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_\Phi(n)}{C_\Phi(n+1)} = 1. \quad (\mathbf{C1})$$

Évidemment, (C1) implique (C0). Nous allons montrer que si C_Φ vérifie (C1) alors chaque point du disque ouvert $D(0, c)$ est une valeur propre de \mathcal{L}_Φ en tant qu'opérateur sur L .

Remarque 2.4 (C0) est satisfaite par les trois exemples de 2.1.2, la condition (C1) est satisfaite par *i*) et *iii*) de 2.1.2.

Le lemme suivant montre que (C1) est naturelle dès lors que l'on souhaite sortir du cadre höldérien.

Lemme 2.6 *Si Φ vérifie (C1) alors, pour tout $0 < \theta < 1$, la suite*

$$\left(\frac{\theta^n}{C_\Phi(n)} \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est majorée.}$$

Preuve : Fixons $0 < \theta < 1$. Par (C1) il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$,

$$\frac{C_\Phi(n)}{C_\Phi(n+1)} \leq \frac{1}{\theta},$$

on a donc, pour $n \geq n_0$,

$$C_\Phi(n) \geq \theta^{n-n_0} C_\Phi(n_0).$$

Ceci permet de conclure le lemme. □

Le lemme 2.6 sera utilisée dans la section 2.2.2. Le résultat suivant sera démontré en adaptant les fonctions propres construites par P. Collet et S. Isola ([C, I]) et M. Pollicott ([Po3]).

Théorème B *Si Φ vérifie l'hypothèse (C1), le spectre de \mathcal{L}_Φ , en tant qu'opérateur sur L est le disque fermé de centre 0 et de rayon c . De plus, chaque point du disque ouvert est une valeur propre de multiplicité infinie.*

Remarquons tout d'abord que c vérifie :

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{L}_\Phi^n \mathbf{1}\|_\infty^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf \mathcal{L}_\Phi^n \mathbf{1})^{1/n}.$$

En effet, par le théorème 2.1, c est le rayon spectral de P en tant qu'opérateur sur $C(X)$, ceci donne la première inégalité ; la seconde résulte du fait que pour x et $y \in X$, $e^{-C_\Phi} \mathcal{L}_\Phi^n \mathbf{1}(y) \leq \mathcal{L}_\Phi^n \mathbf{1}(x) \leq e^{C_\Phi} \mathcal{L}_\Phi^n \mathbf{1}(y)$.

Le rayon spectral de \mathcal{L}_Φ comme opérateur sur L est aussi c . En effet, (2.4) donne pour $f \in L$,

$$K(\mathcal{L}^k f) \leq K(f) \sup_{n \geq 1} \frac{C_\Phi(n+k)}{C_\Phi(n)} + \|f\|_\infty \leq K(f) + \|f\|_\infty.$$

En particulier, on a $K(\mathcal{L}^k f) \leq \text{Cte} \|f\|$, de plus $\|\mathcal{L}^k f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, ainsi $\|\mathcal{L}^k f\| \leq \text{Cte} \|f\|$. Ceci implique que le rayon spectral, $r(\mathcal{L})$, de \mathcal{L} , en tant qu'opérateur sur L est majoré par 1 (donc $r(\mathcal{L}) = 1$ car 1 est une valeur propre). Enfin, l'identité $\mathcal{L}_\Phi^n f = c^n h \mathcal{L}^n(\frac{f}{h})$ vérifiée pour tout fonction f de L implique alors que le rayon spectral $r(\mathcal{L}_\Phi)$ de \mathcal{L}_Φ en tant qu'opérateur sur L est c .

Dans toute la suite, on considère \mathcal{L}_Φ en tant qu'opérateur sur L .

2.2.1 Noyau de \mathcal{L}_Φ^q .

Rappelons que M est le plus petit entier vérifiant $T^M > 0$.

Lemme 2.7 *Si Φ vérifie (C0), alors pour tout $q \geq M$, le noyau de \mathcal{L}_Φ^q est de dimension infinie.*

Preuve : Fixons $q \geq M$ et $a \in A$, soient $[\varepsilon_1], \dots, [\varepsilon_k]$ les q -cylindres tels que chaque $x \in [a]$, possède un antécédent (nécessairement unique) par σ^q dans chacun des $[\varepsilon_j]$, $j = 1, \dots, k$, comme $q \geq M$, $k \geq \#A \geq 2$.

- Soit $f \in L$ et $f_0 = f \mathbf{1}_{[\varepsilon_1]}$. Alors f_0 appartient à L et est à support dans E_1 .
En effet, considérons $n \in \mathbb{N}$ et $x \stackrel{n}{\sim} y$, alors :

- Si $n \geq q$, $x \in [\varepsilon_1] \Leftrightarrow y \in [\varepsilon_1]$ et donc $v_n(f_0) \leq v_n(f)$.
- Si $n < q$, on majore $|f_0(x) - f_0(y)|$ par $2\|f\|_\infty$, on a alors $v_n(f_0) \leq 2\|f\|_\infty \frac{C_\Phi(n)}{C_\Phi(q)}$.

Ainsi, $f_0 \in L$ et $K(f_0) \leq \max\left(\frac{2\|f\|_\infty}{C_\Phi(q)}, K(f)\right)$.

- Pour $1 \leq j \leq k$, soit :

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \mathbf{1}_{[a]}(\sigma^q x) \mathbf{1}_{[\varepsilon_j]}(x) f_0(\varepsilon_1 \sigma^q x) \text{ si } \varepsilon_1 \sigma^q x \in X \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Alors, f_j est à support dans $[\varepsilon_j]$ et appartient à L (comme produit de fonctions de L).

- Soit maintenant : $r_q = \frac{\sum_{j=1}^k \exp\left(\frac{2i\pi(j-1)}{k}\right) f_j}{\exp\left(\sum_{j=0}^{q-1} \Phi \circ \sigma^j\right)}$.

Vérifions que $\mathcal{L}_\Phi^q r_q = 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Phi^q r_q(x) &= \sum_{\sigma^q x' = x} \frac{\sum_{j=1}^k \exp\left(\frac{2i\pi(j-1)}{k}\right) f_j(x')}{\exp\left(\sum_{j=0}^{q-1} \Phi \circ \sigma^j(x')\right)} \exp\left(\sum_{j=0}^{q-1} \Phi \circ \sigma^j(x')\right) \\ &= \sum_{j=1}^k \exp\left(\frac{2i\pi(j-1)}{k}\right) \sum_{\sigma^q x' = x} f_j(x') \end{aligned}$$

or, si $x \notin [a]$, $f_j(x') = 0$ pour tout j , si $x \in [a]$, alors x a exactement un antécédent par σ^q dans chaque $[\varepsilon_j]$, $j = 1, \dots, k$. Ainsi, $\sum_{\sigma^q x' = x} f_j(x') = f_1(\varepsilon_1 x)$ si $\varepsilon_1 x \in X$, et

$\sum_{\sigma^q x'=x} f_j(x') = 0$ sinon. On en déduit $\mathcal{L}_\Phi^q r_q = 0$. De plus, f étant générique dans L , $\text{Ker } \mathcal{L}_\Phi^q$ est de dimension infinie dès lors que $r_q \in L$. C'est ce que nous vérifions maintenant. Rappelons tout d'abord que si $f, g \in L$, alors $fg \in L$ et $K(fg) \leq \|f\|_\infty K(g) + \|g\|_\infty K(f)$, si $f \in L$, $f > 0$ alors $\frac{1}{f} \in L$ et $K(\frac{1}{f}) \leq \frac{1}{(\inf f)^2} K(f)$.

Comme $f_j \in L$, il suffit de vérifier que $\exp(\sum_{j=0}^{q-1} \Phi \circ \sigma^j) \in L$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \stackrel{n}{\sim} y$, alors :

$$\left| \exp\left(\sum_{j=0}^{q-1} \Phi \circ \sigma^j(x)\right) - \exp\left(\sum_{j=0}^{q-1} \Phi \circ \sigma^j(y)\right) \right| \leq (e^{\|\Phi\|_\infty})^q \left(\exp\left(\sum_{j=0}^{q-1} (\Phi \circ \sigma^j(x) - \Phi \circ \sigma^j(y))\right) - 1 \right),$$

or :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{q-1} (\Phi \circ \sigma^j(x) - \Phi \circ \sigma^j(y)) &\leq C_\Phi(n-q) \text{ si } n \geq q \\ &\leq 2q\|\Phi\|_\infty \text{ si } n < q. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$, l'hypothèse (C0) implique $C_\Phi(n-q) \leq \text{Cte} C_\Phi(n)$, où la constante ne dépend que de q . Finalement $\exp(\sum_{j=0}^{q-1} \Phi \circ \sigma^j)$ appartient à L , ceci achève la preuve du lemme. \square

2.2.2 Construction de valeurs propres pour \mathcal{L}_Φ^q .

Lemme 2.8 *Si Φ vérifie (C1), alors tout point du disque $|z| < \frac{(\inf \mathcal{L}_\Phi^q \mathbf{1})^2}{\|\mathcal{L}_\Phi^q \mathbf{1}\|_\infty}$, est une valeur propre de multiplicité infinie de \mathcal{L}_Φ^q pour $q \geq M$.*

Preuve : Soit $|z| < \frac{(\inf \mathcal{L}_\Phi^q \mathbf{1})^2}{\|\mathcal{L}_\Phi^q \mathbf{1}\|_\infty} \leq \inf \mathcal{L}_\Phi^q \mathbf{1}$ et r_q comme dans la démonstration du lemme 2.7. Soit :

$$g_{z,q} = r_q + \sum_{\ell=1}^{\infty} z^\ell \frac{r_q \circ \sigma^{\ell q}}{\prod_{j=1}^{\ell} \mathcal{L}_\Phi^q \mathbf{1} \circ \sigma^{jq}}.$$

La fonction $g_{z,q}$ appartient à $C(X)$ et vérifie $\mathcal{L}_\Phi^q g_{z,q} = z g_{z,q}$. En effet,

$$\mathcal{L}_\Phi^q g_{z,q} = \mathcal{L}_\Phi^q r_q + \sum_{\ell=1}^{\infty} z^\ell \mathcal{L}_\Phi^q \left(\frac{r_q \circ \sigma^{\ell q}}{\prod_{j=1}^{\ell} \mathcal{L}_\Phi^q \mathbf{1} \circ \sigma^{jq}} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= 0 + \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{\ell} \mathcal{L}_{\Phi}^q \left(\frac{r_q \circ \sigma^{(\ell-1)q}}{\prod_{j=1}^{\ell} \mathcal{L}_{\Phi}^q \mathbf{1} \circ \sigma^{(j-1)q}} \circ \sigma^q \right) \\
 &= \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{\ell} \frac{r_q \circ \sigma^{(\ell-1)q}}{\prod_{j=1}^{\ell} \mathcal{L}_{\Phi}^q \mathbf{1} \circ \sigma^{(j-1)q}} \mathcal{L}_{\Phi}^q \mathbf{1} \\
 &= z g_{z,q}.
 \end{aligned}$$

En faisant varier les fonctions r_q , on construit une famille infinie linéairement indépendante de fonctions propres associées à z . Reste à vérifier que ces fonctions appartiennent à L .

Évaluation de $v_p(g_{z,q})$.

Fixons $p \in \mathbb{N}$, $x \stackrel{p}{\sim} y$ et posons : $f_{\ell,q} = \frac{r_q \circ \sigma^{\ell q}}{\prod_{j=1}^{\ell} \mathcal{L}_{\Phi}^q \mathbf{1} \circ \sigma^{jq}}$.

Dans toute la suite, C désigne une constante ne dépendant que de q . Comme $\mathcal{L}_{\Phi}^q \mathbf{1}$ et r_q appartiennent à L , on a :

$$\begin{aligned}
 |f_{\ell,q}(x) - f_{\ell,q}(y)| &\leq \\
 &\frac{\|\mathcal{L}_{\Phi}^q \mathbf{1}\|_{\infty}^{\ell-1}}{(\inf \mathcal{L}_{\Phi}^q \mathbf{1})^{2\ell}} \left[\|\mathcal{L}_{\Phi}^q \mathbf{1}\|_{\infty} K_{\Phi}(r_q) C_{\Phi}(p - \ell q) + \|r_q\|_{\infty} K_{\Phi}(\mathcal{L}_{\Phi}^q \mathbf{1}) \sum_{j=1}^{\ell} C_{\Phi}(p - jq) \right] \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

en convenant que $C_{\Phi}(k) = C_{\Phi}(0)$ si $k < 0$. Soit $\alpha = \frac{z \|\mathcal{L}_{\Phi}^q \mathbf{1}\|_{\infty}}{(\inf \mathcal{L}_{\Phi}^q \mathbf{1})^2} < 1$ et $B > 1$ tel que $\alpha B^q < 1$. Par **(C1)**, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$,

$$\frac{C_{\Phi}(n)}{C_{\Phi}(n+1)} \leq B.$$

Ceci implique, pour $n \geq n_0 + q$,

$$C_{\Phi}(n - q) \leq B^q C_{\Phi}(n). \quad (2.11)$$

Par (2.10), on a les majorations suivantes :

$$v_p(g_{z,q}) \leq C \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha^{\ell} C_{\Phi}(p - \ell q)}_{(1)} + C \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} C_{\Phi}(p - jq)}_{(2)}.$$

Notons $m_0(p) = E\left(\frac{p-n_0}{q}\right) - 1$ où $E(u)$ désigne la partie entière de $u \in \mathbb{R}$.

$$(1) = \sum_{\ell=0}^{m_0(p)} \alpha^{\ell} C_{\Phi}(p - \ell q) + \sum_{\ell=m_0(p)+1}^{\infty} \alpha^{\ell} C_{\Phi}(p - \ell q)$$

$$\begin{aligned} \text{en utilisant 2.11} &\leq C_{\Phi}(p) \sum_{\ell=0}^{\infty} (\alpha B^q)^{\ell} + C \sum_{\ell=m_0(p)+1}^{\infty} \alpha^{\ell} \\ &\leq C(C_{\Phi}(p) + \alpha^{p/q}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et (2)} &= \sum_{\ell=0}^{m_0(p)} \alpha^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} C_{\Phi}(p - jq) + \sum_{\ell=m_0(p)+1}^{\infty} \alpha^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} C_{\Phi}(p - jq) \\ \text{en utilisant 2.11} &\leq C_{\Phi}(p) C \sum_{\ell=0}^{\infty} (\alpha B^q)^{\ell} + C \sum_{\ell=m_0(p)+1}^{\infty} \ell \alpha^{\ell} \\ &\leq C(C_{\Phi}(p) + \beta^p) \text{ avec } 1 > \beta > \alpha^{1/q}. \end{aligned}$$

Soit finalement, $v_p(g_{z,q}) \leq C(C_{\Phi}(p) + \beta^p)$.

D'après le lemme 2.6, l'hypothèse **(C1)** nous donne $\beta^p \leq \text{Cte } C_{\Phi}(p)$, soit finalement : $v_p(g_{z,q}) \leq \text{Cte } C_{\Phi}(p)$ ce qui montre que $g_{z,q} \in L$. \square

2.2.3 Spectre de \mathcal{L}_{Φ} .

$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{L}_{\Phi}^n \mathbf{1}\|_{\infty}^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf \mathcal{L}_{\Phi}^n \mathbf{1})^{1/n}$. Ainsi,

$$c = \lim_{q \rightarrow \infty} \left(\frac{(\inf \mathcal{L}_{\Phi}^q \mathbf{1})^2}{\|\mathcal{L}_{\Phi}^q \mathbf{1}\|_{\infty}} \right)^{1/q}.$$

Soit $|z| < c$, soit q tel que $z^q < \frac{(\inf \mathcal{L}_{\Phi}^q \mathbf{1})^2}{\|\mathcal{L}_{\Phi}^q \mathbf{1}\|_{\infty}}$ et $q \geq M$. Par ce qui précède, z^q est alors valeur propre de \mathcal{L}_{Φ}^q . Ceci implique qu'il existe μ , racine $q^{\text{ième}}$ de z^q qui est valeur propre de \mathcal{L}_{Φ} . En fait, ce résultat peut être précisé. Soit λ de module $|\mu^q| = |z^q|$, quitte à changer la fonction f qui sert dans la construction de r_q , on peut toujours supposer que $g_{\lambda,q}, \dots, \mathcal{L}_{\Phi}^{q-1} g_{\lambda,q}$ sont indépendantes. Soit $E_{\lambda,q}$ le sous espace de L qu'elles engendrent ; $E_{\lambda,q}$ est invariant par \mathcal{L}_{Φ} et l'équation caractéristique associée est $\lambda = x^q$. Ceci implique que toutes les racines $q^{\text{ièmes}}$ de λ sont valeurs propres de \mathcal{L}_{Φ} de multiplicité infinie et termine la démonstration du théorème B. \square

Remarque 2.5 Soit λ une valeur propre de \mathcal{L}_{Φ} de module strictement inférieur à c , soit f une fonction propre associée. La mesure ν vérifie $\mathcal{L}_{\Phi}^* \nu = c\nu$, ceci implique $\int f d\nu = 0$. Si la vitesse de convergence vers l'état d'équilibre était exponentielle (par exemple majorée par $\text{Cte } \theta^n$, $\theta < 1$), la suite $(|\frac{\lambda}{c}|)^n \theta^{-n}$ serait bornée, en particulier, $|\lambda| < \theta c$. Ainsi, le

théorème B implique que, sous l'hypothèse (C1), la vitesse de convergence ne peut pas être exponentielle sur L .

2.3 Théorème de la limite centrale.

La mesure μ est mélangeante, en particulier, elle est ergodique et pour $f \in L^1(\mu)$,

$$S_n f : = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ \sigma^i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f d\mu, \quad \mu \text{ presque partout.}$$

Le théorème de la limite centrale (TCL) précise ce résultat. Rappelons l'inégalité (I) du théorème A, pour $f \in L$,

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_\Phi^n f}{c^n} - h\nu(f) \right\|_\infty \leq C \delta^{\ell(n)} \|f\|.$$

Théorème C Si $\sum_{n \geq 1} \delta^{\ell(n)} < \infty$ alors

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int \left(\sum_{i=0}^{n-1} g \circ \sigma^i \right)^2 d\mu \\ &= \sum_j \int g g \circ \sigma^j d\mu \end{aligned}$$

est bien défini et pour tout $g \in L$ tel que $\int g = 0$ et $\tau \neq 0$,

$$\frac{S_n g}{\tau \sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N},$$

où \mathcal{N} désigne la loi normale centrée et réduite.

La preuve de ce théorème suit celle de C. Liverani [Li3] et repose sur le résultat suivant.

Théorème 2.9 [Ne], [Du] Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une différence de martingale renversée, stationnaire et ergodique. Si $Y_1 \in L^2$ alors Y_n vérifie le théorème de la limite centrale avec $\tau^2 = \mathbb{E}(Y_1^2)$.

Cette approche probabiliste a été utilisée par M.I. Gordin [Gor], M.I. Gordin & B. A. Lifshitz [G, L], I. M. Ibragimov, Y. Linnik [I, L] et A.M. Fischer, A. Lopes [F, L]. Lorsque l'opérateur est quasi-compact, la théorie des perturbations ([Ka], [D, S]) permet aussi d'obtenir le TCL ([G,H], [Bre], [Bro]). Rappelons que $(Y_n)_{n \geq 1}$ est une différence de martingale renversée par rapport à une famille de tribus $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ non croissante ($\mathcal{F}_{n+1} \subseteq \mathcal{F}_n$) si pour tout i , $\mathbb{E}(Y_{i-1} | \mathcal{F}_i) = Y_{i-1}$ et $\mathbb{E}(Y_i | \mathcal{F}_i) = 0$.

Preuve du théorème C : Soient $\mathcal{F}_n = \sigma^{-n}\mathcal{F}$, $n \geq 0$ et $g \in L$ telle que $\mu(g) = 0$. Considérons $f = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n g$, f est bien définie et appartient à L^∞ car par (I), $\|\mathcal{L}^n g\|_\infty \leq \text{Cte } \delta^{\ell(n)} \|g\|$ et la suite $(\delta^{\ell(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est supposée sommable. Considérons alors

$$Y_i = g \circ \sigma^i - f \circ \sigma^i + f \circ \sigma^{i-1}.$$

Cette relation implique que le TCL est vérifié pour la suite $(g \circ \sigma^i)_{i \geq 1}$ si et seulement si il l'est pour la suite $(Y_i)_{i \geq 1}$. En effet,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} Y_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} g \circ \sigma^i + \frac{1}{\sqrt{n}} [f \circ \sigma^n - f]$$

et $\frac{1}{\sqrt{n}} [f \circ \sigma^n - f]$ converge vers zéro en probabilité. Pour conclure, il suffit alors de vérifier que la suite $(Y_i)_{i \geq 1}$ vérifie les hypothèses du théorème 2.9.

Le fait que la suite $(Y_i)_{i \geq 1}$ soit stationnaire résulte directement de l'invariance par σ de μ ; elle est ergodique car le système dynamique $(\Sigma, \sigma, \mathcal{F}, \mu)$ l'est. De plus, Y_{i-1} est \mathcal{F}_i mesurable, ainsi, $\mathbb{E}(Y_{i-1} | \mathcal{F}_i) = Y_{i-1}$; enfin, soit $A \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} \int_{\sigma^{-i}A} Y_i d\mu &= \int_{\sigma^{-i}A} g \circ \sigma^i d\mu - \int_{\sigma^{-i}A} f \circ \sigma^i d\mu + \int_{\sigma^{-i}A} f \circ \sigma^{i-1} d\mu \\ &= \int_A g d\mu - \int_A f d\mu + \int_{\sigma^{-1}A} f d\mu. \end{aligned}$$

Or, f vérifie

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A \mathcal{L}^n g d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\sigma^{-n}A} g d\mu.$$

Finalement, on a donc

$$\int_{\sigma^{-i}A} Y_i d\mu = 0$$

et ainsi, $\mathbb{E}(Y_i | \mathcal{F}_i) = 0$. □

Chapitre 3

Systemes dynamiques aleatoires

Les resultats de ce chapitre sont tires de l'article [Ma], V. MAUME-DESCHAMPS *Equilibrium states for non Hölderian Random dynamical systems*, Random and Computational Dynamics (1997) **5** (4) 319-335. Ce chapitre est consacré à la recherche de mesures d'équilibre pour le principe variationnel relativisé, pour des potentiels aleatoires non Höldériens.

Considérons $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, S)$ un systeme dynamique inversible, avec S ergodique, inversible, bimesurable, \mathbb{P} -invariant et $\Psi : \Omega \rightarrow C(X)$ mesurable telle que $\int_{\Omega} \|\Psi_{\omega}\|_{\infty} d\mathbb{P}(\omega) < \infty$ ($\Psi \in L^1(\Omega, C(X))$). Dans un premier temps (section 3.1), nous considererons que l'application Ψ est une perturbation d'un potentiel donne Φ , dont le module de continuite est sommable. Nous montrerons l'existence et l'unicite d'un etat d'equilibre et la stabilite stochastique (theoremes D et E).

Des systemes dynamiques aleatoires plus generaux seront ensuite etudies (section 3.2) dans une section ne suit pas exactement l'article [Ma]. Le point de vue adopte ici est celui de J. Buzzi ([Buz2]). La mise en place de la section 3.2 fait suite à plusieurs conversations avec celui-ci.

3.1 Perturbations aleatoires

Soit $\Phi \in C(X)$ un potentiel à valeurs reelles fixe dont le module de continuite (definition page 3) est sommable :

$$\sum_{n \geq 1} v_n(\Phi) < \infty.$$

Soit $\chi(n) = \sum_{p \geq n+1} v_p(\Phi)$ et L l'espace des fonctions lipschitziennes associé comme dans le chapitre 2 :

$$L = \{f \in C(X) / \forall n \geq 1, v_n(f) \leq K\chi(n)\}.$$

Remarque 3.1 Comme dans le chapitre 2, si le potentiel Φ est localement constant, on convient d'utiliser la suite $\widetilde{\chi}(n) = \max(\theta^n, \chi(n))$, $0 < \theta < 1$ à la place de $\chi(n)$. En fait, on peut utiliser à la place de la suite $(\chi(n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'importe quelle suite décroissante vers zéro qui la majore.

La norme sur L est définie comme au chapitre précédent par $\|f\| = \max(K(f), \|f\|_\infty)$. Notons $v_n(\omega)$ pour $v_n(\Psi_\omega)$, \mathcal{L}_ω l'opérateur de transfert associé à Ψ_ω et les compositions $\mathcal{L}_{n,\omega} = \mathcal{L}_{S^{n-1}\omega} \circ \cdots \circ \mathcal{L}_\omega$. Nous supposons que

$$\|\Psi_\omega - \Phi\|_\infty \leq \varepsilon \text{ et } v_n(\Psi_\omega - \Phi) \leq \varepsilon v_n(\Phi), \varepsilon \in]0, 1[.$$

La condition sur le module de continuité de $\Psi_\omega - \Phi$ implique $v_n(\omega) \leq v_n(\Phi)(1 + \varepsilon)$, ainsi les opérateurs \mathcal{L}_ω agissent sur L : soient x et y dans X tel que $x \stackrel{n}{\sim} y$, $n \geq 1$ et $f \in L$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_\omega f(x) - \mathcal{L}_\omega f(y)| &= \left| \sum_{\sigma x' = x} e^{\Psi_\omega(x')} f(x') - e^{\Psi_\omega(y')} f(y') \right| \\ &\leq \sum_{\sigma x' = x} e^{\Psi_\omega(x')} |f(x') - f(y')| + \sum_{\sigma x' = x} e^{\Psi_\omega(x')} |e^{\Psi_\omega(y') - \Psi_\omega(x')} - 1| |f(y')| \\ &\leq \chi(n+1)K(f)\|\mathcal{L}_\omega \mathbf{1}\|_\infty + \sup |f| (e^{v_{n+1}(\omega)} - 1) \|\mathcal{L}_\omega \mathbf{1}\|_\infty \\ &\leq \text{Cte } \chi(n) \|f\|. \end{aligned}$$

Remarquons que $\mathcal{L}_{n,\omega}$ vérifie la relation de cocycle suivante :

$$\mathcal{L}_{n+m,\omega} = \mathcal{L}_{m,S^n\omega} \circ \mathcal{L}_{n,\omega}.$$

Nous allons montrer le résultat suivant.

Théorème D *Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, il existe des applications mesurables :*

$$\begin{array}{llll} H : \Omega & \longrightarrow & L & C : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ / \{0\} & \bar{\nu} : \Omega & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ \omega & \longrightarrow & h_\omega & \omega & \longrightarrow & c_\omega & \omega & \longrightarrow & \nu_\omega \end{array}$$

telles que :

$$1. \forall \omega \in \Omega, \mathcal{L}_\omega h_\omega = c_\omega h_{S\omega} \text{ and } \mathcal{L}_\omega^* \nu_{S\omega} = c_\omega \nu_\omega,$$

2. $\nu_\omega(h_\omega) = 1$, $\log c_\omega$ et $\|\log h_\omega\|_\infty$ appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et $\bar{\mu} = (\mu_\omega)_{\omega \in \Omega}$, $\mu_\omega = h_\omega \nu_\omega$ est le seul état d'équilibre de Ψ .

3. toute fonction f de $C(X)$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| \frac{\mathcal{L}_{n,\omega} f}{c_{S^{n-1}\omega} \times \dots \times c_\omega} - h_{S^n\omega} \int f d\nu_\omega \right\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ et} \\ \left\| \frac{\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega} f}{c_{S^{-1}\omega} \times \dots \times c_{S^{-n}\omega}} - h_\omega \int f d\nu_{S^{-n}\omega} \right\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Pour $f \in L$, les deux vitesses de convergence dans (3.1) sont majorée par $C \gamma^{\ell(n)} \|f\|$ où $C > 0$, $0 < \alpha < 1$, C et γ ne dépendent ni de ω , ni de ε , ni de f et la suite $\ell(n)$ est une suite strictement croissante d'entiers qui ne dépend que de la suite $\chi(n)$. On a alors les estimations suivantes sur les corrélations aléatoires :

$$C_n^\omega(f, g) \leq Cte \gamma^{\ell(n)} \sup_{s \in \Omega} (|\int g d\nu_s|) \|f\| \text{ et}$$

$$C_n^{S^{-n}\omega}(f, g) \leq Cte \gamma^{\ell(n)} \sup_{s \in \Omega} (|\int g d\nu_s|) \|f\|$$

pour $f \in L$ et g telle que $\sup_{s \in \Omega} (|\int g d\nu_s|) < \infty$. $\bar{\mu} = (h_\omega \nu_\omega)_{\omega \in \Omega}$

Remarquons tout de suite que les estimations sur les corrélations aléatoires découlent directement de 1., 2. et des estimations des vitesse de convergence dans (3.1) pour $f \in L$:

$$\begin{aligned} C_n^\omega(f, g) &= \left| \int f(g \circ \sigma^n) h_\omega d\nu_\omega - \int g h_{S^n\omega} d\nu_{S^n\omega} \int f h_\omega d\nu_\omega \right| \\ &\leq \|h_\omega\|_\infty \left| \int \frac{\mathcal{L}_{n,\omega}(f)}{c_{S^{n-1}\omega} \times \dots \times c_\omega} g d\nu_{S^n\omega} - \int g h_{S^n\omega} d\nu_{S^n\omega} \int f d\nu_\omega \right| \\ &\leq \sup_{s \in \Omega} \|h_s\|_\infty \left\| \frac{\mathcal{L}_{n,\omega} f}{c_{S^{n-1}\omega} \times \dots \times c_\omega} - h_{S^n\omega} \int f d\nu_\omega \right\|_\infty \sup_{s \in \Omega} (|\int g d\nu_s|), \end{aligned}$$

ceci donne l'inégalité annoncée pour $C_n^\omega(f, g)$, on procède de même pour $C_n^{S^{-n}\omega}(f, g)$. Comme le module de continuité de Φ est sommable, Φ vérifie l'hypothèse **(W)** du chapitre 2. Soit (h, c, ν) le triplet qui lui est associé par le théorème 2.1. La question de la stabilité de h_ω , c_ω , ν_ω est alors naturelle. Le résultat suivant montre que h_ω , c_ω , ν_ω sont fortement stables.

Théorème E Soit (h, c, ν) le triplet donné par le théorème 2.1 alors $h_\omega, c_\omega, \nu_\omega$ vérifient les propriétés de stabilité forte suivantes.

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\omega \in \Omega} \|h - h_\omega\|_\infty &= 0, \\ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\omega \in \Omega} \frac{c}{c_\omega} &= 1, \\ \forall f \in C(X), \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\omega \in \Omega} |\nu(f) - \nu_\omega(f)| &= 0. \end{aligned}$$

La stabilité stochastique du système (X, σ, Φ) (définition page viii) découle de ces propriétés de stabilité forte. En effet, soit $f \in C(X)$,

$$\begin{aligned} |\mu(f) - \mu_\omega(f)| &= |\nu(hf) - \nu_\omega(h_\omega f)| \\ &\leq \left| \int f[h - h_\omega] d\nu_\omega \right| + |\nu(fh) - \nu_\omega(fh)| \\ &\leq \sup_{s \in \Omega} \left| \int f d\nu_s \right| \|h - h_\omega\|_\infty + |\nu(fh) - \nu_\omega(fh)|. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mu_\omega(f)$ converge vers $\mu(f)$ quand ε tend vers zéro.

Les fonctions propres généralisées h_ω sont obtenues comme limites projectives de $\mathcal{L}_{n, S^{-n}\omega} \mathbf{1}$, ce qui implique aussi l'existence des valeurs propres généralisées c_ω . Les mesures $\nu_\omega(f)$ sont obtenues comme limites de $\mu_\ell(f)$ et $\lambda_\ell(f)$ où $\mu_\ell(f)$ et $\lambda_\ell(f)$ sont les nombres réels utilisés pour calculer la distance projective entre $\mathcal{L}_{m(\ell), \omega} h_\omega$ et $\mathcal{L}_{m(\ell), \omega} f$ dans un cône approprié, où $(m(\ell))_{\ell \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers construite à partir de la suite $(\chi(n))_{n \in \mathbb{N}}$. L'estimation de la vitesse de convergence résulte de cette construction. Les propriétés de stabilité fortes résultent du fait que le contrôle de cette vitesse est uniforme en ω et ε .

3.1.1 Construction des valeurs propres et fonctions propres généralisées c_ω et h_ω .

Pour construire c_ω et h_ω , nous allons utiliser une suite de cônes dans L . Soit :

$$\Lambda_0 = \left\{ g \in C^+(X) / g(x) \leq \exp(\chi_0(p))g(y) \text{ si } x \stackrel{p}{\sim} y \text{ } p \geq 1 \right\}$$

où $\chi_0(p) = (1 + \varepsilon)\chi(p)$. Il est clair que le cône Λ_0 est inclus dans L . De plus, pour $f \in \Lambda_0$, $p \in \mathbb{N}^*$, $x \stackrel{p}{\sim} y$, $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$ on a :

$$\mathcal{L}_{n, \omega} f(x) \leq \mathcal{L}_{n, \omega} f(y) \exp[\chi_0(n + p) + \chi_0(p)]. \quad (3.2)$$

En effet,

$$\mathcal{L}_{n,\omega}f(x) = \sum_{\sigma^n x' = x} \exp[\Psi_\omega(x') + \cdots + \Psi_{S^{n-1}\omega}(\sigma^{n-1}x')]f(x'),$$

pour $f \in \Lambda_0$, $x \stackrel{p}{\sim} y$ avec $p \geq 1$, x' et y' vérifient $x' \stackrel{p+n}{\sim} y'$ ainsi, $f(x') \leq e^{\chi_0(n+p)}f(y')$, et :

$$|\Psi_{S^i\omega}(\sigma^i ax) - \Psi_{S^i\omega}(\sigma^i ay)| \leq v_{n+p-i}(S^i\omega) \leq (1 + \varepsilon)v_{n+p-i}(\Phi).$$

Ainsi, $\mathcal{L}_{n,\omega}f(x) \leq \mathcal{L}_{n,\omega}f(y) \exp(\chi_0(n+p) + (1 + \varepsilon) \sum_{i=0}^{n-1} v_{n+p-i}(\Phi))$, ceci donne l'inégalité (3.2). On a aussi $\mathcal{L}_{n,\omega}\Lambda_0 \subset \Lambda_0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n,\omega}f(x) &\leq \mathcal{L}_{n,\omega}f(y) \exp[\chi_0(n+p) + (1 + \varepsilon) \sum_{k=p+1}^{n+p} v_k(\Phi)] \\ &= \mathcal{L}_{n,\omega}f(y) \exp \chi_0(p), \end{aligned}$$

mais le diamètre hyperbolique n'est pas nécessairement fini¹.

Comme dans le chapitre précédent, pour $D > 1$ fixé, nous construisons une suite d'entiers $(k_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$, une suite de métriques $(\chi_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ et une suite de cônes $(\Lambda_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\mathcal{L}_{k_\ell, \omega} \Lambda_{\ell-1} \subset \Lambda_\ell.$$

$$- k_1 = \inf\{n \geq M / D\chi_0(n) \leq V\} \text{ avec } V = 2 \sup \chi(n) = 2\chi(0).$$

$$- \chi_1(p) = D(\chi_0(p) + \chi_0(k_1 + p))$$

⋮

$$- \chi_\ell(p) = D(\chi_0(p) + \chi_{\ell-1}(k_\ell + p)) \text{ avec}$$

$$k_\ell = \inf\{n \geq M / D\chi_{\ell-1}(n) \leq V\}.$$

Remarque 3.2 Par construction, les suites χ_ℓ vérifient pour $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\chi_\ell(0) = D(\chi_0(0) + \chi_{\ell-1}(k_\ell)) \leq V(D + 1).$$

¹Si $v_n(\Phi)$ (et donc $\chi(n)$) est une suite géométrique, en remplaçant $\chi_0(n)$ par $a\chi(n)$ dans la définition du cône, pour a et n suffisamment grands, on obtient un cône tel que $\text{diam}_{\Lambda_0} \mathcal{L}_{n,\omega} \Lambda_0$ est fini. Par contre, si la suite $\chi(n)$ vérifie l'hypothèse **(C1)** du chapitre 2 et $\Psi_\omega = \Phi \forall \omega \in \Omega$ (on a alors $\mathcal{L}_{n,\omega} = \mathcal{L}_\Phi^n$), l'étude du spectre de l'opérateur de transfert faite au chapitre précédent implique que, dans ce cas, le diamètre de $\mathcal{L}_{n,\omega} \Lambda_0$ dans Λ_0 ne peut pas être fini.

L'équation (3.2) conduit à considérer le cône suivant :

$$\Lambda_1 = \left\{ g \in C^+(X) / g(x) \leq \exp(\chi_1(p))g(y) \text{ si } x \stackrel{p}{\sim} y \text{ } p \geq 1 \right\}.$$

Lemme 3.1 *Pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathcal{L}_{k_1, \omega} \Lambda_0 \subset \Lambda_1$, de plus, toutes fonctions f et g appartenant à Λ_0 , vérifient :*

$$\theta_{\Lambda_1}(\mathcal{L}_{k_1, \omega} f, \mathcal{L}_{k_1, \omega} g) \leq 2 \log \frac{D+1}{D-1} + \frac{2}{D}(D^2-1)V + \log \left\| \frac{\mathcal{L}_{k_1, \omega} f}{\mathcal{L}_{k_1, \omega} g} \right\|_{\infty} \left\| \frac{\mathcal{L}_{k_1, \omega} g}{\mathcal{L}_{k_1, \omega} f} \right\|_{\infty}.$$

Preuve : Le fait que $\mathcal{L}_{k_1, \omega} \Lambda_0 \subset \Lambda_1$ résulte de la définition de la suite $\chi_1(p)$ et de (3.2). Soient f_1, f_2 telles que

$$f_i(x) \leq f_i(y)[\chi_0(k_1 + p) + \chi_0(p)] \text{ si } x \stackrel{p}{\sim} y, \quad i = 1, 2 \quad (3.3)$$

montrons que la distance $\theta_{\Lambda_1}(f_1, f_2)$ est majorée par

$$\log \sup_p \sup_{x \stackrel{p}{\sim} z} \frac{[\exp(\chi_1(p)) - \exp(-D^{-1}\chi_1(p))]^2 f_1(x)f_2(z)}{[\exp(\chi_1(p)) - \exp(D^{-1}\chi_1(p))]^2 f_1(z)f_2(x)}. \quad (3.4)$$

Par définition $\mu(f_1, f_2)$ et $\lambda(f_1, f_2)$ vérifient :

$$\mu(f_1, f_2) = \sup_{p \geq 1} \sup_{x \stackrel{p}{\sim} y} \frac{\exp(\chi_1(p))f_1(x) - f_1(y)}{\exp(\chi_1(p))f_2(x) - f_2(y)} \geq \sup_{x \in X} \frac{f_1(x)}{f_2(x)},$$

$$\lambda(f_1, f_2) = \inf_{p \geq 1} \inf_{x \stackrel{p}{\sim} y} \frac{\exp(\chi_1(p))f_1(x) - f_1(y)}{\exp(\chi_1(p))f_2(x) - f_2(y)} \leq \inf_{x \in X} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

Comme f_1 et f_2 vérifient (3.3), nous obtenons (3.4). Les inégalités classiques sur les exponentielles donnent

$$\theta_{\Lambda_1}(f_1, f_2) \leq 2 \log \frac{D+1}{D-1} + 2(1-D^{-1})\chi_1(0) + \log \frac{\sup f_1 \sup f_2}{\inf f_1 \inf f_2}$$

or, k_1 a été choisi pour que $\chi_1(0) \leq V(1+D)$. □

Il reste alors à estimer $\frac{\sup f}{\inf f}$ pour $f \in \mathcal{L}_{k_1, \omega} \Lambda_0$. Rappelons que M est le plus petit entier vérifiant $T^M > 0$.

Lemme 3.2 *Soient $f \in \Lambda_0$, $n \in \mathbb{N}$, et $x, y \in X$, pour tout $\omega \in \Omega$, on a*

$$\mathcal{L}_{M+n, \omega} f(x) \leq e^{\chi_0(0)} C(\Phi, M) \mathcal{L}_{M+n, \omega} f(y),$$

où $C(\Phi, M)$ ne dépend que de M et Φ .

Preuve : Nous avons déjà remarqué que pour $f \in \Lambda_0$, $\mathcal{L}_{n,\omega}f \in \Lambda_0$, aussi, il suffit de montrer le lemme pour $n = 0$. Soit $x \in X$, notons :

- $I_M(x)$ les éléments $a \in A^M$ tels que $ax \in X$,
- pour $j \in A$, $I_M(j, x)$ les éléments a de A^M tels que $ax \in X$ et $a_0 = j$.

$$\mathcal{L}_{M,\omega}f(x) = \sum_{j \in A} \sum_{i \in I_M(j,x)} \exp \left(\sum_{\ell=1}^{M-1} \Psi_{S^\ell \omega}(\sigma^\ell ix) \right) \exp(\Psi_\omega(ix)f(ix)).$$

Pour $y \in X$, et $i \in I_M(j, x)$, l'apériodicité implique qu'il existe $k \in I_M(j, y)$,

$$\exp(\Psi_\omega(ix)f(ix)) \leq e^{\lambda_0(0)} \exp(\Psi_\omega(ky)f(ky))$$

ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{M,\omega}f(x) &\leq e^{\lambda_0(0)} \sum_{j \in A} \sum_{i \in I_M(j,x)} \exp \left(\sum_{\ell=1}^{M-1} \Psi_{S^\ell \omega}(\sigma^\ell ix) \right) \sum_{k \in I_M(j,y)} \exp(\Psi_\omega(ky)f(ky)) \\ &\leq e^{\lambda_0(0)} \sum_{i \in I_M(x)} \exp \left(\sum_{\ell=1}^{M-1} \Psi_{S^\ell \omega}(\sigma^\ell ix) \right) \sum_{k \in I_M(y)} \exp(\Psi_\omega(ky)f(ky)). \end{aligned}$$

(en utilisant l'inégalité $\sum_{i,j} a_i b_j \leq \sum_i a_i \sum_j b_j$ pour a_i, b_j des réels positifs).

D'autre part, $\sum_{i \in I_M(x)} \exp \left(\sum_{\ell=1}^{M-1} \Psi_{S^\ell \omega}(\sigma^\ell ix) \right)$ est majoré par $(\#A)^M e^{(M-2)(\varepsilon + \|\Phi\|_\infty)} \leq (\#A)^M e^{(M-2)(1 + \|\Phi\|_\infty)}$ et

$$\begin{aligned} \exp(\Psi_\omega(ky)f(ky)) &= \exp \left(\sum_{\ell=0}^{M-1} \Psi_{S^\ell \omega}(\sigma^\ell ky) \right) f(ky) \exp \left(- \sum_{\ell=1}^{M-1} \Psi_{S^\ell \omega}(\sigma^\ell ky) \right) \\ &\leq e^{-(M-2)(\inf \Phi - \varepsilon)} \exp \left(\sum_{\ell=0}^{M-1} \Psi_{S^\ell \omega}(\sigma^\ell ky) \right) f(ky) \\ &\leq e^{-(M-2)(\inf \Phi - 1)} \exp \left(\sum_{\ell=0}^{M-1} \Psi_{S^\ell \omega}(\sigma^\ell ky) \right) f(ky). \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du lemme. □

Remarque 3.3 Comme $k_1 \geq M$, le lemme 3.2 implique que le diamètre de $\mathcal{L}_{k_1,\omega}\Lambda_0$ dans Λ_1 est borné.

Ces résultats suggèrent de construire une suite de cônes.

Proposition 3.3 *Il existe une famille Λ_ℓ de sous-cônes de $C^+(X)$ et $0 < \Delta < \infty$ tels que :*

- $\mathcal{L}_{k_\ell, \omega} \Lambda_{\ell-1} \subset \Lambda_\ell$,
- $\forall f, g \in \Lambda_{\ell-1} \theta_{\Lambda_\ell}(\mathcal{L}_{k_\ell, \omega} f, \mathcal{L}_{k_\ell, \omega} g) \leq \Delta$.

Preuve : Les cônes Λ_0 et Λ_1 vérifient la proposition. Soit $\ell \geq 2$, définissons,

$$\Lambda_\ell = \left\{ g \in C^+(X) / g(x) \leq \exp(\chi_\ell(p))g(y) \text{ si } x \stackrel{p}{\sim} y \right\}.$$

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$, $\mathcal{L}_{n, \omega} \Lambda_\ell \subset \Lambda_\ell$: soit $f \in \Lambda_\ell$ et $x \stackrel{p}{\sim} y$, $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n, \omega} f(x) &= \sum_{\sigma^n x' = x} \exp\left[\sum_{i=0}^{n-1} \Psi_{S^i \omega} \circ \sigma^i(x')\right] f(x') \\ &\leq \sum_{\sigma^n y' = y} \exp\left[\sum_{i=0}^{n-1} \Psi_{S^i \omega} \circ \sigma^i(y')\right] f(y') \exp[\chi_\ell(n+p) + (1+\varepsilon) \sum_{i=n+1}^{n+p} v_\Phi(i)] \end{aligned}$$

or,

$$\chi_\ell(n+p) + (1+\varepsilon) \sum_{i=n+1}^{n+p} v_\Phi(i) = D[\chi_{\ell-1}(k_\ell + n+p) + \chi_0(n+p) + (1+\varepsilon) \sum_{i=n+1}^{n+p} v_\Phi(i)] \leq \chi_\ell(n).$$

En remplaçant χ_1 par χ_ℓ et k_1 par k_ℓ , comme $\chi_\ell(0) \leq V(D+1)$ (remarque 3.3), le lemme 3.1 devient :

Lemme 3.1 ℓ *Pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathcal{L}_{k_\ell, \omega} \Lambda_{\ell-1} \subset \Lambda_\ell$, pour f et g dans $\Lambda_{\ell-1}$, vérifient :*

$$\theta_{\Lambda_\ell}(\mathcal{L}_{k_\ell, \omega} f, \mathcal{L}_{k_\ell, \omega} g) \leq 2 \log \frac{D+1}{D-1} + \frac{2}{D}(D^2-1)V + \log \left\| \frac{\mathcal{L}_{k_\ell, \omega} f}{\mathcal{L}_{k_\ell, \omega} g} \right\|_\infty \left\| \frac{\mathcal{L}_{k_\ell, \omega} g}{\mathcal{L}_{k_\ell, \omega} f} \right\|_\infty.$$

En remplaçant χ_0 par $\chi_{\ell-1}$ et Λ_0 par $\Lambda_{\ell-1}$, le lemme 3.2 devient :

Lemme 3.2 ℓ *Soient $f \in \Lambda_{\ell-1}$, $n \in \mathbb{N}$, et $x, y \in X$, pour tout $\omega \in \Omega$, on a*

$$\mathcal{L}_{M+n, \omega} f(x) \leq e^{\chi_{\ell-1}(0)} C(\Phi, M) \mathcal{L}_{M+n, \omega} f(y),$$

où $C(\Phi, M)$ ne dépend que de M et Φ .

Comme $\chi_{\ell-1}(0) \leq V(D+1)$, en combinant les lemmes 3.1 ℓ et 3.2 ℓ , on obtient que le diamètre de $\mathcal{L}_{k_\ell, \omega} \Lambda_{\ell-1}$ dans Λ_ℓ est majoré par

$$2 \log \frac{D+1}{D-1} + \frac{2}{D}(D^2-1)V + 2V(D+1) \log C(\Phi, M) : = \Delta.$$

Ainsi, les cônes Λ_ℓ conviennent. \square

Remarquons que la constante Δ est bornée indépendamment de $\varepsilon \in]0, 1[$. Cette remarque sera utile pour obtenir les résultats de stabilité.

Soit $\gamma = (1 - e^{-\Delta}) \geq \tanh \frac{\Delta}{4}$. La proposition 1.1, implique, pour f et g appartenant à Λ_0 et $\omega \in \Omega$:

$$\theta_{\Lambda_\ell}(\mathcal{L}_{k_\ell+\dots+k_1,\omega}f, \mathcal{L}_{k_\ell+\dots+k_1,\omega}g) \leq \gamma^{\ell-1}\theta_{\Lambda_1}(\mathcal{L}_{k_1,\omega}f, \mathcal{L}_{k_1,\omega}g) \leq \Delta\gamma^{\ell-1}.$$

Les cônes Λ_ℓ sont des sous-cônes de $C^+(X)$, la proposition 1.1, donne alors $\theta_{C^+(X)}(f, g) \leq \theta_{\Lambda_\ell}(f, g) \forall f, g \in \Lambda_\ell$. Ainsi, $f, g \in \Lambda_0$ vérifient

$$\theta_{C^+(X)}(\mathcal{L}_{n,\omega}f, \mathcal{L}_{n,\omega}g) \leq \theta_{C^+(X)}(\mathcal{L}_{k_1+\dots+k_{\ell(n)},\omega}f, \mathcal{L}_{k_1+\dots+k_{\ell(n)},\omega}g) \leq \Delta\gamma^{\ell(n)-1}. \quad (3.5)$$

Lemme 3.4 *Pour tout $\omega \in \Omega$, $(\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega}\mathbf{1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour la métrique $\theta_{C^+(X)}$. De plus, pour $n \geq M$, $\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega}\mathbf{1}$ appartient à $\{f \in C^+(X) / \theta_{C^+(X)}(f, \mathbf{1}) < \infty\} = \pi(\mathbf{1})$.*

Preuve : Notons $m(\ell)$ à la place de $k_\ell + \dots + k_1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique entier $\ell(n)$ vérifiant :

$$k_1 + \dots + k_{\ell(n)} \leq n < k_1 + \dots + k_{\ell(n)+1}.$$

Soit $p > n \geq M$, n et p s'écrivent $n = k_1 + \dots + k_\ell + r = m(\ell) + r$ et $p = k_1 + \dots + k_\ell + \dots + k_k + s = m(k) + s$, ainsi,

$$\begin{aligned} \theta_{C^+(X)}(\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega}\mathbf{1}, \mathcal{L}_{p,S^{-p}\omega}\mathbf{1}) = \\ \theta_{C^+(X)}(\mathcal{L}_{m(\ell),S^{-m(\ell)}\omega} \circ \mathcal{L}_{r,S^{-n}\omega}\mathbf{1}, \mathcal{L}_{m(\ell),S^{-m(\ell)}\omega} \circ \mathcal{L}_{k_\ell+\dots+k_k+s,S^{-m}\omega}\mathbf{1}). \end{aligned}$$

L'estimation (3.5) et le fait que $\mathcal{L}_{r,S^{-n}\omega}\mathbf{1}$ et $\mathcal{L}_{k_\ell+\dots+k_k+s,S^{-m}\omega}\mathbf{1}$ appartiennent à Λ_0 pour tout $\omega \in \Omega$, impliquent

$$\theta_{C^+(X)}(\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega}\mathbf{1}, \mathcal{L}_{p,S^{-p}\omega}\mathbf{1}) \leq \gamma^{\ell-1}\Delta,$$

ceci donne l'affirmation sur la propriété de Cauchy. De plus, on a

$$\theta_{C^+(X)}(f, \mathbf{1}) = \frac{\sup f}{\inf f},$$

ainsi, en utilisant le lemme 3.2, on obtient $\theta_{C^+(X)}(\mathbf{1}, \mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega}\mathbf{1}) < \infty$ si $n \geq M$. \square

Nous pouvons maintenant construire les fonctions propres et valeurs propres généralisées.

Proposition 3.5 *Pour tout $\omega \in \Omega$, il existe $h_\omega \in L$ et $c_\omega \in \mathbb{R}^+$ tels que $\mathcal{L}_\omega h_\omega = c_\omega h_\omega$ et $\log \|h_\omega\|_\infty \in L^\infty(\Omega)$, $\log c_\omega \in L^\infty(\Omega)$.*

Preuve : L'espace $\pi(\mathbf{1})$ est complet pour la métrique projective (exemple 1.1), par le lemme 3.4, nous pouvons donc considérer h_ω la limite de la suite $(\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega}\mathbf{1})_{n \in \mathbb{N}}$, h_ω vérifie, $\mathcal{L}_\omega h_\omega = h_{S\omega}$ projectivement. Alors, pour tout ω , il existe un réel $c_\omega > 0$ tel que $\mathcal{L}_\omega h_\omega = c_\omega h_{S\omega}$.

L'espace $\pi(\mathbf{1})$ s'identifie à l'ensemble des f de $C^+(X)$ telles que $\theta_{C^+(X)}(\mathbf{1}, f) < \infty$ et $\int f dm = 1$, où m est une mesure borélienne sur X . Par la proposition 1.2, h_ω est aussi la limite pour la norme uniforme de $\left(\frac{\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega}\mathbf{1}}{\int \mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega}\mathbf{1} dm} \right)_{n \in \mathbb{N}}$. En appliquant le lemme 3.2 à $\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega}\mathbf{1}$, $n \geq M$, il existe une constante C telle que pour tout x et y de X :

$$C^{-1} \mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega}\mathbf{1}(y) \leq \mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega}\mathbf{1}(x) \leq C \mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega}\mathbf{1}(y).$$

Ainsi, nous obtenons

$$C^{-2} \leq \inf h_\omega \leq \sup h_\omega \leq C^2, \quad (3.6)$$

on a donc $\|h_\omega\|_\infty \in L^\infty(\Omega)$. Remarquons que $\log c_\omega$ appartient à $L^\infty(\Omega)$: on a $c_\omega = \nu_\omega(\mathcal{L}_\omega \mathbf{1})$, ainsi $|\log c_\omega| \leq \log \|\mathcal{L}_\omega \mathbf{1}\|_\infty$ qui est borné uniformément en ω . \square

3.1.2 Construction des mesures conformes généralisées ν_ω .

Comme h_ω est la limite uniforme de $\left(\frac{\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega}\mathbf{1}}{\int \mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega}\mathbf{1} dm} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et que les cônes Λ_ℓ sont fermés pour la norme uniforme, h_ω appartient à Λ_ℓ pour tout ℓ . Nous pouvons maintenant construire les mesures ν_ω . Fixons $\omega \in \Omega$ et $f \in \Lambda_0$, alors $\mathcal{L}_{k_1+\dots+k_\ell,\omega} f = \mathcal{L}_{m(\ell),\omega} f \in \Lambda_\ell$. En particulier, il existe un plus grand réel $\lambda_{\ell(\omega)}$ et un plus petit réel $\mu_{\ell(\omega)}$ tels que

$$\lambda_\ell h_{S^{m(\ell)}\omega} \leq \frac{\mathcal{L}_{m(\ell),\omega} f}{c_{m(\ell),\omega}} \leq \mu_\ell h_{S^{m(\ell)}\omega}. \quad (3.7)$$

(pour alléger les notations, notons $c_{n,\omega}$ pour $c_{S^{n-1}\omega} \times \dots \times c_\omega$) et

$$\begin{cases} r_\ell = \mathcal{L}_{m(\ell),\omega} f - \lambda_\ell c_{m(\ell),\omega} h_{S^{m(\ell)}\omega} \in \Lambda_\ell \\ s_\ell = \mu_\ell c_{m(\ell),\omega} h_{S^{m(\ell)}\omega} - \mathcal{L}_{m(\ell),\omega} f \in \Lambda_\ell. \end{cases} \quad (3.8)$$

En appliquant l'opérateur positif $\mathcal{L}_{k_{\ell+1},S^{m(\ell)}\omega}$ aux inéquations (3.7), nous obtenons $\lambda_{\ell+1} \geq \lambda_\ell$ et $\mu_{\ell+1} \leq \mu_\ell$. Les lemmes 3.1 et 3.2, donnent :

$$\begin{aligned} \theta_{\Lambda_{\ell+1}}(h_{S^{m(\ell+1)}\omega}, \mathcal{L}_{k_{\ell+1},S^{m(\ell)}\omega} r_\ell) &= \theta_{\Lambda_{\ell+1}}(\mathcal{L}_{k_{\ell+1},S^{m(\ell)}\omega} h_{S^{m(\ell+1)}\omega}, \mathcal{L}_{k_{\ell+1},S^{m(\ell)}\omega} r_\ell) \\ &\leq \Delta. \end{aligned}$$

Par définition de la métrique projective, il existe $\alpha_{\ell+1}$ et $\beta_{\ell+1}$ tels que

$$\begin{cases} \alpha_{\ell+1} h_{S^{m(\ell+1)}\omega} \leq \mathcal{L}_{k_{\ell+1}, S^{m(\ell)}\omega} r_\ell \leq \alpha_{\ell+1} e^\Delta h_{S^{m(\ell+1)}\omega} \\ \beta_{\ell+1} h_{S^{m(\ell+1)}\omega} \leq \mathcal{L}_{k_{\ell+1}, S^{m(\ell)}\omega} s_\ell \leq \beta_{\ell+1} e^\Delta h_{S^{m(\ell+1)}\omega}. \end{cases}$$

Ceci implique (en appliquant $\mathcal{L}_{k_{\ell+1}, S^{m(\ell)}\omega}$ à (3.8))

$$\begin{aligned} (\alpha_{\ell+1} + \beta_{\ell+1}) h_{S^{m(\ell+1)}\omega} &\leq (\mu_\ell - \lambda_\ell) c_{m(\ell+1), \omega} h_{S^{m(\ell+1)}\omega} \\ &\leq e^\Delta (\alpha_{\ell+1} + \beta_{\ell+1}) h_{S^{m(\ell+1)}\omega}, \end{aligned}$$

par ailleurs,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{m(\ell+1), \omega} f &= \mathcal{L}_{k_{\ell+1}, S^{m(\ell)}\omega} r_\ell + \lambda_\ell c_{m(\ell+1), \omega} h_{S^{m(\ell+1)}\omega} \\ &\geq (\alpha_{\ell+1} + \lambda_\ell c_{m(\ell+1), \omega}) h_{S^{m(\ell+1)}\omega}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{m(\ell+1), \omega} f &= \mu_\ell c_{m(\ell+1), \omega} h_{S^{m(\ell+1)}\omega} - \mathcal{L}_{k_{\ell+1}, S^{m(\ell)}\omega} s_\ell \\ &\leq (\mu_\ell c_{m(\ell+1), \omega} - \beta_{\ell+1}) h_{S^{m(\ell+1)}\omega}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{m(\ell+1), \omega} f &- (\alpha_{\ell+1} + \lambda_\ell c_{m(\ell+1), \omega}) h_{S^{m(\ell+1)}\omega} \\ &= \mathcal{L}_{k_{\ell+1}, S^{m(\ell)}\omega} r_\ell - \alpha_{\ell+1} h_{S^{m(\ell+1)}\omega} \in \Lambda_{\ell+1}. \end{aligned}$$

De la même manière, on obtient $(\mu_\ell c_{m(\ell+1), \omega} + \beta_{\ell+1}) h_{S^{m(\ell+1)}\omega} - \mathcal{L}_{m(\ell+1), \omega} f \in \Lambda_{\ell+1}$. Ceci implique :

$$\begin{cases} \lambda_{\ell+1} \geq \lambda_\ell + \frac{\alpha_{\ell+1}}{c_{m(\ell+1), \omega}} \\ \mu_{\ell+1} \leq \mu_\ell - \frac{\beta_{\ell+1}}{c_{m(\ell+1), \omega}} \end{cases}$$

et finalement,

$$\begin{aligned} (\mu_{\ell+1} - \lambda_{\ell+1}) &\leq (\mu_\ell - \lambda_\ell) - \frac{\alpha_{\ell+1} + \beta_{\ell+1}}{c_{m(\ell+1), \omega}} \leq (\mu_\ell - \lambda_\ell)(1 - e^{-\Delta}) \\ (\mu_{\ell+1} - \lambda_{\ell+1}) &\leq (\mu_1 - \lambda_1)(1 - e^{-\Delta})^\ell = (\mu_1 - \lambda_1)\gamma^\ell. \end{aligned}$$

Ainsi, μ_ℓ et λ_ℓ convergent vers la même limite notée $\nu_\omega(f)$.

De plus, cette limite vérifie :

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_{m(\ell), \omega} f}{c_{m(\ell), \omega}} - h_{S^{m(\ell)}\omega} \nu_\omega(f) \right\|_\infty \leq (\mu_1 - \lambda_1) \gamma^{\ell-1} \|h_{S^{m(\ell)}\omega}\|_\infty \quad (3.9)$$

Les estimations suivantes permettent d'obtenir une majoration uniforme en ω .

Lemme 3.6

$\frac{(\mu_1 - \lambda_1)}{\|f\|_\infty}$ peut être borné indépendamment de f et ω .

$\frac{\|\mathcal{L}_{r,\omega}\mathbf{1}\|_\infty}{c_{r,\omega}}$ peut être borné indépendamment de r et ω .

Preuve : Pour $f \in \Lambda_0$, comme $\lambda_1 \geq 0$, il suffit de majorer μ_1 . Or,

$$\mu_1 = \sup_p \sup_{x \neq y} \frac{\exp(\chi_1(p))\mathcal{L}_{k_1,\omega}f(x) - \mathcal{L}_{k_1,\omega}f(y)}{\exp(\chi_1(p))\mathcal{L}_{k_1,\omega}h_\omega(x) - \mathcal{L}_{k_1,\omega}h_\omega(y)}$$

qui peut être borné par $\frac{D+1}{D-1}C^2e^{V(D+1)(1+\varepsilon)}\|f\|_\infty$ (en procédant comme dans la preuve du lemme 3.1 et en utilisant (3.6)).

Finalement, pour obtenir la dernière borne, il suffit de remarquer

$$\frac{\mathcal{L}_{r,\omega}\mathbf{1}}{c_{r,\omega}} = \frac{\mathcal{L}_{r,\omega}\mathbf{1}}{\mathcal{L}_{r,\omega}h_\omega} h_{S^r\omega} \leq \frac{\sup h_{S^r\omega}}{\inf h_\omega} \quad (3.10)$$

et d'utiliser l'estimation (3.6). \square

Remarque 3.4 En procédant de même, on peut aussi obtenir l'estimation $\lambda_1 \geq \text{Cte} \inf f$ où la constante ne dépend ni de f ni de ε .

Soit $f \in \Lambda_0$, $\omega \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}$, soit $n = k_1 + \dots + k_\ell + r = m(\ell) + r$. Le lemme 3.6, donne :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\mathcal{L}_{n,\omega}f}{c_{n,\omega}} - h_{S^n\omega}\nu_\omega(f) \right\|_\infty &= \left\| \frac{\mathcal{L}_{r,S^{m(\ell)}\omega} \circ \mathcal{L}_{m(\ell),\omega}f}{c_{r,S^{m(\ell)}\omega} \times c_{m(\ell),\omega}} - \frac{\mathcal{L}_{r,S^{m(\ell)}\omega}h_{S^{m(\ell)}\omega}\nu_\omega(f)}{c_{r,S^{m(\ell)}\omega}} \right\|_\infty \\ &\leq \text{Cte}\|f\|_\infty\gamma^\ell \frac{\|\mathcal{L}_{r,S^{m(\ell)}\omega}\mathbf{1}\|_\infty}{c_{r,S^{m(\ell)}\omega}}, \end{aligned}$$

or, par (3.10),

$$\frac{\|\mathcal{L}_{r,S^{m(\ell)}\omega}\mathbf{1}\|_\infty}{c_{r,S^{m(\ell)}\omega}} \leq \frac{\sup h_{S^n\omega}}{\inf h_{S^{m(\ell)}\omega}} \leq C^4;$$

Finalement, on obtient :

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_{n,\omega}f}{c_{n,\omega}} - h_{S^n\omega}\nu_\omega(f) \right\|_\infty \leq \text{Cte}\|f\|_\infty\gamma^\ell \quad (3.11)$$

où $\gamma = (1 - e^{-\Delta})$ et la constante ne dépend pas de ω .

Lemme 3.7 Soient

$$\begin{aligned}
 - \bar{h}_\omega &= h_\omega \nu_\omega(\mathbf{1}) \\
 - \bar{c}_\omega &= \frac{c_\omega \nu_\omega(\mathbf{1})}{\nu_{S^\omega}(\mathbf{1})} \\
 - \bar{\nu}_\omega &= \frac{\nu_\omega}{\nu_\omega(\mathbf{1})},
 \end{aligned}$$

alors, $\bar{\nu}_\omega(\mathbf{1}) = 1$, $\bar{\nu}_\omega(\bar{h}_\omega) = 1$, $\mathcal{L}_\omega \bar{h}_\omega = \bar{c}_\omega \bar{h}_{S^\omega}$. De plus, l'estimation (3.11) reste vraie pour \bar{h}_ω , \bar{c}_ω et $\bar{\nu}_\omega$.

Preuve : En effet, toute fonction f de Λ_0 vérifie :

$$\frac{\mathcal{L}_{n,\omega} f}{\bar{c}_{n,\omega}} - \bar{h}_{S^{n\omega}} \bar{\nu}_\omega(f) = \frac{\nu_{S^{n\omega}}(\mathbf{1})}{\nu_\omega(\mathbf{1})} \left(\frac{\mathcal{L}_{n,\omega} f}{c_{n,\omega}} - h_{S^{n\omega}} \nu_\omega(f) \right)$$

Il suffit de borner $\frac{\nu_{S^{n\omega}}(\mathbf{1})}{\nu_\omega(\mathbf{1})}$ indépendamment de ω et n . Comme $\nu_\omega(\mathbf{1}) \geq \lambda_{1,\omega}$ et $\nu_{S^{n\omega}}(\mathbf{1}) \leq \mu_{1,\omega}$, ceci est réalisé par le lemme 3.6 et la remarque 3.4. On obtient ainsi,

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_{n,\omega} f}{\bar{c}_{n,\omega}} - \bar{h}_{S^{n\omega}} \bar{\nu}_\omega(f) \right\|_\infty \leq Cte \gamma^{\ell(n)-1} \|f\|_\infty$$

où la constante et γ ne dépendent pas de ω . □

Dans toute la suite, h_ω , c_ω et ν_ω sont remplacés par \bar{h}_ω , \bar{c}_ω et $\bar{\nu}_\omega$.

Pour finir la preuve du théorème D, donnons une estimation de $\left\| \frac{\mathcal{L}_{n,\omega} f}{c_{n,\omega}} - h_{S^{n\omega}} \nu_\omega(f) \right\|_\infty$ pour f dans L . Quitte à séparer partie positive et négative, on peut supposer que f est positive. Soit $\beta = \|f\| > 0$ si $f \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \stackrel{n}{\sim} y$ on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x) + \beta}{f(y) + \beta} &= \exp[\log(f(x) + \beta) - \log(f(y) + \beta)] \\
 &\leq \exp\left[\frac{f(x) - f(y)}{\beta}\right] \\
 &\leq \exp\left[\frac{\|f\| \chi(n)}{\beta}\right] \\
 &\leq e^{\chi(n)}.
 \end{aligned}$$

Ceci montre que $f + \beta$ appartient à Λ_0 . De plus, la fonction β est clairement dans Λ_0 . Ainsi ν_ω peut être étendue en une forme linéaire continue sur L : pour $f \in \Lambda_0$, $\nu_\omega(f) = \lim \frac{\mathcal{L}_{n,\omega} f}{c_{n,\omega} h_{S^{n\omega}}}$ et $(\inf f) \mathcal{L}_{n,\omega} \mathbf{1} \leq \mathcal{L}_{n,\omega} f \leq (\sup f) \mathcal{L}_{n,\omega} \mathbf{1}$, ainsi $(\inf f) \nu_\omega(\mathbf{1}) \leq$

$\nu_\omega(f) \leq (\sup f)\nu_\omega(\mathbf{1})$. En particulier, en posant $\nu_\omega(g) = \nu_\omega(g + \|g\|) - \nu_\omega(\|g\|)$ pour $g \in L$, $g \geq 0$, on définit une forme linéaire continue sur L . En utilisant (3.11) on obtient :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\mathcal{L}_{n,\omega}f}{c_{n,\omega}} - h_{S^n\omega}\nu_\omega(f) \right\|_\infty &\leq \left\| \frac{\mathcal{L}_{n,\omega}(f + \beta)}{c_{n,\omega}} - h_{S^n\omega}\nu_\omega(f + \beta) \right\|_\infty + \left\| \frac{\mathcal{L}_{n,\omega}\beta}{c_{n,\omega}} - h_{S^n\omega}\beta \right\|_\infty \\ &\leq Cte \gamma^{\ell(n)}\|f\|. \end{aligned} \quad (3.12)$$

De la même manière, on obtient :

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega}f}{c_{n,S^{-n}\omega}} - h_\omega\nu_{S^{-n}\omega}(f) \right\|_\infty \leq Cte \gamma^{\ell(n)}\|f\|.$$

Comme L est dense dans $C(X)$, ν_ω peut être étendue en une mesure borélienne sur X .

Lemme 3.8 *Les mesures ν_ω ainsi définies vérifient : $\mathcal{L}_\omega^*\nu_{S\omega} = c_\omega\nu_\omega$.*

Preuve : En effet, comme L est dense dans $C(X)$, l'estimation (3.12), implique pour f dans $C(X)$:

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_{n,\omega}f}{c_{n,\omega}} - h_{S^n\omega}\nu_\omega(f) \right\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Le lemme 3.8 résulte directement de cette convergence. \square

Lemme 3.9 *Le triplet d'applications $(H, C, \bar{\nu})$*

$$\begin{array}{lll} H : \Omega & \longrightarrow & L \\ \omega & \longrightarrow & h_\omega \end{array} \quad \begin{array}{lll} C : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^+/\{0\} \\ \omega & \longrightarrow & c_\omega \end{array} \quad \begin{array}{lll} \bar{\nu} : \Omega & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ \omega & \longrightarrow & \nu_\omega \end{array}$$

vérifiant $\mathcal{L}_\omega h_\omega = c_\omega h_{S\omega}$, $\mathcal{L}_\omega^*\nu_{S\omega} = \nu_\omega$ et $\nu_\omega(h_\omega) = 1$ est unique. De plus, si $\mu_\omega = h_\omega\nu_\omega$, $\mu = (\mu_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est le seul état d'équilibre de Ψ et $\pi(\Psi) = \int \log cd\mathbb{P}$.

Preuve : Soit $(\tilde{H}, \tilde{C}, \tilde{\nu})$ un autre triplet vérifiant les hypothèse de la propriété 3.9. Les triplets $(H, C, \bar{\nu})$ et $(\tilde{H}, \tilde{C}, \tilde{\nu})$ vérifient $\tilde{\nu}_{S^n\omega}(h_{S^n\omega}) = \frac{\tilde{c}_{n,\omega}}{c_{n,\omega}}\tilde{\nu}_\omega(h_\omega)$. Soient $f \in \Lambda_0$, λ_ℓ et μ_ℓ les suites utilisées dans la construction de $\nu_\omega(f)$. On a

$$\lambda_\ell h_{S^{m(\ell)}\omega} \leq \frac{\mathcal{L}_{m(\ell),\omega}f}{c_{m(\ell),\omega}} \leq \mu_\ell h_{S^{m(\ell)}\omega}.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à la mesure $\tilde{\nu}_{S^{m(\ell)}\omega}$, on obtient

$$\lambda_\ell \frac{\tilde{c}_{m(\ell),\omega}}{c_{m(\ell),\omega}} \tilde{\nu}_\omega(h_\omega) \leq \frac{\tilde{c}_{m(\ell),\omega}}{c_{m(\ell),\omega}} \tilde{\nu}_\omega(f) \leq \mu_\ell \frac{\tilde{c}_{m(\ell),\omega}}{c_{m(\ell),\omega}} \tilde{\nu}_\omega(h_\omega).$$

Comme les suites λ_ℓ et μ_ℓ convergent vers $\nu_\omega(f)$ et que ν_ω et $\tilde{\nu}_\omega$ sont des probabilités, on obtient $\nu_\omega(f) = \tilde{\nu}_\omega(f)$ pour $f \in \Lambda_0$, puis pour $f \in L$ et enfin pour $f \in C(X)$ par densité. L'égalité $c_\omega = \tilde{c}_\omega$ en découle directement. Enfin, l'égalité $h_\omega = \tilde{h}_\omega$ découle de la convergence, pour $f \in C(X)$,

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega} f}{c_{n,S^{-n}\omega}} - h_\omega \nu_{S^{-n}\omega}(f) \right\|_\infty \longrightarrow 0.$$

Le fait que μ soit un état d'équilibre pour Ψ et que $\pi(\Psi) = \int \log cd\mathbb{P}$ résulte du corollaire b.1 (page xv). Soit $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_\omega)$ un autre état d'équilibre pour Ψ . Posons $G_\omega = \Psi_\omega + \log h_\omega - \log h_{S\omega} \circ \sigma - \log c_\omega$, G vérifie $\tilde{\mathcal{L}}_\omega \mathbf{1} := \mathcal{L}_{G_\omega} \mathbf{1} = \mathbf{1}$ et $\tilde{\mu}$ est un état d'équilibre pour G . Ainsi, par le théorème b, $\tilde{\mathcal{L}}_\omega^* \mu_{S\omega} = \mu_\omega$. La convergence (3.1) et le fait que $\|h_\omega\|_\infty$ soit borné indépendamment de ω impliquent :

$$\|\tilde{\mathcal{L}}_{n,\omega} f - \mu_\omega(f)\|_\infty \longrightarrow 0$$

pour $f \in C(X)$. Or, on a

$$\begin{aligned} |\tilde{\mu}_\omega(f) - \mu_\omega(f)| &= \tilde{\mu}_{S^n\omega}(\tilde{\mathcal{L}}_{n,\omega} f - \mu_\omega(f)) \\ &\leq \|\tilde{\mathcal{L}}_{n,\omega} f - \mu_\omega(f)\|_\infty, \end{aligned}$$

ainsi, $\tilde{\mu}_\omega(f) = \mu_\omega(f)$. □

Enfin le théorème D est démontré.

La suite $(k_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ est choisie indépendamment de ω et $\varepsilon \in]0, 1[$, γ et la constante intervenant dans le théorème D sont aussi indépendants de ε ; ces faits sont importants pour démontrer les résultats de stabilité.

3.1.3 Propriétés de stabilité.

Nous allons maintenant montrer le théorème E. Soient \mathcal{L}_Φ , l'opérateur de transfert associé à Φ et (h, c, ν) le triplet qui lui est associé par le théorème 2.1. Rappelons les faits suivants.

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}_\Phi^n \mathbf{1}}{\int \mathcal{L}_\Phi^n \mathbf{1} dm} \quad h_\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega} \mathbf{1}}{\int \mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega} \mathbf{1} dm} \quad (3.13)$$

$$c = \frac{\mathcal{L}_\Phi h}{h} \quad c_\omega = \frac{\mathcal{L}_\omega h_\omega}{h_{S\omega}}. \quad (3.14)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega$ et $x \in X$ alors $\|\Psi_\omega - \Phi\|_\infty < \varepsilon$ donne

$$e^{-n\varepsilon} \leq \frac{\mathcal{L}_{n,\omega} \mathbf{1}(x)}{\mathcal{L}_\Phi^n \mathbf{1}(x)} \leq e^{n\varepsilon}. \quad (3.15)$$

Stabilité de h_ω .

Il résulte des sections précédentes :

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega} \mathbf{1}}{\int \mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega} \mathbf{1} dm} - h_\omega \right\|_\infty \longrightarrow 0 \text{ uniformément en } \omega \text{ et } \varepsilon,$$

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_\Phi^n \mathbf{1}}{\int \mathcal{L}_\Phi^n \mathbf{1} dm} - h_0 \right\|_\infty \longrightarrow 0$$

De plus, nous avons

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_\Phi^n \mathbf{1}}{\int \mathcal{L}_\Phi^n \mathbf{1} dm} - \frac{\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega} \mathbf{1}}{\int \mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega} \mathbf{1} dm} \right\|_\infty \leq \left\| \frac{\mathcal{L}_\Phi^n \mathbf{1}}{\int \mathcal{L}_\Phi^n \mathbf{1} dm} \right\|_\infty \left\| 1 - \frac{\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega} \mathbf{1}}{\mathcal{L}_\Phi^n \mathbf{1}} \frac{\int \mathcal{L}_\Phi^n \mathbf{1} dm}{\int \mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega} \mathbf{1} dm} \right\|_\infty$$

$$\leq \text{Cte} (e^{2n\varepsilon} - 1).$$

Ainsi, pour tout n et ω on a : $\|h_0 - h_\omega\|_\infty \leq w_n + \text{Cte} (e^{2n\varepsilon} - 1)$. Où w_n est une suite indépendante de ω et ε et convergeant vers zéro, ceci implique

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\omega \in \Omega_\varepsilon} \|h_0 - h_\omega\|_\infty = 0.$$

On en déduit la stabilité de c car $c = \frac{\mathcal{L}_\Phi h}{h}$ et $c_\omega = \frac{\mathcal{L}_{n,\omega} h}{h_{S^n \omega}}$. □

Stabilité de ν_ω .

Pour $f \in C(X)$, $\left\| \frac{\mathcal{L}_{n,\omega} f}{c_{n,\omega}} - h_{S^n \omega} \nu_\omega(f) \right\|_\infty$ converge vers 0 uniformément en ω et ε . Soit $f \in C(X)$, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|\nu(f) - \nu_\omega(f)| \leq \left\| \nu(f) - \frac{\mathcal{L}_\Phi^n f}{c^n h_0} \right\|_\infty + \left\| \frac{\mathcal{L}_\Phi^n f}{c^n h_0} - \frac{\mathcal{L}_{n,\omega} f}{c_{n,\omega} h_{S^n \omega}} \right\|_\infty + \left\| \frac{\mathcal{L}_{n,\omega} f}{c_{n,\omega} h_{S^n \omega}} - \nu_\omega(f) \right\|_\infty.$$

Par ailleurs, nous avons $\left\| \frac{\mathcal{L}_\Phi^n f}{c^n h_0} - \frac{\mathcal{L}_{n,\omega} f}{c_{n,\omega} h_{S^n \omega}} \right\|_\infty \leq \left\| \frac{\mathcal{L}_\Phi^n \mathbf{1}}{c^n h_0} - \frac{\mathcal{L}_{n,\omega} \mathbf{1}}{c_{n,\omega} h_{S^n \omega}} \right\|_\infty \|f\|_\infty$ et les résultats de stabilité précédents impliquent :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\omega \in \Omega} \left\| \frac{\mathcal{L}_\Phi^n \mathbf{1}}{c^n h_0} - \frac{\mathcal{L}_{n,\omega} \mathbf{1}}{c_{n,\omega} h_{S^n \omega}} \right\|_\infty = 0.$$

Soit finalement :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\omega \in \Omega} |\nu(f) - \nu_\omega(f)| = 0.$$

Ceci conclut la preuve du théorème E. □

Dans toute la section 3.1, seul le potentiel est aléatoire et contrairement au cadre considéré par T. Bogenschütz, le décalage σ agit sur un espace fixe. Dans ([Bog1]), T. Bogenschütz construit un formalisme thermodynamique pour des sous-décalages de type fini aléatoires. C'est-à-dire, pour $\omega \in \Omega$, X_ω est l'espace $\prod_{i=0}^{\infty} \{1, \dots, k(S^i \omega)\}$ où k est une application mesurable de Ω dans \mathbb{N} , dont le log est intégrable. Le décalage σ applique X_ω dans $X_{S\omega}$. Il considère alors une famille de potentiels $(\Psi_\omega)_{\omega \in \Omega}$, $\Psi_\omega \in C(X_\omega)$ "équi-hölder" : pour $\omega \in \Omega$,

$$v_n(\omega) = v_n(\Psi_\omega) \leq C\theta^n \quad C > 0, \quad 0 < \theta < 1.$$

Il obtient l'existence et l'unicité d'un état d'équilibre, la convergence des compositions $\mathcal{L}_{\omega,n}$ vers un opérateur de rang un et une vitesse de convergence exponentielle, pour des observables höldériennes. Modulo quelques modifications, la technique présentée ici devrait s'adapter à ce cadre et donner l'existence et l'unicité d'un état d'équilibre pour des sous-décalages aléatoires associés à un potentiel aléatoire dont le module de continuité est "équisommable" : $v_n(\omega) \leq K v_n$ avec $\sum v_n < \infty$.

Le cadre dans lequel nous nous sommes placés représente un codage pour des petites perturbations de difféomorphismes Axiome A. Ce codage est réalisé en Annexe (page 111), il peut permettre de retrouver le résultat de L.-S. Young ([Y2]) sur la stabilité stochastique pour des Axiomes A attracteurs (voir aussi P.-D. Lui & M. Qian [L, Q] pour d'autres résultats sur les systèmes dynamiques aléatoires dans un cadre géométrique).

3.2 Systèmes dynamiques aléatoires

Pour terminer ce chapitre, nous considérons une classe de systèmes dynamiques aléatoires plus large que celle des perturbations aléatoires. C'est-à-dire, les potentiels Ψ_ω ne sont pas nécessairement dans un voisinage d'un potentiel donné. Pour simplifier, nous ne considérerons que le cas du décalage plein, bien que les résultats restent valables pour des sous-décalages de type fini. Beaucoup de démonstrations reprennent celles de la section 3.1, aussi elles ne seront pas détaillées et nous insisterons surtout sur les aspects nouveaux.

Dans toute cette section, les affirmations relatives à $\omega \in \Omega$ doivent être entendues comme étant vraie pour \mathbb{P} -presque tout ω même si cela n'est pas spécifié. Comme nous n'effectuerons cette opération qu'un nombre dénombrable de fois, il existe un ensemble de \mathbb{P} -mesure pleine sur lequel tous les résultats sont valides.

Dans cette section, (X, σ) est le décalage plein sur un alphabet fini A .

Soit $\chi(n)$ une suite décroissante vers zéro, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, S)$ un système dynamique ergodique inversible et $\Psi : \Omega \rightarrow C(X)$ un potentiel aléatoire. Pour $\omega \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}$, notons $v_n(\omega)$ pour $v_n(\Psi_\omega)$ et $\chi(0) = V$.

Nous ferons les hypothèses suivantes sur Ψ :

- (H1) $\int \|\Psi_\omega\|_\infty dP < \infty$,
- (H2) $\sup_{p \in \mathbb{N}} \frac{\sum_{i=p+1}^{\infty} v_i(S^{-i}\omega)}{\chi(p)} = C(\omega)$, $C(\omega) \in L^1(\Omega)$.

L'intégrabilité de $C(\omega)$ implique que $\sum_{i=1}^{\infty} v_i(S^{-i}\omega)$ est P -intégrable. Ainsi, pour presque tout ω , $\sum_{i=1}^{\infty} v_{p+i}(S^{-i}\omega)$ tend vers zéro quand p tend vers l'infini. Considérons la suite $\eta^\omega(p) = \sum_{i=1}^{\infty} v_{p+i}(S^{-i}\omega)$, cette suite définit une métrique sur X , soit B^ω l'espace de fonctions Lipschitziennes associé :

$$B^\omega = \{f \in C(X) / \exists K > 0 / v_n(f) \leq K\eta^\omega(n)\}.$$

Soit $\mathcal{B} = \bigcup_{\omega \in \Omega} B^\omega$, les opérateurs agissent comme des applications fibrées sur $\mathcal{B} : \mathcal{L}_{n,\omega} B^\omega \subset B^{S^n\omega}$.

Pour $D > 1$, soit $(k_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ la suite associée à $\chi(n)$ et D comme dans la section 3.1 page 37 (avec $M = 1$).

Nous allons adapter les démonstrations de la section 3.1 pour montrer le résultat suivant.

Proposition 3.10 *Sous les hypothèses (H1) et (H2) il existe trois applications mesurables :*

$$\begin{array}{lll} H : \Omega \longrightarrow \mathcal{B} & C : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+ / \{0\} & \bar{\nu} : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ \omega \longrightarrow h_\omega \in B^\omega & \omega \longrightarrow c_\omega & \omega \longrightarrow \nu_\omega \end{array}$$

telles que :

1. $\forall \omega \in \Omega$, $\mathcal{L}_{\Psi\omega} h_\omega = c_\omega h_{S\omega}$ et $\mathcal{L}_{\Psi\omega}^* \nu_{S\omega} = c_\omega \nu_\omega$, $\nu_\omega(h_\omega) = 1$,
2. $\log c_\omega$ et $\|\log h_\omega\|$ sont intégrables,

Le triplet $(H, \bar{\nu}, c)$ est uniquement déterminé par 1. et la mesure $\bar{\mu} = (\mu_\omega)_{\omega \in \Omega}$, $\mu_\omega = h_\omega \nu_\omega$ est le seul état d'équilibre de Ψ .

La preuve de la proposition 3.10 suit celle du théorème D. Comme dans la section 3.1, le fait que μ est un état d'équilibre pour Ψ et l'unicité de cet état d'équilibre résulte de l'unicité du triplet $(H, \bar{\nu}, c)$, de l'intégrabilité de $\log c_\omega$ et $\|\log h_\omega\|$ et du théorème b (page xv).

3.2.1 Construction de h_ω et c_ω .

Nous allons construire une suite de cônes. Pour $\omega \in \Omega$, soit :

$$\Lambda_0^\omega = \left\{ g \in C^+(X) / g(x) \leq \exp(\eta_0^\omega(p))g(y) \text{ si } x \stackrel{p}{\sim} y, p \geq 0 \right\}$$

où $\eta_0^\omega(p) = \sum_{i=1}^{\infty} v_{p+i}(S^{-i}\omega)$. Les cônes Λ_0^ω sont inclus dans B^ω et toute fonction non nulle de Λ_0^ω est strictement positive.

De plus, pour $f \in \Lambda_0^\omega$, $p \in \mathbb{N}$, $x \stackrel{p}{\sim} y$, $\omega \in \Omega$ et $q \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{q,\omega} f(x) &\leq \mathcal{L}_{q,\omega} f(y) \exp[\eta_0^\omega(p+q) + \sum_{j=0}^{q-1} v_{q+p-j}(S^j\omega)] \\ &= \mathcal{L}_{q,\omega} f(y) \exp\left[\sum_{i=1}^{\infty} v_{q+p+i}(S^{-i}\omega) + \sum_{j=1}^q v_{p+j}(S^{-j}S^q\omega)\right] \\ &= \mathcal{L}_{q,\omega} f(y) \exp\left[\sum_{i=q+1}^{\infty} v_{p+i}(S^{-i}S^q\omega) + \sum_{j=1}^q v_{p+j}(S^{-j}S^q\omega)\right] \\ &= \mathcal{L}_{q,\omega} f(y) \exp[\eta_0^{S^q\omega}(p)] \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\mathcal{L}_{q,\omega} f(x) \leq \mathcal{L}_{q,\omega} f(y) \exp[\eta_0^\omega(q+p) + \eta_0^{S^q\omega}(p)]. \tag{3.17}$$

Ainsi, par (3.16), pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_{q,\omega} \Lambda_0^\omega$ est inclus dans $\Lambda_0^{S^q\omega}$ et (3.17) conduit à considérer les cônes suivants :

$$\Lambda_{1,q}^{S^q\omega} = \left\{ g \in C^+(X) / g(x) \leq \exp(\eta_{1,q}^{S^q\omega}(p))g(y) \text{ si } x \stackrel{p}{\sim} y, p \geq 0 \right\}$$

où $\eta_{1,q}^\omega(p) = D(\eta_0^\omega(p) + \eta_0^{S^{-q}\omega}(q+p))$ et $D > 1$. Ces cônes vérifient $\mathcal{L}_{n,\omega} \Lambda_0^\omega \subset \Lambda_{1,q}^{S^q\omega}$. Il faut alors estimer le diamètre projectif de $\mathcal{L}_{n,\omega} \Lambda_0^\omega$ dans $\Lambda_{1,q}^{S^q\omega}$. La démonstration du

lemme suivant suit exactement celle du lemme 3.1, remarquons simplement que par construction de k_1 et (H2), $\eta_1^{S^q\omega}(0) \leq VC(S^q\omega)(D+1)$, pour $q \geq k_1$:

$$\begin{aligned} \eta_{1,q}^{S^q\omega}(0) &= D\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i(S^{-i}S^q\omega) + \sum_{i=1}^{\infty} v_{q+i}(S^{-i}\omega)\right) \\ &\leq D(C(S^q\omega)\chi(0) + \sum_{i=q+1}^{\infty} v_i(S^{-i}S^q\omega)) \\ &\leq C(S^q\omega)D(\chi(0) + \chi(q)) \\ &\leq \mathcal{C}(S^q\omega)V(D+1) \text{ car } q \geq k_1 \end{aligned}$$

et que les fonctions f de Λ_0^ω vérifient $\frac{\sup f}{\inf f} \leq e^{\eta_0^\omega(0)}$.

Lemme 3.11 *Pour $\omega \in \Omega$ et $q \geq k_1$, on a*

$$\text{diam}\Lambda_{1,q}^{S^q\omega} \mathcal{L}_{q,\omega} \Lambda_0^\omega \leq 2 \log \frac{D+1}{D-1} + 2(VC(S^q\omega)(1+D)) := M(S^q\omega).$$

L'application $\omega \mapsto C(\omega)$ est intégrable ; $\omega \mapsto M(\omega)$ l'est donc aussi. En particulier, $M(\omega)$ est presque partout fini. Fixons $\varepsilon > 0$ et $M > 0$ tel que $P\{\omega / M(\omega) > M\} < \varepsilon/2$. Soit $q_1(\omega) = \inf\{k \geq k_1 / M(S^k\omega) \leq M\}$, $q_1(\omega)$ est fini presque partout par ergodicité de S . En suivant la preuve de la proposition 3.3, on construit inductivement une suite de cônes de fonctions positives.

Proposition 3.12 *Pour $\omega \in \Omega$, il existe une famille Λ_ℓ^ω de sous-cônes de $C^+(X)$ et une suite d'entiers $q_\ell = q_\ell(\omega)$ tels que :*

- $\mathcal{L}_{q_\ell, S^{q_1+\dots+q_{\ell-1}}\omega} \Lambda_{\ell-1}^{S^{q_1+\dots+q_{\ell-1}}\omega} \subset \Lambda_\ell^{S^{q_1+\dots+q_\ell}\omega}$,
- toutes fonctions $f, g \in \Lambda_{\ell-1}^{S^{q_1+\dots+q_{\ell-1}}\omega}$ vérifient

$$\theta_{\Lambda_\ell^{S^{q_1+\dots+q_\ell}\omega}}(\mathcal{L}_{q_\ell, S^{q_1+\dots+q_{\ell-1}}\omega} f, \mathcal{L}_{q_\ell, S^{q_1+\dots+q_{\ell-1}}\omega} g) \leq M.$$

Preuve : Fixons $\omega \in \Omega$. Soit $q_\ell = q_\ell(\omega)$ la suite définie par induction par :

$$q_\ell = \inf\{k \geq k_\ell / M(S^{q_1+\dots+q_{\ell-1}+k}\omega) \leq M\}$$

Soit η_ℓ^ω la suite définie par induction :

- η_0^ω est déjà construite, $\eta_1^\omega = \eta_{1,q_1}^\omega$,

- $\eta_2^\omega(p) = D(\eta_0^\omega(p) + \eta_1^{S^{-q_2}\omega}(q_2 + p)),$
- $\eta_\ell^\omega(p) = D(\eta_0^\omega(p) + \eta_{\ell-1}^{S^{-q_\ell}\omega}(q_\ell + p)).$

Les cônes

$$\Lambda_\ell^\omega = \left\{ g \in C^+(X) / g(x) \leq \exp(\eta_\ell^\omega(p))g(y) \text{ si } x \stackrel{p}{\sim} y, p \geq 0 \right\}$$

conviennent. □

Remarque 3.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_{n,\omega}\Lambda_\ell^\omega \subset \Lambda_\ell^{S^n\omega}$

En effet, par récurrence, on montre facilement, pour n, ℓ et $p \in \mathbb{N}$, $\eta_\ell^\omega(n+p) \leq \eta_\ell^{S^n\omega}(p)$. Soit $f \in \Lambda_\ell^\omega$, $x \stackrel{p}{\sim} y$, en procédant comme pour montrer (3.16), on obtient

$$\mathcal{L}_{n,\omega}f(x) \leq \mathcal{L}_{n,\omega}f(y) \exp[\eta_\ell^\omega(p+n) + \sum_{j=1}^n v_{p+j}(S^{-j}S^n\omega)],$$

or,

$$\begin{aligned} \eta_\ell^\omega(n+p) &= D[\eta_{\ell-1}^{S^{-q_\ell}\omega}(q_\ell + n+p) + \eta_0^\omega(n+p)] \\ &\leq D[\eta_{\ell-1}^{S^{-q_\ell}S^n\omega}(q_\ell + p) + \sum_{j=n+1}^\infty v_{p+j}(S^{-j}S^n\omega)]. \end{aligned}$$

Soit finalement, $\mathcal{L}_{n,\omega}f(x) \leq \mathcal{L}_{n,\omega}f(y)\eta_\ell^{S^n\omega}(p)$.

Nous allons maintenant construire les fonctions propres et valeurs propres généralisées.

Pour $\omega \in \Omega$ fixé, pour tout entier n , il existe un unique entier $\ell(n, \omega)$ tel que :

$$q_1 + \dots + q_{\ell(n)} \leq n < q_1 + \dots + q_{\ell(n)+1}.$$

Soit $\gamma = (1 - e^{-M}) \geq \tanh \frac{M}{4}$. La proposition 1.1 du chapitre 1 donne, pour f et g appartenant à Λ_0^ω , l'inégalité suivante :

$$\theta_{\Lambda_\ell^{S^{q_1+\dots+q_\ell}\omega}}(\mathcal{L}_{q_\ell+\dots+q_1,\omega}f, \mathcal{L}_{q_\ell+\dots+q_1,\omega}g) \leq \gamma^{\ell-1} M.$$

Ainsi, pour $f, g \in \Lambda_0^\omega$, on a

$$\theta_{C^+(X)}(\mathcal{L}_{n,\omega}f, \mathcal{L}_{n,\omega}g) \leq \gamma^{\ell-1} M. \quad (3.18)$$

Les fonctions propres généralisées vont être obtenues comme la limite pour la métrique θ_+ de $\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega}\mathbf{1}$. Montrons que $\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega}\mathbf{1}$ forme une suite de Cauchy dans $\pi(\mathbf{1}) \subset C(X)^+$.

Soit $p > n$, $p = n + s$ et $\mathcal{L}_{p,S^{-p}\omega} \mathbf{1} = \mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega} \circ \mathcal{L}_{s,S^{-p}\omega} \mathbf{1}$. Par (3.16), $\mathcal{L}_{s,S^{-p}\omega} \mathbf{1}$ appartient à $\Lambda_0^{S^{-n}\omega}$. Soit $q_i(S^{-n}\omega)$ défini comme ci-dessus, $n = q_1(S^{-n}\omega) + \dots + q_\ell(S^{-n}\omega) + r : = m(\ell) + r$,

$$\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega} \mathbf{1} = \mathcal{L}_{r,S^{-(n-r)}\omega} \circ \mathcal{L}_{q_\ell,S^{n-r-q_\ell}\omega} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{q_1,S^{-n}\omega} \mathbf{1}.$$

et $\theta_+(\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega} \mathbf{1}, \mathcal{L}_{p,S^{-p}\omega} \mathbf{1}) \leq \gamma^{\ell(n,S^{-n}\omega)-1} M$ où $\ell(n, S^{-n}\omega)$ est défini par :

$$q_1(S^{-n}\omega) + \dots + q_\ell(S^{-n}\omega) \leq n < q_1(S^{-n}\omega) + \dots + q_{\ell+1}(S^{-n}\omega)$$

il faut montrer que $\ell(n, S^{-n}\omega)$ tend vers l'infini avec n . Fixons $\varepsilon > 0$, par définition de M et par le théorème ergodique (appliqué à S^{-1}), pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe $p_0 = p_0(\omega)$ tel que pour $p \geq p_0$,

$$\#\{0 \leq q \leq p / M(S^{-q}\omega) > M\} \leq \varepsilon p. \quad (3.19)$$

Supposons que $n \geq k_1 + p_0$. Soit q le plus grand entier inférieur ou égal à $n - k_1$ tel que $M(S^{-q}\omega) \leq M$. L'estimation (3.19) donne $n - q - k_1 \leq \varepsilon(n - k_1)$. Par définition, on a $q_1(S^{-n}\omega) = n - q$, ainsi $q_1(S^{-n}\omega) \leq \varepsilon(n - k_1) + k_1$.

De la même manière, si $n \geq p_0 + k_2 + q_1(S^{-n}\omega)$, il suffit pour cela que

$$n \geq \frac{p_0 + k_1 + k_2}{1 - \varepsilon} \text{ car } q_1(S^{-n}\omega) \leq \varepsilon(n - k_1) + k_1 \leq \varepsilon n + k_1,$$

alors $q_2(S^{-n}\omega) \leq \varepsilon(n - k_1 - k_2) + k_2$

.... si $n \geq \frac{p_0 + k_1 + \dots + k_\ell}{1 - \varepsilon}$ alors $q_\ell(S^{-n}\omega) \leq \varepsilon(n - k_1 - \dots - k_\ell) + k_\ell$ ainsi,

$$k_1 + \dots + k_\ell \leq q_1 + \dots + q_\ell \leq \varepsilon n + k_1 + \dots + k_\ell$$

et $\ell(n, S^{-n}\omega)$ tend bien vers l'infini avec n . De plus, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in X$,

$$e^{-\eta_0^\omega(0)} \mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega} \mathbf{1}(y) \leq \mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega} \mathbf{1}(x) \leq e^{\eta_0^\omega(0)} \mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega} \mathbf{1}(y), \quad (3.20)$$

ainsi $\theta_{C^+(X)}(\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega} \mathbf{1}, \mathbf{1}) < \infty$ et la suite $(\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega} \mathbf{1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\pi(\mathbf{1}) \subset C(X)^+$. Soit h_ω la θ_+ -limite de $\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega} \mathbf{1}$. h_ω vérifie $\mathcal{L}_\omega h_\omega = c_\omega h_{S\omega}$ avec $c_\omega \in \mathbb{R}^+$.

De plus, la proposition 1.2, montre que h_ω est aussi la $\|\cdot\|_\infty$ -limite de la suite $\left(\frac{\mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega} \mathbf{1}}{\int \mathcal{L}_{n,S^{-n}\omega} \mathbf{1} dm} \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

En particulier, h_ω appartient à Λ_ℓ^ω pour tout ℓ . De plus, (3.20), donne :

$$e^{-2VC(\omega)} \leq \inf h_\omega \leq \sup h_\omega \leq e^{2VC(\omega)}, \quad (3.21)$$

comme par (H2), $C(\omega) \in L^1(\Omega)$, $\|\log h_\omega\|$ est intégrable.

3.2.2 Construction des mesures ν_ω .

Pour finir la preuve de la proposition 3.10, on construit les mesures ν_ω comme dans 3.1.2.

Pour $f \in \Lambda_0^\omega$, soit $n \in \mathbb{N}$, $n = q_1(\omega) + \dots + q_\ell(\omega) + r : = m(\ell) + r$. D'une part, $\mathcal{L}_{m(\ell),\omega} f$ appartient à $\Lambda_\ell^{S^{m(\ell)}\omega}$, d'autre part, par la remarque 3.5, $\mathcal{L}_{n,\omega} f$ appartient à $\Lambda_\ell^{S^n\omega}$. Soient d'une part λ_n et μ_n les réels tels que $\theta_{\Lambda_\ell^{S^n\omega}}(\mathcal{L}_{n,\omega} f, c_{n,\omega} h_{S^n\omega}) = \log \frac{\mu_n}{\lambda_n}$ et d'autre part, λ_ℓ et μ_ℓ les réels utilisés dans la définition de la $\Lambda_\ell^{S^{m(\ell)}\omega}$ -distance entre $\mathcal{L}_{m(\ell),\omega} f$ et $c_{m(\ell),\omega} h_{S^{m(\ell)}\omega}$. Ces nombres vérifient :

$$\lambda_n h_{S^n\omega} \leq \frac{\mathcal{L}_{n,\omega} f}{c_{n,\omega}} \leq \mu_n h_{S^n\omega}, \quad (3.22)$$

$$(\mu_\ell - \lambda_\ell) \leq (\mu_1 - \lambda_1) \gamma^{\ell-1}.$$

et $\mu_n \leq \mu_\ell$, $\lambda_n \geq \lambda_\ell$. En effet, $\mathcal{L}_{n,\omega} f = \mathcal{L}_{r,S^{m(\ell)}\omega} \circ \mathcal{L}_{m(\ell),\omega} f$, par définition, μ_ℓ (resp. λ_ℓ) est le plus petit réel (resp. le plus grand réel) tel que

$$\begin{aligned} \mu_\ell h_{S^{m(\ell)}\omega} - \frac{\mathcal{L}_{m(\ell),\omega} f}{c_{m(\ell),\omega}} &\in \Lambda_\ell^{S^{m(\ell)}\omega} \\ \text{(resp. } \frac{\mathcal{L}_{m(\ell),\omega} f}{c_{m(\ell),\omega}} - \lambda_\ell h_{S^{m(\ell)}\omega} &\in \Lambda_\ell^{S^{m(\ell)}\omega}). \end{aligned}$$

En appliquant l'opérateur $\mathcal{L}_{r,S^{m(\ell)}\omega}$, on obtient,

$$\mu_\ell h_{S^n\omega} - \frac{\mathcal{L}_{n,\omega} f}{c_{n,\omega}} \in \Lambda_\ell^n \omega \quad (\text{par la remarque 3.5, } \mathcal{L}_{r,S^{m(\ell)}\omega} \Lambda_\ell^{S^{m(\ell)}\omega} \subset \Lambda_\ell^{S^n\omega})$$

$$\text{(resp. } \frac{\mathcal{L}_{n,\omega} f}{c_{n,\omega}} - \lambda_\ell h_{S^n\omega} \in \Lambda_\ell^{S^n\omega}).$$

Par définition de μ_n et λ_n , ceci conduit bien à $\mu_n \leq \mu_\ell$, $\lambda_n \geq \lambda_\ell$. Ainsi $\mu_n - \lambda_n \leq \mu_\ell - \lambda_\ell$ et μ_n et λ_n convergent vers la même limite notée $\nu_\omega(f)$, $\lambda_n \leq \nu_\omega(f) \leq \mu_n$. Posons :

- $\bar{h}_\omega = h_\omega \nu_\omega(\mathbf{1})$
- $\bar{c}_\omega = \frac{c_\omega \nu_\omega(\mathbf{1})}{\nu_{S^\omega(\mathbf{1})}}$
- $\bar{\nu}_\omega = \frac{\nu_\omega}{\nu_\omega(\mathbf{1})}$,

les inéquations (3.22) impliquent, en convenant que $\bar{\lambda}_n = \frac{\lambda_n}{\nu_\omega(\mathbf{1})}$ et $\bar{\mu}_n = \frac{\mu_n}{\nu_\omega(\mathbf{1})}$,

$$\bar{\lambda}_n h_{S^n\omega} \leq \frac{\mathcal{L}_{n,\omega} f}{\bar{c}_{n,\omega}} \leq \bar{\mu}_n \bar{h}_{S^n\omega},$$

ceci donne pour $f \in \Lambda_0^\omega$,

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_{n,\omega} f}{c_{n,\omega} \overline{h_{S^n \omega}}} - \overline{\nu_\omega}(f) \right\|_\infty \leq (\overline{\mu_n} - \overline{\lambda_n}) \leq \overline{\mu_{1,(\omega)}} \gamma^{\ell-1}. \quad (3.23)$$

Dans la suite, nous écrirons h_ω , c_ω et ν_ω pour $\overline{h_\omega}$, $\overline{c_\omega}$ et $\overline{\nu_\omega}$. Pour f appartenant à B^ω , $f + \|f\|_{B^\omega}$ appartient à $\in \Lambda_0^\omega$, ceci permet d'étendre les formes ν_ω à B^ω puis à $C(X)$ par densité. En outre, toute fonction f de $C(X)$ vérifie,

$$\left\| \frac{\mathcal{L}_{n,\omega} f}{c_{n,\omega} h_{S^n \omega}} - \nu_\omega(f) \right\|_\infty \longrightarrow 0. \quad (3.24)$$

L'équation (3.24) implique que ν_ω est une mesure conforme généralisée ($\mathcal{L}_\omega^* \nu_{S\omega} = c_\omega \nu_\omega$) et (3.22) montre l'unicité de ν_ω , l'unicité de c_ω en découle (en procédant comme page 46). Reste à montrer l'unicité de h_ω . Soit $(\widetilde{h_\omega})_{\omega \in \Omega}$ tel que $\widetilde{h_\omega} \in C(X)$ et $\mathcal{L}_\omega \widetilde{h_\omega} = c_\omega \widetilde{h_{S\omega}}$, (3.24) implique

$$\left\| \frac{\widetilde{h_{S^n \omega}}}{h_{S^n \omega}} - 1 \right\|_\infty \longrightarrow 0.$$

Si $\widetilde{h_\omega}$ n'est pas égal à h_ω presque partout alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$A_\varepsilon = \left\{ \omega \in \Omega / \left\| \frac{\widetilde{h_\omega}}{h_\omega} - 1 \right\|_\infty \geq \varepsilon \right\}$$

soit de mesure positive. Le théorème de récurrence de Poincaré implique pour $\omega \in A_\varepsilon$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\widetilde{h_{S^n \omega}}}{h_{S^n \omega}} - 1 \right\|_\infty \geq \varepsilon$$

ce qui est contradictoire. Le fait que $\bar{\mu} = (\mu_\omega)_{\omega \in \Omega}$, $\mu_\omega = h_\omega \nu_\omega$ soit le seul état d'équilibre associé à Ψ se démontre comme dans la section 3.1, remarquons simplement que $c_\omega = \nu_{S\omega}(\mathcal{L}_\omega \mathbf{1})$ ainsi, l'intégrabilité de $\log c_\omega$ découle directement de (H1). Ceci termine la preuve de la proposition 3.10. \square

Deuxième partie

Espace d'états dénombrable

Introduction.

Nous considérerons $(\Sigma, \mathcal{F}, m, \sigma)$ un sous-décalage de type fini sur un alphabet dénombrable infini, ici \mathbb{N} , muni de la tribu \mathcal{F} des boréliens et de m une probabilité borélienne dont le support est Σ et par rapport à laquelle σ est non singulière. Pour $r \in]0, 1[$ fixé, $d(x, y) = r^{t(x, y)}$ est la métrique usuelle sur Σ ($t(x, y) = \min\{n \geq 1 / x_n \neq y_n\}$). Pour cette métrique, σ est lipschitzienne sur Σ .

La formule suivante définit une mesure sigma-finie sur Σ :

$$m \circ \sigma(A) = \sum_{a \in \mathbb{N}} m(\sigma([a] \cap A)) \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

La mesure $m \circ \sigma$ est bien définie car $\sigma_{[a]} : [a] \rightarrow \sigma[a]$ est bijective et bicontinue donc bimesurable, ainsi $\sigma([a] \cap A) \in \mathcal{F}$ pour tout $A \in \mathcal{F}$. La non singularité de σ par rapport à m implique que m est absolument continue par rapport à $m \circ \sigma$. Soit $\Phi = \log \frac{dm}{dm \circ \sigma} =: \log g_0$ et \mathcal{L}_Φ l'opérateur de transfert associé, m est une mesure 1-conforme pour \mathcal{L}_Φ ($m(\mathcal{L}_\Phi f) = m(f)$ pour toute $f \in L^1(m)$). En effet, remarquons tout d'abord que par définition, la mesure $m \circ \sigma$ vérifie pour f mesurable et positive :

$$(m \circ \sigma)(f) = \sum_{a \in \mathbb{N}} \int_{\sigma[a]} f(ax) dm(x).$$

Montrons que $m(g\mathcal{L}_\Phi f) = m(g \circ \sigma \cdot f)$ pour $g \in L^1(m)$ et $f \in L^\infty(m)$. $\mathcal{L}_\Phi f$ s'écrit

$$\mathcal{L}_\Phi f(x) = \sum_{a \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\sigma[a]}(x) g_0(ax) f(ax).$$

En multipliant par g et intégrant sur Σ , on obtient

$$\begin{aligned} \int g\mathcal{L}_\Phi f dm &= \sum_{a \in \mathbb{N}} \int_{\sigma[a]} g(x) g_0(ax) f(ax) dm(x) \\ &= \sum_{a \in \mathbb{N}} \int_{\sigma[a]} (g \circ \sigma \cdot g_0 \cdot f)(ax) dm(x) \\ &= \int (g \circ \sigma f) g_0 dm \circ \sigma = \int (g \circ \sigma) f dm, \end{aligned}$$

ce qui implique que m est conforme. En particulier, l'opérateur \mathcal{L}_Φ est bien défini sur $L^1(m)$. Trouver une mesure finie invariante par σ et absolument continue par rapport à m revient à trouver un point fixe dans $L^1(m)$ pour \mathcal{L}_Φ . Les propriétés ergodiques de cette mesure invariante sont alors liées aux propriétés spectrales de l'opérateur, agissant sur un espace approprié.

Nous savons déjà que $\mathcal{L}_\Phi \mathbf{1}$ est finie m -presque partout. Si, de plus Φ est uniformément continue et $\|\mathcal{L}_\Phi \mathbf{1}\|_\infty < \infty$, \mathcal{L}_Φ agit sur l'espace des fonctions uniformément continues et bornées sur Σ .

Nous supposons que le décalage est irréductible et que Φ est une fonction höldérienne sur les 1-cylindres. C'est à dire qu'il existe $\nu > 0$ et $C > 0$ tels que si x et y sont dans un même 1-cylindre,

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq Cd(x, y)^\nu,$$

(remarquons que, dans cette définition, la constante C ne dépend pas du cylindre), \mathcal{L}_Φ agit alors sur l'espace des fonctions höldériennes sur les 1-cylindres. Quitte à changer r dans la définition de la métrique sur Σ , on peut supposer que Φ est lipschitzienne (i.e. $\nu = 1$) pour cette métrique ; \mathcal{L}_Φ agit alors sur l'espace des fonctions lipschitziennes. Soient L l'espace des fonctions lipschitziennes sur Σ et bornées, $C_u(\Sigma)$ l'espace des fonctions uniformément continues et bornées sur Σ . Pour $f \in C_u(\Sigma)$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n = \sup\{|f(x)| / x \in [n]\}$.

Sous l'hypothèse supplémentaire

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} \|\mathcal{L}_\Phi^n \mathbf{1}\|_\infty \leq M. \quad (\mathbf{K})$$

(cette hypothèse implique clairement que $\|(\mathcal{L}_\Phi \mathbf{1})\|_\infty < \infty$ et que \mathcal{L}_Φ agit sur l'espace des fonctions bornées), nous établirons le résultat suivant (chapitre 4).

Théorème F *Si Φ est lipschitzienne, vérifie (\mathbf{K}) et si σ est irréductible alors 1 est valeur propre simple de l'opérateur \mathcal{L}_Φ agissant sur L . La fonction propre associée h est strictement positive sur Σ . De plus, \mathcal{L}_Φ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres de module 1. Si σ est apériodique, 1 est la seule valeur propre de module maximal et on a la convergence :*

$$\mathcal{L}_\Phi^n f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h \int f dm, \quad (\text{II})$$

uniformément sur les compacts de Σ et dans $L^1(m)$, pour $f \in C_u(\Sigma)$.

Remarques à propos de l'hypothèse (\mathbf{K})

1. Dans [Sa], O. Sarig fait l'hypothèse suivante sur Φ : il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$, pour tout $a \in \mathbb{N}$,

il existe $M_a > 0$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M_a^{-1} \leq \frac{Z_n(\Phi, a)}{\lambda^n} \leq M_a, \quad (\mathbf{H-Sa})$$

où $Z_n(\Phi, a) = \sum_{\substack{\sigma^n x = x \\ x_0 = a}} e^{\sum_{i=0}^{n-1} \Phi \circ \sigma^i(x)}$. En supposant, de plus que σ est apériodique, il construit une fonction h uniformément continue sur Σ , strictement positive et ν une mesure sigma-finie telles que $\mathcal{L}_\Phi h = \lambda h$, $\nu(h) = 1$ et pour toute fonction f de $C_u(\Sigma)$ telle que $\|fh^{-1}\|_\infty$,

$$\lambda^{-n} \mathcal{L}_\Phi^n f \longrightarrow h\nu(f)$$

uniformément sur les compacts de Σ . Il obtient aussi que si σ possède la propriété de “grandes branches” ($\inf(m(\sigma[a]) / a \in A) > 0$ pour toute mesure m dont le support est X), la convergence est uniforme sur Σ et exponentielle pour $f \in L$.

On peut montrer facilement que l’hypothèse (\mathbf{K}) et le fait que la mesure m soit conforme pour \mathcal{L}_Φ impliquent $(\mathbf{H-Sa})$. Le théorème F donne en plus une description du spectre périphérique de \mathcal{L}_Φ dans le cas où σ est irréductible. De plus, dans cette partie nous nous intéressons surtout au cas où σ ne possède pas la propriété de grandes branches.

2. Dans notre cas, la mesure conforme, m est connue. La condition de “faible contribution de l’infini” :

$$\exists n_0 \text{ tel que } \forall n > n_0, (\mathcal{L}_\Phi \mathbf{1})_n = \sup_{x \in [n]} \mathcal{L}_\Phi \mathbf{1}(x) \leq 1, \quad (\mathbf{H})$$

implique (\mathbf{K}) . En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(x) &= \sum_{\sigma^k z = x} \exp \left(\sum_{p=0}^{k-1} \Phi \circ \sigma^p z \right) \\ &= \sum_{\sigma^k z' = y} \exp \left(\sum_{p=0}^{k-1} \Phi \circ \sigma^p z - \Phi \circ \sigma^p z' \right) \exp \left(\sum_{p=0}^{k-1} \Phi \circ \sigma^p z' \right) \\ &\leq \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(y) \exp \left(\frac{d(x, y) K(\Phi)}{1 - r} \right). \end{aligned}$$

En particulier, $\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(x)$ est strictement positif pour tout $x \in \Sigma$ et $k \in \mathbb{N}$. De plus, il existe $C > 0$, tel que $\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(x) \leq \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(y)C$, en intégrant sur le cylindre $[n]$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(x) &\leq C \frac{1}{m([n])} \int_{[n]} \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1} dm \\ &\leq \frac{C}{m([n])} \int_\Sigma \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1} dm = \frac{C}{m([n])} \text{ (car } m \text{ est conforme).} \end{aligned}$$

Soient maintenant n_0 donné par la condition **(H)**, $n \leq n_0$ et $k \in \mathbb{N}$.

$$(\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1})_n \leq C \max_{p \leq n_0} \frac{1}{m([p])} : = M'.$$

Notons $M_k = \sup_{\Sigma} \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}$. Si $n > n_0$, on a pour $x \in [n]$, $\mathcal{L}_\Phi \mathbf{1}(x) \leq 1$ et

$$\mathcal{L}_\Phi^{k+1} \mathbf{1}(x) \leq \mathcal{L}_\Phi \mathbf{1}(x) \sup_{\Sigma} \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1} \leq \sup_{\Sigma} \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1} \leq \max M_k,$$

ainsi, $M_{k+1} \leq \max(M', M_k)$ et, par récurrence, $M_k \leq \max(M', 1)$. Ceci montre que Φ vérifie **(K)** : $\sup_k \sup_{\Sigma} \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1} \leq M : = \max(M', 1) < \infty$.

Le chapitre 5 est consacré à l'estimation de la vitesse de convergence dans (II) pour des observables de L , lorsque σ est apériodique. Sous la condition **(Exp1)**, page 73), l'opérateur est quasi-compact sur l'espace L et la technique employée peut donner une borne supérieure pour le module de la seconde valeur propre (théorème G, proposition 5.5). Les techniques développées s'adaptent pour estimer la décroissance des corrélations lorsque cette hypothèse n'est plus satisfaite.

Proposition 5.6 *Si (Σ, σ) est sans grandes branches à l'infini (définition page 82) et vérifie **(S-Exp1)** (définition page 83) alors, pour N et k suffisamment grands, il existe une suite $(\alpha_j(N))_{j \in \mathbb{N}}$, $\alpha_j(N) \rightarrow 0$ telle que $\forall f \in L$ et $\forall j \in \mathbb{N}$,*

$$\|\mathcal{L}_\Phi^{kj} f - h \int f\|_N \leq \alpha_j \|f\| + m(\llbracket 0, N \rrbracket^c) \sup f,$$

où $\llbracket 0, N \rrbracket$ désigne l'ensemble des x de Σ tels que $x_0 \leq N$ et $\|\cdot\|_N$ la norme uniforme sur $\llbracket 0, N \rrbracket$. La suite $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}$ peut être déterminée explicitement et dépend de la contribution à $\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}$ du complémentaire d'un nombre fini de cylindres.

En choisissant convenablement N par rapport à j , on obtient ainsi une estimation de la vitesse de convergence sur chaque compact de Σ et de la décroissance des corrélations.

Des exemples de systèmes vérifiant **(Exp1)** ou **(S-Exp1)** sont traités au chapitre 6. En particulier, on obtient des estimations effectives de la vitesse de mélange pour des applications à "petites branches" ne vérifiant pas les hypothèses de [Bre] ou [L, S, V1]. On estime aussi la décroissance des corrélations pour des applications non uniformément dilatantes de l'intervalle de type Gaspard-Wang sur un espace d'observables contenant les fonctions lipschitziennes (section 6.3).

Chapitre 4

Étude de l'opérateur de transfert.

Soit L l'espace des fonctions lipschitziennes sur Σ :

$$L = \{f \in C_u(\Sigma) / \exists K > 0 |f(x) - f(y)| \leq Kd(x, y) \forall x, y \in \Sigma\}.$$

Pour $f \in L$, sa constante de Lipschitz $K(f)$, est définie par

$$K(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf\{K > 0 / |f(x) - f(y)| \leq Kd(x, y) / x, y \in [n]\}.$$

Si C est un k -cylindre, $\mathbf{1}_C \in L$ et $K(\mathbf{1}_C) \leq \frac{1}{r^k - 1}$. Pour $f \in L$, soit $\|f\| = \max(K(f), \|f\|_\infty)$, $\|\cdot\|$ est une norme sur L qui en fait un espace de Banach. Nous supposons que Φ est lipschitzienne sur les 1-cylindres : il existe $C > 0$ tel que pour x et y dans un même 1-cylindre,

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq Cd(x, y)$$

nous noterons $K(\Phi)$ l'inf des $C > 0$ qui vérifie l'équation ci-dessus.

Dans ce chapitre, nous montrons le théorème F.

Théorème F *Si Φ est lipschitzienne sur les 1-cylindres, vérifie **(K)** et si σ est irréductible alors 1 est valeur propre simple de l'opérateur \mathcal{L}_Φ agissant sur L . La fonction propre associée h est strictement positive sur Σ . De plus, \mathcal{L}_Φ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres de module 1. Si σ est apériodique, 1 est la seule valeur propre de module maximal et on a la convergence :*

$$\mathcal{L}_\Phi^n f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h \int f dm, \tag{II}$$

uniformément sur les compacts de Σ et dans $L^1(m)$, pour $f \in C_u(\Sigma)$.

Dans tout ce qui suit, σ est supposé irréductible et Φ vérifie **(K)**. La preuve est décomposée en deux étapes. La première étape consiste à construire un point fixe h pour \mathcal{L}_Φ , il

est obtenu comme valeur d'adhérence de la suite $Q_n = 1/n \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}_\Phi^j \mathbf{1}$. L'irréductibilité de σ assure la positivité et l'unicité (à multiplication par une constante près) de h . On étudie ensuite le spectre périphérique de \mathcal{L}_Φ et on montre la convergence (II).

Remarque 4.1 Nous ne supposons pas, ici que Φ est bornée. L'hypothèse **(K)** implique que $\exp \Phi$ est bornée. En particulier, on peut avoir

$$\sup_{x \in [n]} \|\Phi(x)\|_\infty \rightarrow -\infty.$$

Nous utiliserons aussi la notation suivante : $g_k(x) = \exp(\sum_{i=0}^{k-1} \Phi \circ \sigma^i x)$, ainsi $\mathcal{L}_\Phi^k f$ s'écrit

$$\mathcal{L}_\Phi^k f(x) = \sum_{\sigma^k x' = x} \exp\left(\sum_{i=0}^{k-1} \Phi \circ \sigma^i x'\right) f(x') = \sum_{\sigma^k x' = x} g_k(x') f(x').$$

Par ailleurs, la propriété de Markov implique qu'étant donnés x et y dans un même 1-cylindre, k un entier, il existe une bijection entre les antécédents par σ^k de x et ceux de y ; si x' est un antécédent de x , nous noterons y' l'antécédent de y qui appartient au même k -cylindre que x' .

4.1 Construction d'un point fixe pour l'opérateur de transfert.

Le lemme suivant précise l'action de \mathcal{L}_Φ sur L . Rappelons que M est la constante donnée par l'hypothèse **(K)** : $\|\mathcal{L}_\Phi^n \mathbf{1}\|_\infty \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Lemme 4.1 *Il existe $R > 0$ tel que pour $f \in L$, $K(\mathcal{L}_\Phi^k f) \leq Mr^k K(f) + \sup |f| R$, en particulier la suite $(\mathcal{L}_\Phi^k f)_{k \in \mathbb{N}}$ est équicontinue et bornée.*

Preuve : Soient x et y appartenant au même 1-cylindre $[n]$. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(x) &= \sum_{\sigma^k z = x} \exp\left(\sum_{p=0}^{k-1} \Phi \circ \sigma^p z\right) \\ &= \sum_{\sigma^k z' = y} \exp\left(\sum_{p=0}^{k-1} \Phi \circ \sigma^p z - \Phi \circ \sigma^p z'\right) \exp\left(\sum_{p=0}^{k-1} \Phi \circ \sigma^p z'\right) \\ &\leq \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(y) \exp\left(\frac{d(x, y)K(\Phi)}{1-r}\right). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ainsi, $\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(x)$ est strictement positif pour tout $x \in \Sigma$ et $k \in \mathbb{N}$. Prenons x et y dans un même 1-cylindre $[n]$, (4.1) permet d'établir :

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(x) - \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(y)| &= \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(x) \left| 1 - \frac{\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(y)}{\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(x)} \right| \\ &\leq M |1 - e^{Cd(x,y)}|. \end{aligned}$$

Pour f dans L , on a alors :

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_\Phi^k f(x) - \mathcal{L}_\Phi^k f(y)| &= \left| \sum_{\sigma^k z=x} g_k(z)f(z) - g_k(z')f(z') \right| \\ &\leq \sum_{\sigma^k z=x} g_k(z)|f(z) - f(z')| + \sum_{\sigma^k z=x} |g_k(z) - g_k(z')| |f(z')| \\ &\leq \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(x) r^k K(f) d(x, y) + \sup |f| |\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(x) - \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(y)| \\ &\leq Mr^k d(x, y) K(f) + \sup |f| M |1 - e^{Cd(x,y)}| \\ &\leq Mr^k d(x, y) K(f) + R \sup |f| d(x, y). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ceci termine la preuve du lemme. □

Pour $f \in C_u(\Sigma)$, on définit :

$$Q_n f = 1/n \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}_\Phi^i f.$$

Le lemme 4.1 permet de construire la densité invariante.

Proposition 4.2 *L'opérateur \mathcal{L}_Φ admet un unique (à une constante multiplicative près) point fixe $h \in L$ strictement positif. De plus, pour toute fonction $f \in C_u(\Sigma)$, on a :*

$$Q_n f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h \int f dm,$$

uniformément sur les compacts de Σ et dans $L^1(m)$.

Preuve : Considérons la suite $Q_n \mathbf{1} = 1/n \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}_\Phi^j \mathbf{1}$, elle est bornée et équicontinue par le lemme 4.1. Comme Σ est séparable, le théorème d'Ascoli implique qu'il existe une sous-suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $(Q_{n_k} \mathbf{1})_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur chaque compact de Σ . La suite $Q_n \mathbf{1}$ étant bornée, le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que la convergence a aussi lieu dans $L^1(m)$. Notons h la limite, h est bornée (par M) et positive. De plus, en procédant comme pour montrer (4.2), on obtient pour x et y dans un même 1-cylindre,

$$|Q_n \mathbf{1}(x) - Q_n \mathbf{1}(y)| \leq R d(x, y),$$

ainsi, h est lipschitzienne sur chaque 1-cylindre, comme h est bornée, h appartient à L . D'autre part, la suite $Q_n \mathbf{1}$ étant bornée, le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que la convergence a aussi lieu dans $L^1(m)$. Ceci et le fait que m est une mesure conforme impliquent que $\int h dm = 1$, en particulier, $h \neq 0$. Vérifions que $\mathcal{L}_\Phi h = h$. La convergence de $Q_{n_k} \mathbf{1}$ vers h ayant lieu dans $L^1(m)$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int |\mathcal{L}_\Phi h(x) - h(x)| dm &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \int |1 - \mathcal{L}_\Phi^{n_k} \mathbf{1}(x)| dm \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 + M}{n_k} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{L}_\Phi h = h$ dans $L^1(m)$, comme de plus, h est continue et le support de m est Σ , $\mathcal{L}_\Phi h(x) = h(x)$ pour tout $x \in \Sigma$ et h est bien un point fixe de \mathcal{L}_Φ . Nous allons maintenant montrer que h est le seul point fixe continu de \mathcal{L}_Φ d'intégrale 1. Pour cela nous montrons le résultat suivant.

Lemme 4.3 1. *Un point fixe continu et positif pour \mathcal{L}_Φ est soit nul, soit strictement positif.*

2. *Si $k : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ est un point fixe de \mathcal{L}_Φ , il en va de même de sa partie positive et de sa partie négative.*

Ainsi, un point fixe continu à valeur réelles de \mathcal{L}_Φ est soit strictement positif, soit strictement négatif.

Preuve : Montrons le point 1. Soit k un point fixe positif et continu de \mathcal{L}_Φ , supposons que k s'annule en un point x . On a

$$\mathcal{L}_\Phi^n k(x) = \sum_{\sigma^n y = x} g(y) k(y) = k(x) = 0.$$

Ainsi, $k(y) = 0$ pour tout y appartenant à $\{z / \sigma^n z = x, n \in \mathbb{N}\}$ or, l'irréductibilité de σ implique que cet ensemble est dense dans Σ , k étant supposée continue, on en déduit que $k \equiv 0$.

Montrons le point 2. On écrit $k = k^+ - k^-$, l'opérateur \mathcal{L}_Φ étant un opérateur positif, on a $\mathcal{L}_\Phi(k^\varepsilon) \geq k^\varepsilon$, $\varepsilon = +$ ou $\varepsilon = -$; m étant une mesure conforme, $\int \mathcal{L}_\Phi k^\varepsilon dm = \int k^\varepsilon dm$, ainsi l'inégalité ne peut pas être stricte sur un ensemble de m -mesure strictement positive, c'est-à-dire que $\mathcal{L}_\Phi k^\varepsilon = k^\varepsilon$ m presque partout. La continuité de k^ε et le fait que support de m soit Σ impliquent que k^ε est un point fixe pour \mathcal{L}_Φ . \square

Soit maintenant $k \in C(\Sigma)$ non identiquement nulle telle que $\mathcal{L}_\Phi k = k$, en séparant partie réelle et partie imaginaire, on peut supposer que k est réelle, montrons $k = \alpha h$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Par le lemme 4.3, h est strictement positive. Soient $x \in \Sigma$, tel que $k(x) \neq 0$ et $\alpha = \frac{k(x)}{h(x)}$. Soit $f = \alpha h - k$, f est un point fixe pour \mathcal{L}_Φ qui s'annule en x , par le lemme 4.3, f est alors identiquement nulle, finalement, $k = \alpha h$ et 1 est une valeur propre simple.

Montrons la seconde partie de la proposition. Soit f une fonction de L . Par le lemme 4.1, la suite $(Q_n f)_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinue et bornée. Soit h_f une valeur d'adhérence (au sens de la convergence uniforme sur les compacts et de la convergence dans L^1). Les mêmes arguments que ceux utilisés pour montrer que $\mathcal{L}_\Phi h = h$ montrent que h_f est un point fixe de \mathcal{L}_Φ . 1 étant une valeur propre simple, h_f est proportionnelle à h ; en utilisant que m est une mesure conforme, on obtient $h_f = h \int f dm$. Ainsi, la seule valeur d'adhérence de $Q_n f$ est $h \int f dm$ et donc $Q_n f$ converge vers $h \int f dm$ uniformément sur les compacts de Σ et dans $L^1(m)$. \square

4.2 Spectre périphérique et convergence des itérés de \mathcal{L}_Φ .

Nous allons maintenant étudier le spectre ponctuel périphérique **spp** de \mathcal{L}_Φ , c'est-à-dire, l'ensemble des valeurs propres de module 1. Dans le cas où σ est apériodique, **spp** = {1} et pour $f \in L$, $\mathcal{L}_\Phi^n f$ converge vers $h \int f dm$ uniformément sur les compacts de Σ et dans $L^1(m)$.

Le résultat suivant est classique pour des opérateurs quasi-compacts sur un espace de Banach ([H, K], [B, K]). La preuve de la proposition suivante suit certaines idées utilisées par A. Broise ([Bro]) dans un cadre où l'opérateur de transfert est quasi-compact sur l'espace des fonctions à variation bornée.

Proposition 4.4 *L'opérateur \mathcal{L}_Φ agissant sur L n'a qu'un nombre fini de valeurs propres de module 1, elles forment un sous-groupe cyclique du groupe des racines de l'unité. Ces valeurs propres sont toutes simples et si σ est apériodique, 1 est la seule valeur propre de module 1.*

Preuve : Soit λ une valeur propre de module 1 de \mathcal{L}_Φ , soit $g \in L$ une fonction propre associée. $|g|$ est un point fixe de \mathcal{L}_Φ . En effet, $\mathcal{L}_\Phi g = \lambda g$ donc $|\mathcal{L}_\Phi g| = |g|$, comme \mathcal{L}_Φ est un opérateur positif, $|g| = |\mathcal{L}_\Phi g| \leq \mathcal{L}_\Phi |g|$, ceci implique $|g| = \mathcal{L}_\Phi |g|$ en utilisant que m est une mesure conforme dont le support est Σ et la continuité de $|g|$. Comme 1 est une valeur propre simple de \mathcal{L}_Φ , $|g| = ah$, où a est une constante positive que l'on peut toujours supposer égale à 1. Ainsi, il existe une fonction α sur Σ à valeur dans \mathbf{S}^1 , telle que $g = \alpha h$. Montrons que λ est racine de l'unité. Soient $k \in \mathbb{N}$, $x \in \Sigma$,

$$\mathcal{L}_\Phi^k g(x) = \lambda^k \alpha(x) h(x) = \sum_{\sigma^k z = x} g_k(z) \alpha(z) h(z).$$

Or $|g_k(z) \alpha(z) h(z)| = g_k(z) h(z)$ et $\sum_{\sigma^k z = x} g_k(z) h(z) = h(x)$, on a donc pour $z \in \sigma^{-k} \{x\}$, $\alpha(z) = \lambda^k \alpha(x)$. Pour $x = x_0$ un point périodique de σ de période k_0 , nous obtenons $\lambda^{k_0} = 1$.

Rappelons la définition de la *période* de σ ([Se]). Pour un 1-cylindre $[n]$, notons \mathcal{P}_n l'ensemble des périodes de $[n]$, c'est-à-dire,

$$\mathcal{P}_n = \{k \in \mathbb{N} / \exists x \in [n] / x \text{ est périodique de période } k\}.$$

La période p de σ est le pgcd des éléments de \mathcal{P}_n (elle ne dépend pas de n par irréductibilité).

Ainsi, les valeurs propres de module 1 de \mathcal{L}_Φ sont de la forme β^l avec β racine p -ème de l'unité et \mathcal{L}_Φ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres de module 1 qui forment un sous-groupe cyclique du groupe des racines de l'unité.

Soit λ une valeur propre de module 1 de \mathcal{L}_Φ , montrons que λ est simple. Si g est une fonction propre associée, g s'écrit $g = \alpha h$ avec α une fonction de module 1. Notons P l'opérateur normalisé $Pf = h^{-1} \mathcal{L}_\Phi(fh)$, α est une fonction propre associée à λ pour P . Sur l'espace de Hilbert $L^2(hdm)$, P/λ est une contraction (au sens large) dont l'adjoint est $f \mapsto \lambda f \circ \sigma$, en effet, soient $f_1, f_2 \in L^2(hdm)$,

$$\begin{aligned} \int \frac{P}{\lambda}(f_1) \overline{f_2} h dm &= \int \frac{\mathcal{L}_\Phi(f_1 h)}{\lambda} \overline{f_2} dm \\ &= \int f_1 h \frac{\overline{f_2} \circ \sigma}{\lambda} dm \text{ car } m \text{ est conforme} \\ &= \int f_1 \overline{\lambda f_2 \circ \sigma} dm. \end{aligned}$$

Dans un Hilbert, les points fixes d'une contraction et ceux de son adjoint coïncident, ainsi dans $L^2(hdm)$, $\lambda \alpha \circ \sigma = \alpha$. Si g_1 est une autre fonction propre de \mathcal{L}_Φ associée à λ , g_1

s'écrit $g_1 = \alpha_1 h$ avec α_1 une fonction à valeur dans \mathbf{S}^1 . Comme ci-dessus, on obtient $\lambda \alpha_1 \circ \sigma = \alpha_1$, d'où $\frac{\alpha}{\alpha_1} \circ \sigma = \frac{\alpha}{\alpha_1}$. Finalement, on a $\frac{\alpha}{\alpha_1} h = \mathcal{L}_\Phi(\frac{\alpha}{\alpha_1} \circ \sigma h) = \mathcal{L}_\Phi(\frac{\alpha}{\alpha_1} h)$; 1 étant une valeur propre simple, ceci implique que $\frac{\alpha}{\alpha_1}$ est constante et ainsi, λ est une valeur propre simple.

Finalement, si g est une fonction propre associée à λ racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité, g s'écrit $g = \alpha h$ avec $\alpha : \Sigma \mapsto \mathbf{S}^1$ et $\lambda \alpha \circ \sigma = \alpha$. On a aussi, $\lambda^2 \alpha^2 \circ \sigma = \alpha^2, \dots, \lambda^p \alpha^p \circ \sigma = \alpha^p$. Ainsi,

- $g_2 = \alpha^2 h$ est une fonction propre associée à λ^2 ,
- ⋮
- $g_p = \alpha^p h$ est une fonction propre associée à $\lambda^p = 1$, en particulier, $\alpha^p \equiv 1$ et les fonctions propres associées aux valeurs propres de module 1 sont (à multiplication par une constante près) $h, \alpha h, \dots, \alpha^{p-1} h$.

Le fait que 1 soit la seule valeur propre de module 1 lorsque σ est apériodique se déduit directement de la preuve ci-dessus. En effet, dans ce cas, la période de σ est 1 (voir [Se]).
□

Dans toute la suite, nous supposerons que σ est apériodique. Pour λ un nombre complexe de module 1 et $f \in C_u(\Sigma)$, on note

$$Q_{n,\lambda} f = 1/n \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{-i} \mathcal{L}_\Phi^i f.$$

Le lemme suivant constitue la première étape de la démonstration de la convergence des itérés de \mathcal{L}_Φ .

Lemme 4.5 [Convergence des moyennes d'Abel.] *Pour $f \in L$, les suites $Q_{n,\lambda} f$ convergent vers 0 si $\lambda \neq 1$. Cette convergence a lieu dans L^1 et est uniforme sur les compacts de Σ .*

Preuve : Soient $f \in L$ et $\lambda \in \mathbf{S}^1$. D'après le lemme 4.1, la suite $Q_{n,\lambda} f$ est équicontinue et bornée. Elle est donc relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de Σ . Soit g une valeur d'adhérence de cette suite, le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 4.2 montre que g vérifie $\mathcal{L}_\Phi g = \lambda g$. Ainsi, par la proposition 4.4, g est nulle si $\lambda \neq 1$. □

La fin de la preuve du théorème F (convergence des itérés $\mathcal{L}_\Phi^k f$ vers l'opérateur de projection $\Pi(f) = h \int f dm$) reprend les idées de l'article de A. Raugi [Ra] concernant les opérateurs markoviens agissant sur les fonctions continues d'un espace métrique compact. Nous utiliserons en particulier la proposition suivante sur les suites presque périodiques de $\ell^\infty(\mathbb{R}) = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} / \sup_n |u_n| < \infty\}$. Nous noterons ∂ le décalage sur $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

Proposition 4.6 *Soit $u \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant les deux propriétés suivantes :*

1. *L'orbite $\mathcal{O}(u) = \{\partial^n u, n \in \mathbb{Z}\}$ de u sous le décalage est relativement compacte (la suite u est alors dite presque périodique).*

2. *Pour tout λ de module 1, les moyennes d'Abel $1/n \sum_{i=0}^{n-1} u_i \lambda^i$ convergent vers zéro.*

Alors la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est identiquement nulle.

Ce résultat repose sur des techniques classiques d'analyse de Fourier sur les groupes abéliens compacts, la preuve donnée ici est celle d'A. Raugi ([Ra]).

Preuve : Notons X l'adhérence dans $\ell^\infty(\mathbb{R})$ de l'orbite de u sous le décalage ∂ , ∂ est une isométrie de X . Soit G le sous-groupe des isométries de X engendré par ∂ et \widehat{G} le groupe des caractères de G . G est un groupe abélien compact, \widehat{G} est donc dénombrable. Soit m_G la mesure de Haar de G . Tout élément f de $L^2(G, m_G)$ s'écrit comme la somme de sa série de Fourier (voir par exemple W. Rudin [Rud]) :

$$f = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \chi^{-1} \text{ avec } \widehat{f}(\chi) = \int_G f(g) \chi(g) dm_G(g).$$

La suite de probabilités $1/n \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\partial^k}$ sur G converge faiblement vers m_G (car toute valeur d'adhérence de cette suite est invariante par les translations de G). Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(v) = v_0$, considérons la fonction de $L^2(G, m_G)$, $\tilde{f}(g) = f(gu)$. Pour $\chi \in \widehat{G}$, il existe $\lambda \in \mathbf{S}^1$ tel que $\chi(\partial^n) = \lambda^n$, la transformée de Fourier \widehat{f} de \tilde{f} s'écrit :

$$\widehat{f}(\chi) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{f}(\partial^k) \chi(\partial^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \sum_{k=0}^{n-1} u_k \lambda^k,$$

la condition 2. implique alors que la transformée de Fourier de \tilde{f} est nulle, donc \widehat{f} aussi. Par conséquent, u est identiquement nulle. \square

Fin de la preuve du théorème F : Soit $f \in L$, par le lemme 4.1, la suite $(\mathcal{L}_\Phi^n f)$ est équicontinue et bornée. Soit $\varphi(n)$ une sous-suite telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_\Phi^{\varphi(n)-k} f$ converge (uniformément sur les compacts de Σ et dans L^1) vers une limite notée h_k (la suite $(\varphi(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est obtenue par un procédé diagonal. La suite h_k vérifie $\int h_k dm = \int f dm$ pour tout k et $\mathcal{L}_\Phi h_k = h_{k-1}$, soit $h_{-k} = \mathcal{L}_\Phi^k h_0$, pour $k \in \mathbb{N}$, on obtient ainsi une suite $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifiant $\mathcal{L}_\Phi^p h_n = h_{n-p}$, $p \in \mathbb{N}$. Nous allons montrer que $h_p = h \int f dm$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, ce qui terminera la preuve.

Soit $\lambda \in \mathbf{S}^1$, d'après le lemme 4.5, la suite $Q_{n,\lambda} h_p$ converge vers 0 si $\lambda \neq 1$, vers $h \int f dm$ si $\lambda = 1$. Pour $g \in L^2(\Sigma, m)$ orthogonal à h , pour tout $\lambda \in \mathbf{S}^1$, on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k m(g \mathcal{L}_\Phi^k h_p) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(g Q_{n,\lambda} h_p) = 0.$$

Pour g bornée, nous allons montrer que la suite $(m(g h_{p-k}))_{k \in \mathbb{Z}}$ est presque périodique. La démonstration du lemme 4.1 montre que la suite $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est équicontinue et bornée (il résulte de (4.2) que chaque h_k est lipschitzienne et que les constantes de Lipschitz $K(h_k)$ sont uniformément bornées en k). Soit n_k une sous-suite telle que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, h_{n_k-p} converge vers une limite notée h_p^* . Cette convergence est uniforme sur les compacts de Σ et par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, elle a lieu dans $L^1(m)$. De plus, pour $p \in \mathbb{N}$, $h_{n_k-p} = \mathcal{L}_\Phi^p h_{n_k}$, on a donc $h_p^* = \mathcal{L}_\Phi^p h_0^*$. Comme $\|\mathcal{L}_\Phi^p \mathbf{1}\| \leq M$, la convergence de $m(h_{n_k-p} g)$ vers $m(h_p^* g)$ est uniforme en p , $p \in \mathbb{N}$. Montrons que $m(g h_{n_k-p})$ converge vers $m(g h_p^*)$, uniformément en p pour $p \in \mathbb{Z}^-$. Soit $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left| \int g(h_{n_k+p} - h_{-p}^*) dm \right| &= \left| \int \mathcal{L}_\Phi^p (g(h_{n_k+p} - h_{-p}^*)) dm \right| \text{ par invariance de } m, \\ &\leq \sup |g| \int |\mathcal{L}_\Phi^p (h_{n_k+p} - h_{-p}^*)| \\ &= \sup |g| \int |h_{n_k} - h_0^*| dm. \end{aligned}$$

Ceci montre que la convergence est uniforme en p et par conséquent, la suite $u = (m(h_{p-k} g))_{p \in \mathbb{Z}}$ est presque périodique. La proposition 4.6 implique alors que $m(h_p g) = 0 \forall p \in \mathbb{Z}$ pour g bornée et orthogonale à h dans $L^2(\Sigma, m)$. La densité des fonctions bornées dans $L^2(\Sigma, m)$ permet de montrer que $m(h_p g) = 0$, $\forall p \in \mathbb{Z}$, pour toute fonction g orthogonale à h . Ainsi, on a $h_p = c_p h$, $c_p \in \mathbb{R}$, en intégrant on obtient $c_p = \int f dm$. Finalement,

pour toute fonction $f \in L$, $\mathcal{L}_{\Phi}^k f$ converge vers $h \int f dm$ uniformément sur les compacts de Σ et dans $L^1(m)$. Par densité des fonctions de L dans $C_u(\Sigma)$, cette convergence a lieu pour $f \in C_u(\Sigma)$, ceci termine la preuve du théorème F. \square

Remarque 4.2 Lorsque σ est seulement irréductible, pour f dans $C_u(\Sigma)$, $\mathcal{L}_{\Phi}^n f$ converge vers $\Pi(f)$ où Π est la projection dans L^2 sur l'espace vectoriel engendré par les fonctions propres $h, \alpha h, \dots, \alpha^{\ell-1} h$.

Chapitre 5

Vitesse de convergence.

L'objet de ce chapitre est d'obtenir une estimation de la vitesse de convergence, lorsque σ est apériodique, dans (II) pour des observables de L . Dans un premier temps, sous l'hypothèse suivante sur Φ ,

$$\exists k_1, \exists n_1 \text{ tels que } \forall k > k_1, \exists \rho_k < 1 \text{ tel que } \forall n > n_1, \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}_n \leq \rho_k, \quad (\mathbf{Exp1})$$

nous montrerons que cette convergence est uniforme sur Σ et la vitesse est exponentielle. Remarquons que **(Exp1)** implique **(K)**, ainsi les résultats du chapitre 4 s'appliquent. Lorsque **(Exp1)** n'est pas satisfaite, une estimation de la vitesse est néanmoins possible pour des applications "sans grandes branches à l'infini" (définition page 82), elle dépend de la convergence à zéro des produits : $\prod_{j=1}^m \delta'_{k,j}$ où

$$\delta'_{k,j} = \sup\{\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(x) / x \in [n], N \leq n \leq N + kKj\}$$

pour $k \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$ et $K \in \mathbb{N}$ fixés.

Fixons tout d'abord quelques définitions et notations.

Lorsque s et t sont fixés, nous noterons $\mathcal{P}_{s,t}$ la partition finie de Σ définie par

- $\mathcal{P}_{s,t} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$
- \mathcal{P}_1 est la partition en s -cylindres de l'ensemble $\llbracket 0, t \rrbracket = \{x \in \Sigma / x_0 \leq t\}$.
- $\mathcal{P}_2 = \{\llbracket 0, t \rrbracket^c\} : = \{P_2\}$.

Par ailleurs, D_1 désignera le diamètre, pour la distance d , de \mathcal{P}_1 :

$$D_1 = \max\{\text{diam}(P), P \in \mathcal{P}_1\} = r^s,$$

et D_2 la mesure de \mathcal{P}_2 :

$$D_2 = m(\llbracket 0, t \rrbracket^c).$$

La mesure m étant finie sur Σ , D_2 peut être choisit aussi petit que l'on veut à condition que t soit assez grand.

Nous utiliserons de nouveau la convention suivante : $x = y \pm z$ signifie $y - z \leq x \leq y + z$.

5.1 Convergence exponentielle.

Dans cette section, nous supposons que **(Exp1)** est vérifiée, **(Exp1)** implique **(K)**. Dans toute la suite, nous noterons $\mu = hm$ où h est le point fixe de \mathcal{L}_Φ donné par le théorème F. Remarquons que h est bornée par $M = \sup_k \|\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}\|_\infty$ et h vérifie $\int h dm = 1$, la mesure μ est donc une probabilité sur Σ et pour $A \in \mathcal{F}$, $\frac{\mu(A)}{m(A)} \leq M$. La mesure μ est clairement invariante par σ . Pour f telle que $fh \in C_u(\Sigma)$, par le théorème F les itérés de $\mathcal{L}_\Phi(fh)$ convergent vers $h\mu(f)$ dans $L^1(m)$ par le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Ceci implique la propriété de mélange :

$$\forall A \in \mathcal{F}, g = \mathbf{1}_A, \forall f \text{ tel que } fh \in C_u(\Sigma), |\mu(g \circ \sigma^n f) - \mu(g)\mu(f)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En effet, soient $g = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{F}$ et f tel que $fh \in C_u(\Sigma)$,

$$\begin{aligned} |\mu(g \circ \sigma^n f) - \mu(g)\mu(f)| &= \left| \int g[\mathcal{L}_\Phi^n(fh) - hm(fh)] d\mu \right| \\ &\leq \|\mathcal{L}_\Phi^n(fh) - hm(fh)\|_1. \end{aligned}$$

De même, pour $f \in C_u(\Sigma)$, les itérés de $\mathcal{L}_\Phi(f)$ convergent vers $hm(f)$ dans $L^1(m)$, ceci implique la propriété de mélange suivante qui sera utile pour estimer la vitesse de convergence pour des observables dans L .

$$\forall A \in \mathcal{F}, g = \mathbf{1}_A, \forall f \in C_u(\Sigma), |m(g \circ \sigma^n f) - \mu(g)m(f)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (5.1)$$

Soient α et α' tels que $\alpha < 1 < \alpha'$. La partition $\mathcal{P}_{s,t}$ étant finie le mélange (5.1) implique qu'il existe un entier k_0 tel que :

$$\forall k \geq k_0, \forall P, P' \in \mathcal{P}_{s,t}, \alpha \leq \frac{m(\sigma^{-k}P \cap P')}{\mu(P)m(P')} \leq \alpha'. \quad (5.2)$$

Les techniques de cônes et métriques projectives permettent de montrer le résultat suivant.

Théorème G Si Φ vérifie **(Exp1)** alors, il existe $0 < \kappa < 1$, $C > 0$ tels que :

$$\forall f \in L, \|\mathcal{L}_\Phi^n f - h \int f dm\|_\infty \leq C \kappa^n \|f\|. \quad (\text{III})$$

Pour montrer le théorème G, on adapte les cônes utilisés dans le chapitre 2 en tenant compte du fait que l'alphabet n'est pas fini.

5.1.1 Une famille de cônes.

Considérons la famille de cônes suivante. Étant donnés a, b, c des réels positifs, s, t des entiers et $\mathcal{P}_{s,t}$ la partition associée, $C_{a,b,c}^{s,t}$ est l'ensemble des fonctions de L qui vérifient :

- $\forall P \in \mathcal{P}_{s,t}, 0 < \frac{1}{\mu(P)} \int_P f dm \leq a \int f dm,$
- $K(f) \leq b \int f dm,$
- $\sup_{x \in P_2} |f(x)| \leq c \int f dm.$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïtés, on notera C ou $C_{a,b,c}$ pour $C_{a,b,c}^{s,t}$. Les propriétés suivantes découlent directement de la définition de C :

- $C \cap -C = \emptyset,$
- C est un cône convexe,
- C est fermé pour la topologie de la norme uniforme.

Afin d'utiliser ces cônes et leur métrique projective, nous avons besoin d'une norme adaptée. Étant donné $d > 0$, considérons la norme

$$\|f\|_d = \max(d \left| \int f dm \right|, \left| \frac{\int f dm}{m(P)} \right| \mid P \in \mathcal{P}_{s,t}, \|f\|_\infty).$$

Remarquons que pour tout d , la norme $\|\cdot\|_d$ est équivalente à la norme uniforme sur Σ .

Lemme 5.1 Si $d \geq \max(bD_1, c)$ alors la norme $\|\cdot\|_d$ est adaptée au cône C au sens du chapitre 1.

Preuve : Toute fonction φ de L vérifie : (il suffit de procéder comme dans le chapitre 2, (2.3))

$$\forall P \in \mathcal{P}_1, \forall x \in P, \frac{1}{m(P)} \int_P \varphi dm - K(\varphi)D_1 \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{m(P)} \int_P \varphi dm + K(\varphi)D_1. \quad (5.3)$$

Ainsi, si f et g sont telles que $f + g$ et $f - g$ appartiennent à C , pour $x \in P$, $P \in \mathcal{P}_1$,

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{1}{m(P)} \int (f - g)dm \pm bD_1 \int (f - g)dm, \\ f(x) + g(x) &= \frac{1}{m(P)} \int (f + g)dm \pm bD_1 \int (f + g)dm. \end{aligned}$$

Ceci donne, en soustrayant les deux inéquations,

$$|g(x)| \leq \max(1/m(P) \left| \int_P gdm \right|, bD_1 \int f dm).$$

Or $f - g \in C$ et $f + g \in C$, implique $\left| \int_P gdm \right| \leq \int_P f dm$ pour tout $P \in \mathcal{P}_{s,t}$. Ainsi, pour $x \in \mathcal{P}_1$, $|g(x)| \leq \|f\|_d$ si $d \geq bD_1$. D'autre part, si $x \in P_2$, l'inégalité $|g(x)| \leq c \int f dm$ s'obtient de la même manière. On a aussi $\left| \int_P gdm \right| \leq \int f dm$. Ainsi, pour $d = \max(bD_1, c)$, on a $\|g\|_d \leq \|f\|_d$. \square

5.1.2 Contraction du cône.

Nous allons montrer que le cône $C_{a,b,c}^{s,t}$ est strictement contracté par \mathcal{L}_{Φ}^k pour k, a, b, c, s et t assez grands.

Lemme 5.2 *Il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $s \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{N}^*$ et $0 < \gamma < 1$ tels que*

$$\mathcal{L}_{\Phi}^k C_{a,b,c}^{s,t} \subseteq C_{\gamma a, \gamma b, \gamma c}^{s,t}.$$

Preuve : Fixons $\alpha < 1 < \alpha'$ et $\beta' < \beta < 1$. Les paramètres a, b, c, s et t sont choisis de la façon suivante :

1. $a > \alpha'(1 + \frac{\alpha}{2\alpha'})\beta^{-1}$,
2. $c \geq Ma + 1$,

$$3. b > \frac{Rc}{\beta - \beta'},$$

$$4. D_1 < 1/b \frac{\alpha}{4\alpha'},$$

$$5. t \text{ tel que } t \geq n_1 \text{ et } D_2 < \frac{\alpha}{8\alpha'c}.$$

Soit, de plus, k_0 vérifiant (**Exp1**), tel que (5.2) soit vérifiée pour α et α' et $\forall k > k_0$, $Mr^k < \beta'$. Fixons $k > k_0$. Soient $\gamma = \max(\beta, \rho_k) < 1$. et $f \in C_{a,b,c}^{s,t}$. Pour $P \in \mathcal{P}_1$, $x \in P$, (5.3) donne

$$f(x) = \frac{1}{m(P)} \int_P f dm \pm K(f)D_1, \quad (5.4)$$

et pour x et $y \in P_2$, $-2 \sup_{P_2} |f| \leq f(x) - f(y) \leq 2 \sup_{P_2} |f|$, ainsi en intégrant sur P_2 et y , on obtient

$$f(x) = \frac{1}{m(P_2)} \int_{P_2} f dm \pm 2 \sup_{P_2} |f|. \quad (5.5)$$

Soit $P \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(P)} \int_P \mathcal{L}_\Phi^k f dm &= \frac{1}{\mu(P)} \int_{\sigma^{-k}P} f dm \\ &= \frac{1}{\mu(P)} \sum_{P' \in \mathcal{P}_{s,t}} \int_{\sigma^{-k}P \cap P'} f dm, \end{aligned}$$

en utilisant (5.4) et (5.5),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(P)} \int_P \mathcal{L}_\Phi^k f dm &= \sum_{P' \in \mathcal{P}_{s,t}} \frac{m(\sigma^{-k}P \cap P')}{m(P')\mu(P)} \int_{P'} f dm \pm \\ &\left(D_1 K(f) \sum_{P' \in \mathcal{P}_1} \frac{m(\sigma^{-k}P \cap P')}{m(P')\mu(P)} m(P') + 2 \frac{m(\sigma^{-k}P \cap P_2)}{m(P_2)\mu(P)} m(P_2) \sup_{P_2} |f| \right). \end{aligned}$$

Comme f appartient à $C_{a,b,c}^{s,t}$, ceci entraîne (en utilisant (5.2)) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(P)} \int_P \mathcal{L}_\Phi^k f dm &\leq \alpha' \int f dm [1 + D_1 b + 2D_2 c] \text{ et} \\ \frac{1}{\mu(P)} \int_P \mathcal{L}_\Phi^k f dm &\geq [\alpha - \alpha'(D_1 b + 2D_2 c)] \int f dm, \end{aligned}$$

ceci conduit, par les choix (4. et 5.) de a, b, c et $\mathcal{P}_{s,t}$ à

$$\alpha/2 \int f dm \leq \frac{1}{\mu(P)} \int_P \mathcal{L}_\Phi^k f dm \leq \alpha'(1 + \alpha/(2\alpha')) \int f dm. \quad (5.6)$$

Remarque 5.1 Pour $\varphi \in C_{a,b,c}^{s,t}$, les inégalités (5.4) et (5.5) montrent pour tout $x \in \Sigma$,

$$\min[-c, Ma - bD_1] \int \varphi dm \leq \varphi(x) \leq \max[c, Ma + bD_1] \int \varphi dm.$$

Rappelons l'inégalité (4.2) :

$$K(\mathcal{L}_\Phi^k f) \leq Mr^k K(f) + R \sup |f|.$$

Celle-ci implique en utilisant la remarque 5.1 et la définition du cône,

$$K(\mathcal{L}_\Phi^k f) \leq \int f dm [bMr^k + R \max(c, Ma + bD_1)]$$

et par les choix 2. et 4. ci-dessus :

$$K(\mathcal{L}_\Phi^k f) \leq \beta' b \int f dm + cR \int f dm, \quad (5.7)$$

ainsi, $K(\mathcal{L}_\Phi^k f) \leq \beta b \int f dm$ si $b > \frac{cR}{\beta - \beta'}$ (c'est-à-dire 3.).

En outre, pour $x \in P_2$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_\Phi^k f(x)| &= \left| \sum_{x' \in P_2} g_k(x') f(x') + \sum_{x' \notin P_2} g_k(x') f(x') \right| \\ &\quad (\text{en utilisant (5.4)}), \\ &\leq c \int f dm \sum_{x' \in P_2} g_k(x') + (Ma + bD_1) \int f dm \sum_{x' \notin P_2} g_k(x'), \\ &\leq \max(c, Ma + bD_1) \int f dm [\sup_{x \in P_2} \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(x)], \\ &\leq \rho_k c \int f, \text{ par les choix 2., 4. et 5. ci-dessus et l'hypothèse (Exp1),} \end{aligned}$$

ceci termine la preuve du lemme. □

Afin d'obtenir la vitesse de convergence des itérés de l'opérateur, il reste à estimer le diamètre projectif de $\mathcal{L}_\Phi^k(C)$ dans C .

5.1.3 Calcul du diamètre projectif et conclusion.

Lemme 5.3 *Le diamètre projectif de $\mathcal{L}_\Phi^k C$ dans C est majoré par $2 \log \max\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}, \frac{2\alpha'+\alpha}{\alpha}\right)$.*

Preuve : Soient f et g appartenant à $\mathcal{L}_{\Phi}^k C$ et $\eta > 0$ tel que $\eta f - g$ appartienne à C , η doit vérifier :

1. $\forall P \in \mathcal{P}_{s,t}, 0 \leq \frac{\eta}{\mu(P)} \int_P f dm - \frac{1}{\mu(P)} \int_P g dm \leq a\eta \int f dm - a \int g dm,$

2. pour x et y dans un même 1-cylindre,

$$\begin{aligned} -b\eta \int f dm + b \int g dm &\leq \frac{\eta(f(x) - f(y)) - (g(x) - g(y))}{d(x,y)} \\ &\leq b\eta \int f dm - b \int g dm, \end{aligned}$$

3. pour $x \in P_2,$

$$-c(\eta \int f dm - \int g dm) \leq \eta f(x) - g(x) \leq c(\eta \int f dm - \int g dm).$$

Pour vérifier 1., il faut

$$\eta \geq \sup_{P \in \mathcal{P}_{s,t}} \frac{a \int g dm - 1/\mu(P) \int_P g dm}{a \int f dm - 1/\mu(P) \int_P f dm}, \text{ et } \eta \geq \sup_{P \in \mathcal{P}_{s,t}} \frac{\int_P g dm}{\int_P f dm},$$

Par (5.6), il suffit d'avoir :

$$\eta \geq \frac{\int g dm}{\int f dm} \max \left(\frac{1}{1-\gamma}, \frac{2\alpha' + \alpha}{\alpha} \right).$$

Pour vérifier 2. et 3., il suffit d'avoir

$$\eta \geq \frac{\int g dm}{\int f dm} \frac{1+\gamma}{1-\gamma}.$$

De la même manière, soit $\zeta > 0$ tel que $g - \zeta f \in C$, il suffit que ζ vérifie :

$$\zeta \leq \frac{\int g dm}{\int f dm} \min \left[1 - \gamma, \frac{1-\gamma}{1+\gamma}, \frac{\alpha}{2\alpha' + \alpha} \right].$$

Ainsi, le diamètre Δ de $\mathcal{L}_{\Phi}^k C$ dans C est majoré par $2 \log \max \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}, \frac{2\alpha'+\alpha}{\alpha} \right)$. □

Remarque 5.2 La constante $\frac{2\alpha'+\alpha}{\alpha}$ est complètement arbitraire et en changeant a, b, c, α, α' et $\mathcal{P}_{s,t}$, on peut obtenir une constante aussi proche de 1 que l'on veut. Toutefois, on change alors k et donc $\gamma = \max(\beta, \rho_k)$. Dans l'estimation du diamètre projectif, on peut remplacer $\frac{2\alpha'+\alpha}{\alpha}$ par :

$$\frac{\alpha'(1 + D_1b + D_2c)}{\alpha - \alpha'(D_1b + D_2c)}$$

Soit $\kappa = (\tanh(\Delta/4))^{1/k}$. Les résultats du chapitre 1 nous donnent alors pour $d \geq \max(bD_1, c)$:

$$\forall f \in C, \|\mathcal{L}_{\Phi}^n f - h \int f dm\|_d \leq \text{Cte } \kappa^n \int f dm$$

et comme les normes $\|\cdot\|_{\infty}$ et $\|\cdot\|_d$ sont équivalentes,

$$\forall f \in C, \|\mathcal{L}_{\Phi}^n f - h \int f dm\|_{\infty} \leq \text{Cte } \kappa^n \int f dm$$

Le lemme suivant va nous permettre d'obtenir la vitesse de convergence pour des fonctions f de L . La démonstration de celle-ci suit exactement celle du lemme 2.5 et est omise.

Lemme 5.4 *Pour $f \in L$, il existe $C(f) \geq 0$ telle que $f + C(f)h$ appartienne au cône C , de plus, $C(f) \leq \text{Cte } \|f\|$.*

Soit maintenant $f \in L$, notons $f_C = f + C(f)h$.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_{\Phi}^n f - h \int f dm\|_{\infty} &\leq \|\mathcal{L}_{\Phi}^n f_C - h \int f_C dm\|_{\infty} + C(f) \|\mathcal{L}_{\Phi}^n h - h \int h dm\| \\ &= \|\mathcal{L}_{\Phi}^n f_C - h \int f_C dm\|_{\infty} \\ &\leq \text{Cte} \kappa^n \int f_C dm \text{ car } f_C \in C \\ &\leq \text{Cte} \kappa^n \|f\|. \end{aligned}$$

Ainsi, on a (III) pour $f \in L$. Ceci termine la preuve du théorème G. □

La convergence (III) implique le mélange exponentiel pour $g \in L^1(m)$ et f telle que fh appartienne à L :

$$|\mu(g \circ \sigma^n f) - \mu(g)\mu(f)| \leq \text{Cte } \kappa^n \|fh\| \|g\|_{L^1(m)}. \quad (5.8)$$

Par ailleurs, les arguments de [B,K,S] permettent de démontrer le résultat suivant.

Proposition 5.5 *L'opérateur \mathcal{L}_Φ agissant sur L est quasi-compact.*

Preuve : Il suffit de montrer pour $f \in L$,

$$\|\mathcal{L}_\Phi^n f - h \int f dm\| \leq \text{Cte } \rho^n \|f\|,$$

avec $\rho < 1$. En utilisant (4.2), on obtient

$$\begin{aligned} K \left(\mathcal{L}_\Phi^{2n} f - h \int f dm \right) &= K \left(\mathcal{L}_\Phi^n [\mathcal{L}_\Phi^n f - h \int f dm] \right) \\ &\leq Mr^n K \left(\mathcal{L}_\Phi^n f - h \int f dm \right) + R \|\mathcal{L}_\Phi^n f - h \int f dm\|_\infty. \end{aligned}$$

De plus, (4.2) implique que $K(\mathcal{L}_\Phi^n \varphi) \leq \text{Cte} \|\varphi\|$, pour φ appartenant à L . (III) donne alors pour $f \in L$,

$$\|\mathcal{L}_\Phi^{2n} f - h \int f dm\| \leq \text{Cte} \max(\kappa^n, r^n) \|f\|,$$

ceci suffit pour montrer la quasi-compactité de \mathcal{L}_Φ . □

Pour conclure cette section, donnons un exemple de dynamique vérifiant **(Exp1)**.

Le système (Σ, σ) est dit à portée courte s'il existe un entier K tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour $x \in [n]$, si y est un antécédent de x alors $y \in [p]$ avec $p \geq n - K$. Autrement dit, la matrice qui définit σ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & * & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \\ * & & & * & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

où $*$ désigne un réel positif ou nul.

Exemple 5.1 [Dynamiques à portée courte vérifiant (Exp1).]

Si (Σ, σ) est à portée courte et si Φ vérifie :

$$\exists n_0 \text{ tel que } \forall n > n_0, (\mathcal{L}_\Phi \mathbf{1})_n \leq \rho < 1, \tag{Exp2}$$

alors Φ vérifie **(Exp1)** .

Remarquons tout d'abord que **(Exp2)** implique **(H)** (page 61) qui implique **(K)**. Ainsi, il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\mathcal{L}_\Phi^n \mathbf{1}\|_\infty \leq M$. Si (Σ, σ) est à portée courte et Φ vérifie **(Exp2)**, montrons par récurrence,

$$\forall p \geq 1, \forall n > n_0 + (p-1)K, (\mathcal{L}_\Phi^p \mathbf{1})_n \leq \rho^p. \quad (*)$$

L'hypothèse (**Exp2**) implique que (*) est vérifiée pour $p = 1$. Soit $p > 1$, $n > n_0 + pK$ et $x \in [n]$,

$$\mathcal{L}_\Phi^{p+1} \mathbf{1}(x) = \sum_{\sigma y=x} g_0(y) \mathcal{L}_\Phi^p \mathbf{1}(y),$$

comme σ est à portée courte, si y est un antécédent de x , $y \in [n']$ avec $n' > n_0 + (p-1)K$, ainsi par hypothèse de récurrence, $\mathcal{L}_\Phi^p \mathbf{1}(y) \leq \rho^p$. Ainsi, $\mathcal{L}_\Phi^{p+1} \mathbf{1}(x)$ vérifie

$$\mathcal{L}_\Phi^{p+1} \mathbf{1}(x) \leq \rho^p \sum_{\sigma y=x} g_0(y) = \rho^p \mathcal{L}_\Phi \mathbf{1}(x) \leq \rho^{p+1}.$$

Fixons maintenant k_1 et $n_1 = n_0 + (k_1 - 1)K$, pour $k \geq k_1$, et $n \geq n_1$, on a :

$$\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}_n \leq \sup(\mathcal{L}_\Phi^{k-k_1} \mathbf{1}) \mathcal{L}_\Phi^{k_1} \mathbf{1}_n \leq M \rho^{k_1}.$$

Il suffit alors de choisir k_1 tel que $M \rho^{k_1} \leq \beta < 1$. □

5.2 Dynamiques sans grandes branches à l'infini.

Dans cette section, nous ne supposons plus (**Exp1**). Nous donnons une estimation (sous exponentielle) de la vitesse de convergence dans (II) pour des dynamiques “sans grandes branches à l'infini”. Le système (Σ, σ) est dit *sans grandes branches à l'infini* s'il existe un entier K tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour $x \in [n]$, si y est un antécédent de x alors $y \in [p]$ avec $p \leq n + K$. Autrement dit, la matrice qui définit σ est de la forme :

$$K \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & & \\ * & & & & & \\ 0 & * & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & & 0 & * & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

où $*$ désigne un réel positif ou nul.

Considérons (Σ, σ) sans grandes branches à l'infini, soit K comme dans la définition :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour $x \in [n]$, si y est un antécédent de x alors $y \in [p]$ avec $p \leq n + K$. Si n_1 et $N > n_1$ sont fixés, nous noterons

$$\delta'_{k,j} := \sup\{(\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1})_n / N \leq n \leq N + kKj\}, \quad j \geq 0.$$

Nous ferons l'hypothèse suivante sur Φ :

il existe n_1 tel que pour $N \geq n_1$, il existe $k_1(N)$ tel que pour $k \geq k_1$, il existe $R(k)$, $0 < R(k) < N + kK$ et

$$\delta'_{k,j} \leq \left(1 - \frac{R(k)}{N + kKj}\right)^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad \forall j \geq 0. \quad (\mathbf{S-Exp1})$$

Remarquons que l'hypothèse **(S-Exp1)** implique **(K)** et que l'hypothèse **(Exp1)** implique **(S-Exp1)** : $\delta'_{j,k} = \rho_k$ pour tout $j \geq 0$. D'autre part, l'hypothèse **(S-Exp1)** exprime que pour k et n assez grand, $(\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1})_n$ est majoré strictement par 1, mais que cette majoration n'est pas uniforme en n ; de plus, la majoration de $\delta'_{k,j}$ par $\left(1 - \frac{R(k)}{N + kKj}\right)^\alpha$ permet d'assurer la convergence des produits $\prod_{\ell=1, \dots, j} \delta'_{k,\ell}$, elle peut être remplacée par une condition moins forte qui sera explicitée plus loin (remarque 5.8)

Remarque 5.3 Nous supposons de plus que $\lim_{j \rightarrow \infty} \delta'_{k,j} = 1$. Si $\limsup_{j \rightarrow \infty} \delta'_{k,j} < 1$, alors Φ vérifie en fait **(Exp1)** et les résultats de la section précédente donnent une convergence uniforme sur Σ et exponentielle.

Pour $N \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|_N$ désigne la norme uniforme sur $\llbracket 0, N \rrbracket$ (notation page 73). En adaptant les cônes de la section précédente, nous montrerons l'estimation suivante.

Proposition 5.6 *Si (Σ, σ) est sans grandes branches à l'infini et vérifie **(S-Exp1)** alors, $\forall N \geq n_1, \forall f \in L, \forall k \geq k_1$, il existe une suite $(\alpha_j(N))_{j \in \mathbb{N}}$, $\alpha_j(N) \rightarrow 0$ telle que*

$$\|\mathcal{L}_\Phi^{kj} f - h \int f\|_N \leq \alpha_j \|f\| + m(\llbracket 0, N \rrbracket^c) \sup f, \quad (IV)$$

De plus, α_j s'exprime en fonction des produits $\prod_{\ell=0}^j \delta'_{k,\ell}$ et en choisissant convenablement N par rapport à j , on obtient ainsi une estimation de la vitesse de convergence sur chaque compact de Σ et de la décroissance de corrélations.

La preuve de cette proposition suit la preuve du théorème G. Il s'agit de prendre en compte le fait que pour k et n assez grands, $(\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1})_n$ est majoré strictement par 1 mais que cette majoration n'est pas uniforme en n . C'est pourquoi nous utilisons une famille de cônes de fonctions spécifiées uniquement sur $\llbracket 0, N + kKj \rrbracket$, c'est à dire loin de l'infini.

Dans [F,S 2], pour étudier une application à point fixe neutre de l'intervalle, P. Ferrero et B. Schmitt utilisent aussi des cônes de fonctions spécifiées sur une famille exhaustive de compacts de $]0, 1[$.

Pour $N \geq n_1$ et $k \geq k_1$ fixés, $D(j)$ désigne l'ensemble $\llbracket 0, N + kKj \rrbracket$ et $K_j(f)$ la constante de Lipschitz de la fonction $f : D(j) \rightarrow \mathbb{R}$.

Considérons la famille de cônes suivante. Étant donnés a, b, c des réels positifs, $j, s, t \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}_{s,t}$ la partition définie page 73, $C_{a,b,c}^{s,t,j}$ est l'ensemble des fonctions de L qui vérifient :

1. $\forall P \in \mathcal{P}_{s,t}, P \subset D(j), 0 < \frac{1}{\mu(P)} \int_P f dm \leq a \int_{D(j)} f dm,$
2. $K_j(f) \leq b \int_{D(j)} f dm,$
3. $\sup_{x \in P_2 \cap D(j)} |f(x)| \leq c \int_{D(j)} f dm.$

Les arguments de la preuve du lemme 5.1, montrent que la norme

$$\|f\|_{d,j} = \max\left(d \left| \int_{D(j)} f dm \right|, \left| \frac{\int_P f dm}{m(P)} \right| \mid P \in \mathcal{P}_{s,t} \cap D(j), \|f\|_{N+kKj} \right) \quad (5.9)$$

est adaptée au cône $C_{a,b,c}^{s,t,j}$ pour $d = \max(bD_1, c)$. Remarquons que pour tout $d > 0$, la norme $\|\cdot\|_{d,j}$ est équivalente à la norme uniforme sur $D(j)$. De plus, $C_{a,b,c}^{s,t,j}$ est un cône convexe fermé pour la norme $\|\cdot\|_{D(j)}$ et $C_{a,b,c}^{s,t,j} \cap -C_{a,b,c}^{s,t,j} = \emptyset$.

Lemme 5.7 *Comme σ est sans grandes branches à l'infini, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ vérifie,*

$$\sigma^{-k}D(\ell - 1) \subset D(\ell).$$

De plus la suite $m(D(\ell) \setminus \sigma^{-k}D(\ell - 1))$ est sommable.

Preuve : En effet, si $x \in \sigma^{-k}D(\ell - 1)$ alors $\sigma^k x \in [n]$ avec $n \leq N + kK(\ell - 1)$. Comme σ est sans grandes branches à l'infini, x appartient à $[p]$ avec $p \leq n + kK \leq N + kK\ell$, c'est à dire x appartient à $D(\ell)$. Montrons maintenant que la suite $u_j = m(D(j) \setminus \sigma^{-k}D(j - 1))$

est sommable. On a

$$u_j = m(D(j)) - m(\sigma^{-k}D(j-1)) = m(D(j)) - (1 - m(\sigma^{-k}D(j-1)^c)) \text{ et}$$

$$\begin{aligned} m(\sigma^{-k}D(j-1)^c) &= \int \mathbf{1}_{D(j-1)^c} \circ \sigma^k dm \\ &= \int_{D(j-1)^c} \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1} dm. \end{aligned}$$

L'hypothèse **(S-Exp1)** implique $\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(x) \leq 1$ sur $D(j-1)^c \subset \llbracket 0, N \rrbracket^c$, ainsi

$$m(\sigma^{-k}D(j-1)^c) \leq m(D(j-1)^c).$$

On en déduit que $u_j \leq m(D(j)) - m(D(j-1))$ et donc u_j est sommable. \square

5.2.1 Contraction du cône.

Nous allons montrer, pour $\gamma < 1$ et $k, a, b, c, \mathcal{P}_{s,t}$ bien choisis, $\mathcal{L}_\Phi^k C_{a,b,c}^{s,t,j} \subset C_{\gamma a, \gamma b, \delta_j c}^{s,t,j-1}$ et le diamètre de $\mathcal{L}_\Phi^k C_{a,b,c}^{s,t,j}$ dans $C_{a,b,c}^{s,t,j-1}$ est majoré par $2 \log \frac{1+\delta_j}{1-\delta_j}$ où $\delta_j = \delta'_{j,k} (1 - m(j))^{-1}$ et $m(j) = c m(D(j) \setminus \sigma^{-k}D(j-1))$.

Remarque 5.4 Pour c fixé, il existe j_0 tel que pour tout $j \geq j_0$, $m(j) < 1$ et $\delta_j < 1$. Afin de simplifier la rédaction, dans toute la suite nous supposons que $j_0 = 1$.

Notons $m = \sup_j m(j)$, $m < 1$ car $m(j) < 1$ pour tout $j \geq 1$ et $m(j) \rightarrow 0$.

Fixons $\alpha < 1 < \alpha'$, $0 < \beta < (1 - m)$, $\gamma = \frac{\beta}{1-m}$ et $\beta' < \beta$. a, b, c, s, t et k sont choisis de la façon suivante :

1. $a > \alpha'(1 + \frac{\alpha}{2\alpha'})\beta^{-1}$,
2. k_0 tel que $\forall k > k_0, Mr^k < \beta'$,
3. $c \geq Ma + 1$,
4. $b > \frac{Rc}{\beta - \beta'}$,
5. $D_1 < 1/b \frac{\alpha}{4\alpha'}$,
6. t tel que $t \geq N$ et $D_2 < \frac{\alpha}{8\alpha'c}$,

7. k_1 tel que (5.2) soit vérifiée pour $\mathcal{P}_{s,t}$ et k_1 vérifie (**S-Exp1**),

8. $k \geq \max(k_0, k_1)$.

Soient $f \in C_{a,b,c}^{s,t,j}$ et $P \subset D(j-1)$, le lemme 5.7 implique que $\sigma^{-k}P \subset D(j)$. En reprenant les arguments de la démonstration du lemme 5.2, on obtient (en utilisant (5.2) et la définition du cône :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(P)} \int_P \mathcal{L}_{\Phi}^k f dm &\leq \alpha' \int_{D(j)} f dm [1 + D_1 b + 2D_2 c] \\ \frac{1}{\mu(P)} \int_P \mathcal{L}_{\Phi}^k f dm &\geq [\alpha - \alpha'(D_1 b + 2D_2 c)] \int_{D(j)} f dm. \end{aligned}$$

ceci conduit, par les choix (5. et 6.) de a, b, c et $\mathcal{P}_{s,t}$ à

$$\alpha/2 \int_{D(j)} f dm \leq \frac{1}{\mu(P)} \int_P \mathcal{L}_{\Phi}^k f dm \leq \alpha'(1 + \alpha/(2\alpha')) \int_{D(j)} f dm.$$

Par ailleurs, le fait que σ n'a pas de grandes branches à l'infini implique, en reprenant les arguments de la preuve du lemme 4.1,

$$K_{j-1}(\mathcal{L}_{\Phi}^k f) \leq Mr^k K_j(f) + R \sup_{D(j)} |f|.$$

Remarque 5.5 Si $f \in C_{a,b,c}^{s,t,j}$, en procédant comme dans la section précédente (remarque 5.1), on obtient, pour $x \in D(j)$,

$$\min[-c, Ma - bD_1] \int_{D(j)} f dm \leq f(x) \leq \max[c, Ma + bD_1] \int_{D(j)} f dm.$$

Ceci donne $K_{j-1}(\mathcal{L}_{\Phi}^k f) \leq \int_{D(j)} f dm [bMr^k + R \max(c, Ma + bD_1)]$ et donc, par les choix

(3. et 5.) ci-dessus,

$$K_{j-1}(\mathcal{L}_{\Phi}^k f) \leq \beta b \int_{D(j)} f dm \text{ si } b > \frac{cR}{\beta - \beta'}.$$

Enfin, pour $x \in P_2 \cap D(j-1)$, (**S-Exp1**) donne :

$$|\mathcal{L}_{\Phi}^k f(x)| \leq \delta'_{j,k} c \int_{D(j)} f dm.$$

Pour montrer que $\mathcal{L}_\Phi^k C_{a,b,c}^{s,t,j} \subset C_{\gamma a, \gamma b, \delta_j c}^{s,t,j-1}$, il reste à comparer $\int_{D(j)} f dm$ et $\int_{D(j-1)} \mathcal{L}_\Phi^k f dm$.

Lemme 5.8 Pour $f \in C_{a,b,c}^{s,t,j}$, $\int_{D(j-1)} \mathcal{L}_\Phi^k f dm = \int_{D(j)} f dm [1 \pm m(j)]$.

Preuve : Soit $f \in C_{a,b,c}^{s,t,j}$, d'après la remarque 5.7, $\sigma^{-k} D(j-1) \subset D(j)$,

$$\int_{D(j-1)} \mathcal{L}_\Phi^k f dm = \int_{\sigma^{-k} D(j-1)} f dm = \int_{D(j)} f dm - \int_{D(j) \setminus \sigma^{-k} D(j-1)} f dm.$$

Pour x appartenant à $D(j) \setminus \sigma^{-k} D(j-1)$,

$$\min[-c, Ma - bD_1] \int_{D(j)} f dm \leq f(x) \leq \int_{D(j)} f dm \max[c, Ma + bD_1],$$

ceci donne $\int_{D(j-1)} \mathcal{L}_\Phi^k f dm = \int_{D(j)} f dm [1 \pm c m(D(j) \setminus \sigma^{-k} D(j-1))]$ (car on a choisit $bD_1 < 1$ et $c \geq aM + 1$), d'où le résultat. \square

Ainsi, $\mathcal{L}_\Phi^k C_{a,b,c}^{s,t,j} \subset C_{\gamma a, \gamma b, \delta_j c}^{s,t,j-1}$. Il reste à estimer le diamètre projectif.

Lemme 5.9 Le diamètre projectif Δ_j de $\mathcal{L}_\Phi^k C_{a,b,c}^{s,t,j}$ dans $C_{a,b,c}^{s,t,j-1}$ est majoré par $2 \log \frac{1+\delta_j}{1-\delta_j}$ et toutes fonctions f et g de $C_{a,b,c}^{s,t,j}$ vérifient,

$$\theta_{C_{a,b,c}^{s,t,j-1}}(\mathcal{L}_\Phi^k f, \mathcal{L}_\Phi^k g) \leq \delta_j \theta_{C_{a,b,c}^{s,t,j}}(f, g). \quad (5.10)$$

Preuve : Il suffit de reprendre les arguments de la démonstration du lemme 5.3, on obtient alors $\Delta_j \leq 2 \log \max(\frac{1+\delta_j}{1-\delta_j}, \frac{2\alpha'+\alpha}{\alpha}, \frac{1+\gamma}{1-\gamma})$ et comme $\lim \delta_j' = 1$, on peut supposer $\frac{1+\delta_j}{1-\delta_j} \geq \frac{2\alpha'+\alpha}{\alpha}$ et $\frac{1+\delta_j}{1-\delta_j} \geq \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$, ainsi $\Delta_j \leq 2 \log \frac{1+\delta_j}{1-\delta_j}$ et $\tanh \frac{\Delta_j}{4} \leq \tanh \left[2 \log \frac{1+\delta_j}{1-\delta_j} \right] = \delta_j$. Soient f et g appartenant à $C_{a,b,c}^{s,t,j}$, la proposition 1.1 et l'estimation de Δ_j impliquent alors

$$\theta_{C_{a,b,c}^{s,t,j-1}}(\mathcal{L}_\Phi^k f, \mathcal{L}_\Phi^k g) \leq \delta_j \theta_{C_{a,b,c}^{s,t,j}}(f, g).$$

\square

Remarquons enfin que $\sum_j m(j) < \infty$, donc le produit des $(1 - m(j))^{-1}$ converge vers une limite strictement positive, ainsi, $\prod_{\ell=0, \dots, j} \delta_\ell \leq \text{Cte} \prod_{\ell=0, \dots, j} \delta'_{k, \ell}$.

5.2.2 Estimation de la décroissance des corrélations.

Dans cette section, nous finissons la preuve de la proposition 5.6 et montrons comment (IV) permet d'estimer la décroissance des corrélations. Fixons $N \geq n_1$, soit $\mathcal{C} = \bigcap_{j>0} C_{a,b,c}^{s,t,j}$.

Remarque 5.6 Pour a, b, c assez grand, \mathcal{C} est un cône non vide. En effet, si

- $a \int_{\llbracket 0, n_1 \rrbracket} h dm \geq M \sup h,$
- $b \int_{\llbracket 0, n_1 \rrbracket} h dm \geq K(h),$
- $c \int_{\llbracket 0, n_1 \rrbracket} h dm \geq \sup_{x \in P_2} h(x).$

alors h appartient à \mathcal{C} .

Il suffit de remarquer :

- h étant positive, $\int_{D(j)} h dm \geq \int_{\llbracket 0, n_1 \rrbracket} h dm,$ pour tout $j,$
- $\sup_{P \in \mathcal{P}_{s,t}} \frac{1}{\mu(P)} \int_P h dm \leq \sup h \sup_P \frac{m(P)}{\mu(P)} \leq M \sup h,$
- $K_j(h) \leq K(h)$ pour tout $j.$

Dans ce qui suit, a, b, c vérifient les inégalités ci-dessus, de sorte que $h \in \mathcal{C}$.

Fixons $f \in \mathcal{C}$ et $j \in \mathbb{N}$, f appartient à $C_{a,b,c}^{s,t,j}$ et $\mathcal{L}_\Phi^{k\ell} f$ appartient à $C_{a,b,c}^{\mathcal{P}_{s,t}, j-\ell}$ pour $\ell = 0, \dots, j.$

$$\begin{aligned} \theta_{C_{a,b,c}^{\mathcal{P}_{s,t}, 0}}(\mathcal{L}_\Phi^{kj} f, h) &\leq \delta_1 \theta_{C_{a,b,c}^{\mathcal{P}_{s,t}, 1}}(\mathcal{L}_\Phi^{k(j-1)} f, h) \\ &\dots \leq \Delta_j \prod_{\ell=1}^{j-1} \delta_\ell. \end{aligned}$$

La norme $\| \cdot \|_{d,0}$ définie par (5.9) et $\rho(f) = \int_{D(0)} f dm = \int_{\llbracket 0, N \rrbracket} f dm$ sont adaptées au cône $C_{a,b,c}^{\mathcal{P}_s, t, 0}$, de plus les normes $\| \cdot \|_{\alpha,0}$ et $\| \cdot \|_N$ sont équivalentes, ainsi, pour $f \in \mathcal{C}$,

$$\| \mathcal{L}_{\Phi}^{kj} f - \frac{h}{\int_{\llbracket 0, N \rrbracket} h} \int_{\llbracket 0, N \rrbracket} \mathcal{L}_{\Phi}^{kj} f \|_N \leq \Delta_j \prod_{\ell=1}^{j-1} \delta_{\ell} \exp \left(\Delta_j \prod_{\ell=1}^{j-1} \delta_{\ell} \right) \int_{D(0)} f dm.$$

Si $p = kj + r$,

$$\begin{aligned} \| \mathcal{L}_{\Phi}^p f - \frac{h}{\int_{\llbracket 0, N \rrbracket} h} \int_{\llbracket 0, N \rrbracket} \mathcal{L}_{\Phi}^p f \|_N &\leq \| \mathcal{L}_{\Phi}^r \| \| \mathcal{L}_{\Phi}^{kj} f - \frac{h}{\int_{\llbracket 0, N \rrbracket} h} \int_{\llbracket 0, N \rrbracket} \mathcal{L}_{\Phi}^{kj} f \|_N \\ &\leq M \| \mathcal{L}_{\Phi}^{kj} f - \frac{h}{\int_{\llbracket 0, N \rrbracket} h} \int_{\llbracket 0, N \rrbracket} \mathcal{L}_{\Phi}^{kj} f \|_N. \end{aligned}$$

Estimons la différence $\| \frac{h}{\int_{\llbracket 0, N \rrbracket} h dm} \int_{\llbracket 0, N \rrbracket} \mathcal{L}_{\Phi}^p f dm - h \int_{\llbracket 0, N \rrbracket} f dm \|_N$,

$$\begin{aligned} &\| \frac{h}{\int_{\llbracket 0, N \rrbracket} h dm} \int_{\llbracket 0, N \rrbracket} \mathcal{L}_{\Phi}^p f dm - h \int_{\llbracket 0, N \rrbracket} f dm \|_N \\ &= \| \frac{h}{\int_{\llbracket 0, N \rrbracket} h dm} \int_{\llbracket 0, N \rrbracket} \mathcal{L}_{\Phi}^p f dm - h \int_{\llbracket 0, N \rrbracket} \mathcal{L}_{\Phi}^p f dm \|_N \\ &\leq \| \frac{h}{\int_{\llbracket 0, N \rrbracket} h dm} \int_{\llbracket 0, N \rrbracket^c} \mathcal{L}_{\Phi}^p f dm \|_N + \| h \|_{\infty} | \int_{\llbracket 0, N \rrbracket} f dm | \left[\frac{1}{\int_{\llbracket 0, N \rrbracket} h dm} - 1 \right] \\ &\leq \text{Cte} \sup |f| m(\llbracket 0, N \rrbracket^c) + \frac{\|h\|_{\infty}}{\int_{\llbracket 0, n_1 \rrbracket} h dm} | \int_{\llbracket 0, N \rrbracket} f dm | \left| 1 - \int_{\llbracket 0, N \rrbracket} h dm \right| \quad (N \geq n_1) \\ &\leq \text{Cte} \sup |f| m(\llbracket 0, N \rrbracket^c) \text{ en utilisant que } \int_{\llbracket 0, N \rrbracket} h dm = 1. \end{aligned}$$

Finalement, pour $f \in \mathcal{C}$ et p de la forme $kj + r$, on a,

$$\| \mathcal{L}_{\Phi}^p f - h \int_{\llbracket 0, N \rrbracket} f \|_N \leq \text{Cte} \Delta_j \prod_{\ell=1}^{j-1} \delta_{\ell} \exp \left(\Delta_j \prod_{\ell=1}^{j-1} \delta_{\ell} \right) | \int_{\llbracket 0, N \rrbracket} f dm | + \text{Cte} m(\llbracket 0, N \rrbracket^c) \sup |f|. \quad (5.11)$$

Remarque 5.7 $\Delta_j \prod_{\ell=1}^{j-1} \delta_\ell \exp\left(\Delta_j \prod_{\ell=1}^{j-1} \delta_\ell\right)$ dépend de N et k , l'hypothèse **(S-Exp1)** implique que pour N et k fixés, cette quantité tend vers zéro quand j tend vers l'infini.

Le lemme suivant permet d'obtenir l'inégalité (IV) pour les fonctions de L .

Lemme 5.10 *Pour $f \in L$, positive, il existe $R(f) \geq 0$ tel que $f + R(f)h \in \mathcal{C}$, de plus $R(f) \leq Cte\|f\|$*

Preuve : Suivant la remarque 5.6, il suffit que $R(f)$ vérifie

$$\begin{aligned} \bullet R(f) &\geq \frac{M \sup_{\llbracket 0, n_1 \rrbracket} f - a \int_{\llbracket 0, n_1 \rrbracket} f}{a \int_{\llbracket 0, n_1 \rrbracket} h - M \sup_{\llbracket 0, n_1 \rrbracket} h}, \\ \bullet R(f) &\geq \frac{K(f) - b \int_{\llbracket 0, n_1 \rrbracket} f}{b \int_{\llbracket 0, n_1 \rrbracket} h - K(h)}, \\ \bullet R(f) &\geq \frac{\sup_{P_2} f - c \int_{\llbracket 0, n_1 \rrbracket} f}{c \int_{\llbracket 0, n_1 \rrbracket} h - \sup_{P_2} h}. \end{aligned}$$

□

Le lemme 5.10 et (5.11) impliquent pour $f \in L$,

$$\|\mathcal{L}_\Phi^{kj} f - h \int f\|_N \leq Cte \alpha_j \|f\| + m(\llbracket 0, N \rrbracket^c) \sup f,$$

avec $\alpha_j(N) = \Delta_j \prod_{\ell=1}^{j-1} \delta_\ell \exp\left(\Delta_j \prod_{\ell=1}^{j-1} \delta_\ell\right)$. Ceci termine la preuve de la proposition 5.6. □

Nous allons maintenant montrer comment (5.11) permet d'estimer la vitesse de convergence sur les compacts de Σ et la décroissance des corrélations. Soient $q \in \mathbb{N}$ et f appartenant à \mathcal{C} , en particulier, f appartient à $C_{a,b,c}^{\mathcal{P}_{s,t}, k(j+2q)}$ et $\mathcal{L}_\Phi^{k(j+q)} f \in C_{a,b,c}^{\mathcal{P}_{s,t}, kq}$, ceci conduit à la majoration suivante qui va nous permettre d'obtenir d'estimer la vitesse de convergence sur les compacts de Σ .

$$\|\mathcal{L}_\Phi^{k(j+q)} f - h \int f\|_{N+Kkq} \leq$$

$$\exp[\Delta_{j+q} \prod_{\ell=1}^{j-1} \delta_{\ell+q}] \Delta_{j+q} \int_{D(0)} f dm \prod_{\ell=1}^{j-1} \delta_{\ell+q} + m([0, N + Kkq]^c) \sup |f|. \quad (5.12)$$

Choisissons une suite $q(j)$ telle que $q(j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ et

$$\Delta_{j+q(j)} \prod_{\ell=1}^{j-1} \delta_{\ell+q(j)} \exp \left(\Delta_{j+q(j)} \prod_{\ell=1}^{j-1} \delta_{\ell+q(j)} \right) : = \tilde{\alpha}_j \longrightarrow 0.$$

Par exemple, si $\delta'_{k,j} \leq (1 - \frac{1}{N+Kkj})^\alpha$, comme $\Delta_j \leq 2 \log \frac{1+\delta_j}{1-\delta_j}$, pour $0 < \varepsilon < \varepsilon' < 1$ fixés, si $q(j) = j^\varepsilon$, on obtient $\tilde{\alpha}_j \leq C(N, \varepsilon, \varepsilon') \frac{1}{j^{\alpha-\varepsilon'}}$.

Remarque 5.8 La condition (**S-Exp1**) peut être remplacée par : il existe une suite $q(j)$ qui tend vers l'infini avec j et telle que

$$\Delta_{j+q(j)} \prod_{\ell=1}^{j-1} \delta_{\ell+q(j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

Finalement, pour x dans un compact Q de Σ , il existe j_0 tel que $Q \subset [0, N + Kkq(j_0)] \subset [0, N + Kkq(j)] \forall j \geq j_0$, de sorte que pour $f \in L$, $j \geq j_0$ et $p = k(j + q(j)) + r$, le lemme 5.10 et (5.12) donnent,

$$\left| \mathcal{L}_{\Phi}^p f(x) - h(x) \int f dm \right| \leq \text{Cte} [\tilde{\alpha}_j + m([0, N + Kkq(j)]^c)] \|f\|.$$

Si $u_j = \tilde{\alpha}_j + Rm[0, N + kKq(j)]^c$, cette inégalité s'écrit

$$\|\mathcal{L}_{\Phi}^p f - h \int f dm\|_Q \leq C(j_0) u_j \|f\|$$

où $C(j_0)$ ne dépend pas de f et tend vers l'infini avec j_0 :

$$C(j_0) = \sup_{\substack{k(j+q(j)) \leq p < k(j+1+q(j+1)) \\ j \leq j_0}} \frac{\|\mathcal{L}_{\Phi}^p f - h \int f dm\|_Q}{u_j \|f\|} \leq \text{Cte} \sup_{j \leq j_0} \frac{1}{u_j}.$$

Remarquons enfin que si $q(j) = o(j)$ alors pour $p \in \mathbb{N}$, l'entier j qui vérifie $k(j + q(j)) \leq p < k(j + 1 + q(j + 1))$ est de l'ordre de $\frac{p}{k}$.

Pour finir, la décroissance des corrélations s'obtient de la même manière, pour f telle que $fh \in L$ et $g \in L^\infty(m)$:

$$\begin{aligned}
& |\mu(g \circ \sigma^p f) - \mu(g)\mu(f)| \\
& \leq \left| \int_{[0, N+Kkq(j)]} [\mathcal{L}_\Phi^p(fh) - h \int fh dm] g dm \right| + \left| \int_{[0, N+Kkq(j)]^c} \mathcal{L}_\Phi^p(fh) g dm \right| \\
& + \left| \int_{[0, N+Kkq(j)]^c} (gh) dm \right| \left| \int fh dm \right| \\
& \leq \|\mathcal{L}_\Phi^p(fh) - h \int fh dm\|_{N+Kkq(j)} \|g\|_\infty + \text{Cte} \|f\|_\infty \|g\|_\infty m([0, N+Kkq(j)]^c) \\
& \leq [\tilde{\alpha}_j + \text{Cte} m([0, N+Kkq(j)]^c)] \|f\| \|g\|_\infty = u_j \|f\| \|g\|_\infty. \tag{5.13}
\end{aligned}$$

Pour conclure cette section, donnons une classe d'exemple pour laquelle il est facile de vérifier (**S-Exp1**). Le système (Σ, σ) est dit à *portée bornée* s'il existe un entier K tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour $x \in [n]$, si y est un antécédent de x alors $y \in [p]$ avec $n - K \leq p \leq n + K$. Autrement dit, la matrice qui définit σ est de la forme :

$$\begin{pmatrix}
* & \cdots & \cdots & * & 0 & \cdots \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & & & & & & \\
* & & & & * & 0 & & & & & & \\
0 & * & & & & * & 0 & & & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \ddots & & & & \\
0 & & 0 & * & & & & * & 0 & & & \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \ddots & &
\end{pmatrix}$$

où $*$ désigne un réel positif ou nul. Remarquons que si σ est à portée bornée alors Σ est localement compact. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le cylindre $[n]$ est compact :

$$[n] \subset \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} / 0 \leq x_k \leq n + kK\}.$$

Exemple 5.2 [Dynamiques vérifiant (S-exp1).]

Si (Σ, σ) est à portée bornée et si Φ vérifie les deux propriétés suivantes :

1. $\exists n_0$ tel que $\forall n > n_0, (\mathcal{L}_\Phi \mathbf{1})_n \leq (1 - \frac{1}{n})^\alpha \alpha > 0,$ (**S - Exp2**)
2. la densité invariante h tend vers zéro à l'infini (c'est à dire, si $\sup_{x \in [n]} h(x) := h_n, h_n$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini),

alors Φ vérifie **(S-Exp1)** .

En effet, si (Σ, σ) est à portée bornée et Φ vérifie **(S-Exp2)**, montrons par récurrence que pour $k \geq 1$ et $n > n_0 + (k - 1)K$,

$$(\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1})_n \leq \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{n + Kj}\right)^\alpha. \quad (5.14)$$

L'hypothèse **(S-Exp2)** exprime que (5.14) est vérifiée pour $k = 1$. Soient $k > 1$ et $x \in [n]$ avec $n \geq n_0 + Kk$, si x' est un antécédent de x par σ , alors $x' \in [p]$ avec

$$n_0 + K(k - 1) \leq n - K \leq p \leq n + K.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Phi^{k+1} \mathbf{1}(x) &= \sum_{\sigma x' = x} g_0(x') \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(x') \\ &\leq \sum_{\sigma x' = x} g_0(x') \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{n + K(j+1)}\right)^\alpha \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &\leq \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{n + K(j+1)}\right)^\alpha \mathcal{L}_\Phi \mathbf{1}(x) \\ &\leq \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{n + K(j+1)}\right)^\alpha \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha. \end{aligned}$$

Le lemme suivant permet d'estimer $(\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1})_n$ pour $N \leq n \leq N + (k - 1)K$, si N et k sont suffisamment grands et de montrer que **(S-Exp2)** + portée bornée impliquent **(S-Exp1)**.

Lemme 5.11 *Pour tout $(\frac{1}{2})^\alpha < \eta < 1$, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que pour tout $N \geq n_1$ il existe k_1 tel que pour $k \geq k_1$,*

$$\sup_{N \leq n < N + (k-1)K} (\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1})_n < \eta.$$

Preuve : Soit $\varepsilon < 1$ tel que $2\varepsilon < \eta$, soient

1. $N_0 \geq n_0$ tel que pour $n \geq N_0$, $h_n \leq \varepsilon$, et $n_1 = \max(N_0 + K, n_0)$, fixons alors $N \geq n_1$.
2. k_0 tel que $\forall k \geq k_0$, $\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(x) \leq h(x) + \varepsilon$, pour $x \in [n]$, $n \leq N$,¹

¹Comme σ est à portée bornée, l'ensemble $\llbracket 0, N \rrbracket$ est compact. Ainsi, les résultats du chapitre 4 impliquent qu'un tel k_0 existe.

3. $k' > k_0$ tel que pour tout $k > k'$, $\left(\frac{N + K(k+1)}{N + 2Kk}\right)^\alpha < \eta$ et $k_1 > k'$ tel que pour tout $k > k_1$, $u_{k'} \left(\frac{N + (k'+1)K}{N + (k-2)K}\right)^\alpha < \eta$ où u_k est défini par
- $$u_k = \sup\{\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(x) / x \in [n], N \leq n < N + K(k-1)\}.$$

Soient $k > k_1$, $N \geq n_1$ et $x \in [n]$ avec $N \leq n < N + kK$, si x' est un antécédent de x par σ , alors, $x' \in [n']$ avec $N_0 < N - K \leq n' < N + (k+1)K$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Phi^{k+1} \mathbf{1}(x) &= \sum_{\sigma x' = x} g_0(x') \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(x') \\ &= \underbrace{\sum_{N_0 < n' \leq N} g_0(x') \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(x')}_{[1]} + \underbrace{\sum_{N < n' < N + (k-1)K} g_0(x') \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(x')}_{[2]} + \underbrace{\sum_{N + (k-1)K \leq n' < N + (k+1)K} g_0(x') \mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1}(x')}_{[3]} \end{aligned}$$

Par les choix de N_0 et k , on a

$$\begin{aligned} [1] &\leq \sum_{N_0 < n' \leq N} g_0(x') [\varepsilon + h(x')] \quad (\text{par le choix 2. de } k \geq k_0), \\ [2] &\leq u_k \sum_{N < n' < N + (k-1)K} g_0(x'), \\ [3] &\leq \sum_{N + (k-1)K \leq n' < N + (k+1)K} g_0(x') \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{n' + Kj}\right)^\alpha \quad (\text{par (5.14)}) \\ &\leq \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{N + K(j+k+1)}\right)^\alpha \sum_{N + (k-1)K \leq n' < N + (k+1)K} g_0(x'). \end{aligned}$$

Ainsi, pour $k > k'$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Phi^{k+1} \mathbf{1}(x) &\leq \max\left[\varepsilon + \sup_{N_0 < n' \leq N} h_{n'}, u_k, \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{N + K(j+k+1)}\right)^\alpha\right] \mathcal{L}_\Phi \mathbf{1}(x) \\ &\leq \max\left[2\varepsilon, u_k, \left(\frac{N + K(k+1)}{N + 2Kk}\right)^\alpha\right] \left(1 - \frac{1}{N + kK}\right)^\alpha \\ &\leq \max[u_k, \eta] \left(1 - \frac{1}{N + kK}\right)^\alpha, \end{aligned}$$

et finalement

$$u_k \leq \max\left[u_{k'}, \prod_{\ell=k'+1}^{k-2} \left(1 - \frac{1}{N + \ell K}\right)^\alpha, \eta\right] \left(1 - \frac{1}{N + (k-1)K}\right)^\alpha \leq \eta$$

□

Ainsi, pour $\frac{1}{2^\alpha} < \eta < 1$ fixé, on a : pour tout $N \geq n_1$, il existe k_1 tel que pour $k \geq k_1$,

$$\begin{aligned} \delta'_{k,j} &= \sup\{(\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1})_n / N \leq n \leq N + kKj\} \\ &\leq \max \left[\sup_{N \leq n \leq N+kK} (\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1})_n, \sup_{N+kK \leq n \leq N+kKj} (\mathcal{L}_\Phi^k \mathbf{1})_n \right] \\ &\leq \max \left[\eta, \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{N + K(kj + i)} \right)^\alpha \right] \quad (\text{en utilisant 5.14}) \end{aligned}$$

ce qui suffit pour obtenir **(S-Exp1)**.

□

Chapitre 6

Exemples.

Les résultats des chapitres 4 et 5 permettent d'étudier les propriétés de mélange de certaines matrices stochastiques et d'applications markoviennes non uniformément dilatantes de l'intervalle sans grandes branches à l'infini. Pour montrer que ces systèmes entrent dans le cadre précédent, il peut être utile de recourir à *un changement de potentiel*.

Soit B un espace de Banach stable par \mathcal{L}_Φ , v une fonction continue strictement positive sur Σ et m une mesure régulière sur Σ . Notons :

- $B_v = \{f / fv \in B\}$, muni de la norme $\|f\|' = \|fv\|$ pour $f \in B_v$, où $\| \cdot \|$ est la norme sur B .
- $\Psi = \Phi + \log v - \log(v \circ \sigma)$, Ψ et Φ sont alors dits *cohomologues* et on a $\mathcal{L}_\Psi f = v^{-1}\mathcal{L}_\Phi(fv)$ pour $f \in B_v$.
- $m_v = vm$

Par exemple, si v est un point fixe pour \mathcal{L}_Φ , l'opérateur \mathcal{L}_Ψ est normalisé ($\mathcal{L}_\Psi \mathbf{1} = \mathbf{1}$). Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\mathcal{L}_\Phi} & B \\ \times v^{-1} \downarrow & & \downarrow \times v^{-1} \\ B_v & \xrightarrow{\mathcal{L}_\Psi} & B_v. \end{array}$$

De plus, pour $f \in B$, notons $f_v = \frac{f}{v}$, f est une fonction propre associée à une valeur propre c pour \mathcal{L}_Φ si et seulement si f_v est une fonction propre associée à une valeur propre c pour \mathcal{L}_Ψ : $\mathcal{L}_\Phi f = v\mathcal{L}_\Psi f_v$. De même, une mesure régulière m est c -conforme

pour \mathcal{L}_Φ si et seulement si m_v est c -conforme pour \mathcal{L}_Ψ :

$$\int \mathcal{L}_\Psi f dm_v = \int \mathcal{L}_\Phi f dm,$$

pour $f \in B_v$, $\|\mathcal{L}_\Psi^n f - h_v m_v(f)\|' = \|\mathcal{L}_\Phi^n(fv) - hm(fv)\|$. Par ailleurs, si h est un point fixe pour \mathcal{L}_Φ , $\mu = hm$ est invariante par σ et f est telle que $fh_v \in B_v$ si et seulement si $fh \in B$, ainsi pour estimer la décroissance des corrélations, on peut utiliser soit \mathcal{L}_Φ soit \mathcal{L}_Ψ :

$$\begin{aligned} |\mu(fg \circ \sigma) - \mu(f)\mu(g)| &= \left| \int g[\mathcal{L}_\Phi^n(fh) - h \int fh dm] dm \right| \\ &= \left| \int g[\mathcal{L}_\Psi^n(fh_v) - h_v \int fh_v dm_v] dm_v \right|. \end{aligned}$$

Remarque 6.1 Si Φ est Lipschitz sur les 1-cylindres et v constante sur les 1-cylindres alors Ψ est Lipschitz sur les 2-cylindres. De plus, si $\sup_{x \in \Sigma} \frac{v(x)}{v \circ \sigma(x)}$ est borné alors Ψ est Lipschitz sur les 1-cylindres. Dans les deux chapitres précédents, nous avons supposé que le potentiel Φ était Lipschitz sur les 1-cylindres. Si Φ est Lipschitz sur les k -cylindres, on peut définir la constante de Lipschitz locale de f appartenant à L comme étant le sup sur les k -cylindres des constantes de Lipschitz de f restreinte aux k -cylindres. Tous les résultats des chapitres précédents s'adaptent alors. Dans le chapitre 5, il suffit d'ajouter à la définition de bonne partition : \mathcal{P}_1 est formée de s -cylindres avec $s \geq k$.

Remarque 6.2 Soit $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction positive constante sur les 1-cylindres qui tend vers zéro à l'infini et telle que $\sup_{x \in \Sigma} \frac{v(x)}{v \circ \sigma(x)}$ est borné. S'il existe n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \sup_{x \in [n]} \frac{1}{v(x)} \mathcal{L}_\Phi v(x) \leq 1$$

alors, la densité invariante h tend vers zéro à l'infini.

En effet, considérons v comme un changement de potentiel et \mathcal{L} l'opérateur associé

$$\mathcal{L}f = \frac{1}{v} \mathcal{L}_\Phi(fv), \text{ pour } f \text{ telle que } fv \in C_u(\Sigma),$$

l'opérateur \mathcal{L} vérifie les hypothèses du théorème F (modulo la remarque 6.1) et la mesure m_v est finie et conforme pour \mathcal{L} . Soit h_1 la densité invariante par \mathcal{L} construite par le théorème F, soit $h = vh_1$, h est invariante par \mathcal{L}_Φ . Comme h_1 est une fonction bornée, la densité invariante par \mathcal{L}_Φ tend bien vers zéro à l'infini.

6.1 Matrices stochastiques.

Considérons une $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ matrice stochastique $P = (p_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$, $\sum_j p_{i,j} = 1$ pour tout i et Σ le sous décalage de type fini associé à la matrice transposée P^t . On a $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$, il s'agit de trouver une probabilité stationnaire, c'est-à-dire $\nu \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ tel que $\nu P = P^t \nu = \nu$ et $\sum_n \nu_n < \infty$. Si Φ est le potentiel constant par morceaux défini par $\Phi(x) = -\log p_{j_i}$ si $x \in [i, j]^1$, l'opérateur de transfert associé est la matrice P^t . Pour appliquer les résultats des chapitres 4 et 5, il faut une probabilité conforme. Soit m_1 la mesure définie sur les cylindres par $m_1[i] = 1$ et $m_1[i_1, \dots, i_n] = p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$, m_1 est une mesure conforme pour P^t mais elle n'est pas de masse totale finie. L'idée est d'utiliser un changement de potentiel. Considérons $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ constante sur les 1-cylindres et sommable, c'est à dire si $v_n = v(x)$ pour $x \in [n]$ alors $\sum v_n < \infty$. Soit \mathcal{L} l'opérateur associé à ce changement de potentiel : $\mathcal{L}f = v^{-1}P^t(fv)$ pour f telle que fv est uniformément continue et bornée. La mesure $m = vm_1$ est finie et c'est une mesure conforme pour \mathcal{L} .

Nous dirons que v est un *vecteur sous-harmonique à l'infini* si

$$\text{il existe } M > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} (vP^k)_n \leq Mv_n.$$

Le théorème F donne le corollaire suivant.

Proposition 6.1 *Soit P une matrice stochastique apériodique. S'il existe un changement de potentiel v , sommable et sous-harmonique à l'infini, alors P admet une unique probabilité stationnaire ν (autrement dit, P est récurrente positive), et pour f telle que $\frac{f}{v} \in C_u(\Sigma)$,*

$$|(P^t)^n f(x) - \nu_i m_1(f)| \longrightarrow 0 \text{ pour } x \in [i]. \quad (6.1)$$

Preuve : Le fait que v soit sous-harmonique à l'infini implique que l'opérateur \mathcal{L} associé à ce changement de potentiel vérifie **(K)**. Le théorème F donne l'existence de $u \in L$ point fixe de \mathcal{L} qui vérifie $m(u) = 1$ (m désigne la mesure vm_1 comme ci-dessus) et la convergence de $\mathcal{L}^n g$ vers $um(g)$ pour $g \in C_u(\Sigma)$. Soit $\nu = uv$, on a pour f telle que $\frac{f}{v} \in C_u(\Sigma)$,

$$(P^t)^n f(x) - \nu_i m_1(f) = v[\mathcal{L}^n(\frac{f}{v}) - um(\frac{f}{v})], x \in [i].$$

□

Considérons P une matrice stochastique apériodique admettant un vecteur sous-harmonique à l'infini v . Les résultats du chapitre 5 permettent de préciser la convergence (6.1). Si v

¹par définition de Σ , si le cylindre $[i, j]$ est non vide, $p_{j,i} \neq 0$

vérifie de plus

$$\exists n_1 \exists p_1 \text{ tels que } \forall n > n_1, \forall p > p_1, \exists 0 < \rho_p < 1 \ (vP^p)_n \leq \rho_p v_n$$

c'est-à-dire que \mathcal{L} vérifie (**Exp1**), ou si Σ est à portée courte et v vérifie

$$\exists 0 < \rho < 1, \exists n_1 \text{ tel que } \forall n > n_1 \ (vP)_n \leq \rho v_n$$

c'est-à-dire que \mathcal{L} vérifie (**Exp2**) alors, il existe $0 < \gamma < 1$ tel que pour toute fonction f de $L_{v^{-1}}$,

$$\left\| \frac{1}{v} [(P^t)^n f - \nu m(f)] \right\|_\infty \leq K \gamma^n \left\| \frac{f}{v} \right\|.$$

En particulier, si $f = \mathbf{1}_{[j]}$, $\left\| \frac{f}{v} \right\| = \frac{1}{v_j}$, soit $x \in [i]$,

$$(P^t)^n f(x) = \sum_k p_{k,i}^n f(k) = p_{j,i}^n$$

et on obtient,

$$\left| p_{j,i}^n - \nu_i \right| \frac{1}{v_j} \leq K \gamma^n \frac{1}{v_j}, \text{ i.e. } |p_{j,i}^n - \nu_i| \leq K \gamma^n,$$

c'est-à-dire que P est géométriquement ergodique au sens de Vere-Jones [V-J1]. On peut aussi estimer la vitesse de convergence lorsque P est sans grandes branches à l'infini et non nécessairement géométriquement ergodique. Soit

$$\eta'_{p,j} = \sup[(vP^p)_n, N \leq n < N + Kpj],$$

en remplaçant $\delta'_{p,j}$ par $\eta'_{p,j}$ dans la section 5.5.2, on obtient une estimation de la décroissance des corrélations qui s'exprime en fonction de la convergence à zéro des produits $\prod_\ell \eta'_{p,\ell}$.

6.2 Applications uniformément dilatantes de l'intervalle.

Les techniques développées dans les chapitres 4 et 5 peuvent être adaptées pour étudier des applications markoviennes (au sens de [A,D,U], voir page xviii) de l'intervalle ne vérifiant pas les hypothèses de [L, S, V1] ou non uniformément dilatantes et sans grandes branches à l'infini.

Dans ce qui suit I désigne l'intervalle $[0, 1]$, λ la mesure de Lebesgue sur I . Étant donnée $\mathcal{I} = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition (mod 0) de I en sous intervalles ouverts, B désigne l'espace des fonctions bornées sur I , lipschitzienne sur chaque I_n et dont les constantes de Lipschitz sont uniformément bornées. Soit $K(f)$ le sup des constantes de Lipschitz de $f \in B$ sur chaque I_n . Pour $f \in B$, $\|f\| = \max(\|f\|_\infty, K(f))$, $\|\cdot\|$ est une norme sur B qui en fait un espace de Banach. Si $T : I \rightarrow I$ est C^1 et injective sur chaque I_n , alors la mesure de Lebesgue est conforme pour l'opérateur de transfert associé au potentiel $-\log T'$. On suppose que T vérifie la propriété de Markov : pour tout $n \in \mathbb{N}$, TI_n est une union (mod 0) d'éléments de la partition \mathcal{I} et que la partition \mathcal{I} engendre la tribu des boréliens sous T . De tels systèmes sont toujours mesurablement conjugués à un STF (voir page xix), on dit aussi que le système est codé sur un STF, soit Σ le STF associé et \mathcal{T} l'application de conjugaison. Nous dirons que T est dilatante si $T'(x) > 1$ pour tout $x \in \bigcup_n I_n$ et uniformément dilatante s'il existe $D > 1$ tel que $T'(x) \geq D$ pour tout $x \in \bigcup_n I_n$. Lorsque T est uniformément dilatante, le codage est bon dans le sens suivant :

soit $f \in B$, on définit $\tilde{f} : \Sigma \rightarrow \Sigma$ par $\tilde{f}(\tilde{x}) = f(\mathcal{T}(x))$. Pour $r = D^{-1}$, \tilde{f} appartient à L . Cependant, comme on souhaite aussi considérer des applications non uniformément dilatantes de l'intervalle, il est préférable de travailler directement sur I . Les techniques développées dans les chapitres 4 et 5 s'adaptent directement dans le cas où T est uniformément dilatante et demandent quelques modifications dans le cas non uniformément dilatant. Dans ce cadre, les k -cylindres correspondent aux sous-intervalles de I de la forme $\bigcap_{i=0}^{k-1} T^{-i} I_{n_i}$.

Remarque 6.3 Pour que la partition \mathcal{I} engendre la tribu des boréliens sous T , il suffit que T soit dilatante.

Nous allons traiter l'exemple suivant.

Exemple 6.1

Soit $T : I \rightarrow I$ définie de la manière suivante :

T est C^2 , monotone et croissante sur chaque I_n , elle se prolonge en une application continue sur l'adhérence de chaque I_n et $TI_n = I_{n-1} \cup I_n \cup I_{n+1}$ (en convenant que $I_n = \emptyset$ si $n < 0$), nous supposons de plus que T est uniformément dilatante.

Remarquons que les dynamiques ainsi définies sont apériodiques et à portée bornée, elles ne vérifient pas l'hypothèse de recouvrement (page xviii)

6.2.1 Cas affine.

Supposons dans un premier temps que T est affine sur chaque I_n . Notons $\lambda_n = \lambda(I_n)$ et $\rho_n = \frac{1}{T'}(x)$ pour $x \in I_n$, $\rho_n = \frac{\lambda(I_n)}{\lambda(I_{n+1}) + \lambda(I_n) + \lambda(I_{n-1})}$ et \mathcal{L} l'opérateur de transfert associé au potentiel $-\log T'$, \mathcal{L} vérifie :

$$\mathcal{L}\mathbf{1}_n = \rho_{n+1} + \rho_n + \rho_{n-1}.$$

Rappelons l'hypothèse de faible contribution de l'infini (page 61) :

$$\exists n_0 \text{ tel que } \forall n > n_0, (\mathcal{L}_\Phi \mathbf{1})_n = \sup_{x \in [n]} \mathcal{L}_\Phi \mathbf{1}(x) \leq 1, \quad (\mathbf{H})$$

Lemme 6.2 Si la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie l'une des deux propriétés suivantes :

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} < 1$, dans ce cas on dira que la suite λ_n est de type exponentiel
2. $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$ croît vers 1 pour $n \geq n_0$

alors \mathcal{L} vérifie l'hypothèse de faible contribution de l'infini.

Preuve : Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \theta < 1$, alors ρ_n converge vers $\frac{\theta}{\theta^2 + \theta + 1} < 1/3$ et $\mathcal{L}\mathbf{1}_n$ vers $3\frac{\theta}{\theta^2 + \theta + 1} < 1$ ainsi (\mathbf{H}) est vérifiée.

Supposons qu'il existe n_0 tel qu'à partir de n_0 , la suite $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$ croît vers 1, soit $0 < u_n < 1$ tel que pour $n \geq n_0$ $u_{n+1} \leq u_n$ et

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = (1 - u_n),$$

on a pour $n \geq n_0 + 1$:

$$\rho_n^{-1} = 3 - u_n + u_{n-1} + \sum_{i=2}^{\infty} (u_{n-1})^i \geq 3$$

ainsi, $\mathcal{L}\mathbf{1}_n \leq 1$ si $n \geq n_0 + 1$ et (\mathbf{H}) est vérifiée. \square

L'hypothèse (\mathbf{H}) et le fait que λ soit une mesure conforme pour \mathcal{L} impliquent (\mathbf{K}) (voir page 61), nous noterons h la densité invariante et $\mu = h\lambda$. La démonstration du lemme 6.2 montre que si la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de type exponentiel, alors \mathcal{L} vérifie $(\mathbf{Exp2})$, comme T est à portée bornée, l'exemple 5.1 montre que \mathcal{L} vérifie $(\mathbf{Exp1})$, ainsi la décroissance

des corrélations est exponentielle sur l'espace B . D'autre part, il est facile de constater que k défini par $k(x) = \lambda_{n+1} + \lambda_n + \lambda_{n-1}$ si $x \in I_n$ est un point fixe de \mathcal{L}_Φ (donc le seul à normalisation près par le théorème F). Considérons $J_N = \bigcup_{n>N} I_n$. On a

$$|\mu(T^{-N}J_N \cap I_0) - \mu(J_N)\mu(I_0)| = \mu(J_N)\mu(I_0) \text{ car } T^{-n}J_N \cap I_0 = \emptyset.$$

En particulier, on ne peut pas avoir de décroissance exponentielle des corrélations du type (5.8) si la suite λ_n n'est pas majorée par une suite exponentielle. La vitesse de mélange peut néanmoins être précisée dans certains cas.

Proposition 6.3 *Si $\lambda_n = K\gamma^{n^\alpha} + o(\gamma^{n^\alpha})$, $1/2 < \alpha < 1$ alors, pour tout $r > 0$, il existe $C(r)$ tel que pour f telle que $fh \in B$ et $g \in L^\infty$,*

$$|\mu(fg \circ T^n) - \mu(f)\mu(g)| \leq C(r) \frac{1}{n^r} \|fh\| \|g\|_\infty.$$

Preuve : Supposons que $\lambda(I_n) = K\gamma^{n^\alpha} + o(\gamma^{n^\alpha})$, $\alpha < 1$. ρ_n vérifie :

$$\rho_n = \frac{1}{3} - \frac{\alpha^2(\log \gamma)^2}{9n^{2(1-\alpha)}} + o\left(\frac{1}{n^{2(1-\alpha)}}\right).$$

Soit $C < \frac{\alpha^2(\log \gamma)^2}{9}$, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$,

$$\rho_n \leq \frac{1}{3} - \frac{C}{n^{2(1-\alpha)}}.$$

Ainsi, pour $n \geq n_0$,

$$\mathcal{L}\mathbf{1}_n \leq 1 - \frac{3C}{n^{2(1-\alpha)}} : = 1 - \frac{c}{n^{2(1-\alpha)}}.$$

Soit $\beta = 2(1-\alpha) \leq 1$ si $\alpha \geq \frac{1}{2}$, ce que nous supposons dorénavant. En reprenant l'exemple 5.2 page 92, on montre l'estimation suivante.

Lemme 6.4 *Il existe n_1 tel que pour $N \geq n_1$, il existe k_0 tel que pour $k \geq k_0$,*

$$\delta'_{j,k} = \sup_{N \leq n \leq N+kj} \mathcal{L}^k \mathbf{1}_n \leq \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{c}{(N+kj+i)^\beta}\right) \leq \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{(N+kj+i)^\beta}\right)^c.$$

Ainsi, \mathcal{L} vérifie (**S-Exp1**) et les estimations du chapitre 5 (pages 91 et 92) donnent pour f telle que $fh \in B$ et $g \in L^\infty$, $q(j) = j^u$, $0 < u < 1$ et $n = k(j + q(j)) + r$, $j = O(\frac{n}{k})$, si $\beta < 1$,

$$|\mu(fg \circ T^n) - \mu(f)\mu(g)| \leq \text{Cte}(N) [\exp(-c(N+kj)^{1-\beta}) + \sum_{n \geq N+kq(j)} \gamma^{n^\alpha}] \quad (6.2)$$

si $\beta = 1$,

$$|\mu(fg \circ T^n) - \mu(f)\mu(g)| \leq \text{Cte}(N) \left[\frac{1}{j^{(1-u)ck}} + \sum_{n \geq N+kq(j)} \gamma^{n^\alpha} \right]. \quad (6.3)$$

Remarquons que $\sum_{p \geq n} \gamma^{p^\alpha} = O(n^{1-\alpha} \gamma^{n^\alpha})$, on en déduit l'estimation annoncée. \square

Remarque 6.4 Lorsque la convergence à zéro de $\lambda(I_n)$ est moins rapide que γ^{n^α} , $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, par exemple polynomiale, on peut montrer que

$$\mathcal{L}\mathbf{1}_n \leq \left(1 - \frac{C}{n^\beta}\right)$$

pour n suffisamment grand et $\beta > 1$, ceci ne suffit pas pour utiliser les techniques du chapitre 5. Il est peut-être néanmoins possible d'obtenir des majorations de la vitesse de mélange en améliorant l'estimation pour des itérés de \mathcal{L} .

6.2.2 Cas C^2 par morceaux.

Considérons maintenant que T est C^2 sur chaque I_n , $T''(x)$ est uniformément borné par $R > 0$ et T est dilatante. Pour x et y appartenant à I_n on a,

$$|T'(x) - T'(y)| \leq \sup_{z \in I_n} T''(z) |x - y|.$$

Ainsi, en intégrant en y , on obtient :

$$-R\lambda(I_n) + \frac{1}{\rho_n} \leq T'(x) \leq R\lambda(I_n) + \frac{1}{\rho_n}. \quad (6.4)$$

Cette estimation implique, en reprenant la démonstration du lemme 6.2

Lemme 6.5 *Si la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de type exponentiel alors l'opérateur \mathcal{L} est quasi-compact sur l'espace B , il existe une unique mesure invariante absolument continue et elle est exponentiellement mélangeante sur B .*

Si la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie

$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$ croît vers 1 pour $n \geq n_0$

alors il existe une unique mesure invariante absolument continue et elle est mélangeante.

L'estimation (6.4) conduit comme précédemment au résultat suivant.

Proposition 6.6 *Si $\lambda_n = K\gamma^{n^\alpha} + o(\gamma^{n^\alpha})$, $1/2 < \alpha < 1$ alors, pour tout $r > 0$, il existe $C(r)$ tel que pour f telle que $fh \in B$ et $g \in L^\infty$,*

$$|\mu(fg \circ T^n) - \mu(f)\mu(g)| \leq C(r) \frac{1}{n^r} \|fh\| \|g\|_\infty.$$

6.3 Applications non uniformément dilatantes de l'intervalle.

Nous donnons une estimation de la vitesse de mélange pour des applications de l'intervalle de type Gaspard-Wang, admettant une probabilité invariante absolument continue.

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition (mod 0) de I telle que $\lambda(I_n) = \frac{K}{(n+1)^\alpha}$, $K > 0$, $\alpha > 1$. Considérons l'application T affine par morceaux suivante. T est croissante, affine sur chaque I_n , $TI_n = I_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $TI_0 = I$. Cette transformation est une linéarisation d'applications lisses non uniformément dilatantes de l'intervalle considérées par exemple par M. Thaler ([T]), C. Liverani, B. Saussol et S. Vaienti ([L, S, V2]) et introduites par P. Gaspard et X.-J. Wang ([G, W], [Wan]) pour modéliser des phénomènes d'intermittence. Il est connu que T admet une unique mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dont la densité h vérifie $cn \leq h(x) \leq Cn$ si $x \in I_n$ ([La,Si,V]). En particulier, $\mu = h\lambda$ est de masse totale finie si et seulement si $\alpha > 2$. Par ailleurs, cette mesure invariante est mélangeante. Remarquons que la dynamique ainsi définie est sans grandes branches à l'infini et apériodique.

Pour $d > 0$ notons $v_d : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction constante sur les I_n définie par :

$$v_d(x) = v_n = n^d \text{ si } x \in I_n,$$

soit E l'espace des fonctions f telles que

$$\frac{fh}{v_d} \in B \text{ pour tout } d > 1 \text{ et } \sup_{d>1} \left\| \frac{fh}{v_d} \right\| : = \|f\| < \infty$$

Nous allons montrer le résultat suivant.

Proposition 6.7 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C(\varepsilon)$ telle que pour toutes $f \in E$ et $g \in L^\infty$,*

$$|\mu(fg \circ T^n) - \mu(f)\mu(g)| \leq C(\varepsilon) \|f\| \|g\|_\infty \frac{1}{n^{\alpha-2-\varepsilon}}. \tag{V}$$

Remarquons que comme $cn \leq h(x) \leq Cn$ si $x \in I_n$, les fonctions de B appartiennent à E et pour $f \in B$, on a $\|f\| \leq \text{Cte} \|f\|$.

Remarque 6.5 Soit $J_N = \bigcup_{n \geq N} I_n$, pour tout N , $T^{-N} I_0 \cap J_N = \emptyset$, ainsi

$$|\mu(T^{-N} I_0 \cap J_N) - \mu(I_0)\mu(J_N)| = \mu(I_0)\mu(J_N) \geq \frac{\text{Cte}}{N^{\alpha-2}}.$$

Sur l'espace B , la vitesse de mélange ne peut donc pas être inférieure à $\frac{1}{n^{\alpha-2}}$. De nombreux résultats sur la décroissance des corrélations d'applications de ce type (linéarisé ou non) existent. Les plus anciens sont ceux de A. Lambert, S. Siboni, S. Vaienti ([La,Si,V]), M. Mori ([Mo]) et N. Chernov ([Ch]). A.M. Fisher et A. Lopes ([F, L]) et S. Isola ([I]) obtiennent une vitesse en $\frac{1}{n^{\alpha-2}}$ pour des observables qui sont des combinaisons linéaires finies de fonctions caractéristiques de cylindres. Pour le modèle lisse, en utilisant des techniques d'approximation, C. Liverani, B. Saussol et S. Vaienti ([L, S, V2]) obtiennent une vitesse en $\frac{\log n}{n^\alpha}$ pour des fonctions lipschitziennes sur l'intervalle I , cet espace est inclus dans E . Par une méthode de couplage, L.-S. Young ([Y1]) obtient, sur le même espace, une vitesse en $\frac{1}{n^\alpha}$; dans [H] H. Hu montre le même résultat et que cette vitesse est optimale sur l'espace des fonctions lipschitziennes sur I . Plus récemment, M. Pollicott et M. Yuri ([Po,Y]) obtiennent une estimation de la décroissance des corrélations sur un espace fonctionnel contenant $\{\frac{1}{x^\gamma}, 0 < \gamma < \frac{1}{\alpha}\}$.

Preuve de la proposition 6.7 : L'opérateur de transfert \mathcal{L}_Φ associé au potentiel $\Phi = -\log T'$ vérifie

$$\mathcal{L}_\Phi \mathbf{1}_n = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^\alpha + \lambda(I_0).$$

La densité h n'étant pas bornée, \mathcal{L}_Φ ne vérifie pas l'hypothèse **(K)**. C'est pourquoi on a recouru à un changement de potentiel.

Soit \mathcal{L}_d l'opérateur correspondant au changement de potentiel associé à v_d , $\mathcal{L}_d f = \frac{1}{v_d} \mathcal{L}_\Phi(f v_d)$.

$$\mathcal{L}_d \mathbf{1}_n = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{\alpha-d} + \frac{\lambda(I_0)}{n^d}.$$

Ainsi, pour n suffisamment grand, $\mathcal{L}_d \mathbf{1}_n \leq 1$, c'est-à-dire que \mathcal{L}_d vérifie **(H)**. Ceci implique que \mathcal{L}_d vérifie **(K)** si la mesure conforme $m_d = v_d \lambda$ reste de masse totale finie : le potentiel est constant sur les I_n donc pour $x \in I_n$,

$$\mathcal{L}_d^k \mathbf{1}(x) = \frac{1}{m_d(I_n)} \int_{I_n} \mathcal{L}_d^k \mathbf{1} d m_d,$$

on montre alors **(K)** en procédant comme page 61. On a $m_d(I) = \sum v_n \lambda(I_n)$, $m_d(I)$ est fini si et seulement si $\alpha - d > 1$, comme $d > 1$, on retrouve la condition $\alpha > 2$ qui garantit l'existence d'une probabilité μ invariante et absolument continue. Dans la suite, nous supposons que $\alpha > 2$, $\alpha - d > 1$ et que la mesure m_d est normalisée (i.e. $m_d(I) = 1$). Notons aussi h_d le point fixe de \mathcal{L}_d tel que $m_d(h_d) = 1$, la mesure μ vérifie $\mu = h_d m_d = h \lambda$. Montrons que \mathcal{L}_d vérifie **(S-Exp1)**. Fixons $0 < \eta < \alpha - d$, soit $\beta = \alpha - d - \eta$.

Lemme 6.8 *Il existe $n_1 = n_1(d, \eta)$, il existe k_0 tels que pour $N \geq n_1$ et $k \geq k_0$,*

$$\delta'_{k,j} = \sup_{N \leq n \leq N+kj} \mathcal{L}_d^k \mathbf{1}_n \leq \prod_{\ell=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{N + kj + \ell + 2} \right)^\beta$$

Preuve : L'opérateur \mathcal{L}_d vérifie **(K)**, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que $\|\mathcal{L}_d^n \mathbf{1}\|_\infty \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Fixons dans un premier temps n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $(1 - \frac{1}{n+2})^\eta + \frac{2^\beta \lambda(I_0)M}{n^d} \leq 1$. Ce choix de n_0 implique pour $n \geq n_0$, $\mathcal{L}_d \mathbf{1}_n \leq (1 - \frac{1}{n+2})^\beta$:

$$\mathcal{L}_d \mathbf{1}_n = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{\alpha-d} + \frac{\lambda(I_0)}{n^d} \leq \left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^\beta$$

si $(1 - \frac{1}{n+1})^\eta + \frac{\lambda(I_0)}{n^d} (\frac{n+2}{n+1})^\beta \leq 1$, ce qui est le cas par le choix de n_0 . Nous allons montrer l'estimation suivante par récurrence :

$$\text{pour tout } n \geq n_0 + k, \mathcal{L}_d^k \mathbf{1}_n \leq \prod_{\ell=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{n + \ell + 2} \right)^\beta.$$

Nous venons de montrer que cette estimation est vraie pour $k = 1$, supposons qu'elle soit vraie jusqu'au rang k . Soit $n \geq n_0 + k + 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d^{k+1} \mathbf{1}_n &= \left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{\alpha-d} \mathcal{L}_d^k \mathbf{1}_{n+1} + \frac{\lambda(I_0)}{n^d} \mathcal{L}_d^k \mathbf{1}_0 \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{\alpha-d} \prod_{\ell=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{n + \ell + 3} \right)^\beta + \frac{\lambda(I_0)M}{n^d} \\ &\leq \prod_{\ell=0}^k \left(1 - \frac{1}{n + \ell + 2} \right)^\beta \end{aligned}$$

si $(1 - \frac{1}{n+2})^\varepsilon + \frac{\lambda(I_0)M}{n^d} \prod_{\ell=0}^k \left(1 - \frac{1}{n + \ell + 2} \right)^{-\beta} \leq 1$, or,

$$\begin{aligned} \prod_{\ell=0}^k \left(1 - \frac{1}{n + \ell + 2} \right)^{-\beta} &= \left(\frac{n+k+2}{n+2} \right)^\beta \\ &= \left(1 + \frac{k}{n+2} \right)^\beta \leq 2^\beta \text{ car } n \geq n_0 + k + 1. \end{aligned}$$

le choix de n_0 donne l'estimation souhaitée. Pour conclure la preuve du lemme, il reste à estimer $\mathcal{L}_d^k \mathbf{1}_n$ pour $N \leq n < n_0 + k$.

$$\mathcal{L}_d^{k+1} \mathbf{1}_n \leq \left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{\alpha-d} \mathcal{L}_d^k \mathbf{1}_{n+1} + \frac{\lambda(I_0)M}{n^d},$$

par récurrence, on montre,

$$\mathcal{L}_d^k \mathbf{1}_n \leq \prod_{\ell=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{n+j+2}\right)^{\alpha-d} + \frac{\lambda(I_0)M}{n^d} \left[1 + \sum_{p=2}^{k-1} \prod_{\ell=1}^p \left(1 - \frac{1}{n+\ell+2}\right)^{\alpha-d}\right].$$

Ceci conduit à

$$\mathcal{L}_d^k \mathbf{1}_n \leq \left(\frac{n+1}{n+k}\right)^{\alpha-d} + \frac{K}{n^{d-1}} \text{ où } K \text{ est une constante ne dépendant ni de } n \text{ ni de } k.$$

Soit $(\frac{1}{2})^{\alpha-d} < \gamma < \gamma' < 1$, choisissons n_1 tel que pour $n \geq n_1$, $\frac{K}{n^{d-1}} < \gamma - \gamma'$ et $N \geq n_1$, choisissons k_0 tel que pour $k \geq k_0$, $(1 - \frac{k}{n_0+2k})^{\alpha-d} < \gamma'$, comme, $N \leq n < n_0 + k$, $\frac{n+1}{n+k} \leq 1 - \frac{k}{n_0+2k}$, ainsi $\mathcal{L}_d^k \mathbf{1}_n \leq \gamma$. Ces estimations suffisent pour obtenir le lemme. \square

Ainsi,

$$\begin{aligned} \delta'_{k,j} &\leq \prod_{\ell=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{N+kj+\ell+2}\right)^\beta \\ &= \left(\frac{N+kj+2}{N+k(j+1)+2}\right)^\beta \\ &= \left(1 - \frac{k}{N+k(j+1)+2}\right)^\beta \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{N+k(j+1)+2}\right)^{\beta k}, \text{ et } \mathcal{L}_d \text{ vérifie (S-Exp1)}. \end{aligned}$$

Pour appliquer la méthode de la section 5.2, il suffit d'estimer $K_j(\mathcal{L}_d^k f)$ pour $f \in C_{a,b,c}^{s,t,j}$. Notons $\rho(x) = (T'(x))^{-1}$, $\rho_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} \rho(T^i x)$ et $g_k(x)$ est défini par :

$$\mathcal{L}_d^k \mathbf{1}(y) = \sum_{T^k y' = y} g_k(y').$$

Soient x et $y \in I_n$, $n \leq N+k(j-1)$ et $f \in B$, en utilisant que T est sans grandes branches à l'infini, on obtient :

$$|\mathcal{L}_d^k f(x) - \mathcal{L}_d^k f(y)| \leq K_j(f) d(x, y) \sum_{T^k x' = x} g_k(x') \rho_k(x'),$$

- $\rho_k \leq 1$, ainsi, pour $n \geq N$

$$|\mathcal{L}_d^k f(x) - \mathcal{L}_d^k f(y)| \leq K_j(f) d(x, y) \delta'_{k,j}$$

- Soit $0 \leq n < N$. Pour tout $p \leq k$ et $z \in \Sigma$, on a $\rho_k(z) \leq \rho_p(z)$. Ainsi,

$$\sum_{T^k x' = x} g_k(x') \rho_k(x') \leq \sum_{T^k x' = x} g_k(x') \rho_p(x') = \mathcal{L}_d^k \rho_p(x),$$

pour $x \in \llbracket 0, N \rrbracket$, le théorème F appliqué à \mathcal{L}_d implique que $\mathcal{L}_d^k \rho_p(x)$ converge vers $h_d(x) m_d(\rho_p)$ uniformément en x . Or, le théorème ergodique de Birkhoff appliqué à $\log \rho$ et le fait que $\mu(\log \rho) < 0$ impliquent que $\rho_p(z)$ converge vers zéro quand p tend vers l'infini pour μ -presque tout z . On a $\mu = h_d m_d$, ainsi $\rho_p(z)$ converge vers zéro quand p tend vers l'infini pour m_d -presque tout z . Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $m_d(\rho_p)$ tend vers zéro si p tend vers l'infini. Il existe donc $k(N)$ tel que pour $k > k(N)$,

$$\sum_{T^k x' = x} g_k(x') \rho_k(x') \leq \mathcal{L}_d^k \rho_p(x) \leq \delta'_{k,j}.$$

Finalement, pour $k \geq k(N)$, on a $K_{j-1}(\mathcal{L}_\Phi^k f) \leq K_j(f) \delta'_{k,j}$. Ainsi, avec les notations de la section 5.2, pour $k \geq \max(k(N), k_0)$ et $0 < \gamma < 1$

$$\mathcal{L}_d^k C_{a,b,c}^{s,t,j} \subset C_{\gamma a, \delta_j b, \delta_j c}^{s,t,j-1}$$

et le diamètre hyperbolique de $\mathcal{L}_d^k C_{a,b,c}^{s,t,j}$ dans $C_{\gamma a, \delta_j b, \delta_j c}^{s,t,j-1}$ est majoré par $2 \log \frac{1+\delta_j}{1-\delta_j}$. Le point fixe de \mathcal{L}_d vérifie $h_d = \frac{h}{v_d}$. Si f est telle que $f h_d = \frac{f h}{v_d} \in B$ et $g \in L^\infty$, l'estimation (5.13) donne pour $q(j) = j^u$, $0 < u < 1$ et $n = k(j + q(j)) + r$, $j = O(\frac{n}{k})$,

$$\begin{aligned} & |\mu(fg \circ T^n) - \mu(f)\mu(g)| \\ & \leq \text{Cte} \left[\log(N + k(j + q(j))) \left(\frac{N + kq(j)}{N + kj} \right)^{\beta k} + m([N + kq(j)]^c) \right] \left\| \frac{f h}{v_d} \right\| \|g\|_\infty \\ & \leq \text{Cte}(d, u) \left[\frac{1}{j^{(1-u)\beta k}} + \frac{1}{j^{u(\alpha-d-1)}} \right] \left\| \frac{f h}{v_d} \right\| \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Soit f appartenant à E . Fixons $\varepsilon > 0$ et $1 < d < 1 + \varepsilon$, soient $u = \frac{\alpha-2-\varepsilon}{\alpha-d-1} < 1$ et $k > \frac{\alpha-2-\varepsilon}{\beta(1-u)}$, alors

$$|\mu(fg \circ T^n) - \mu(f)\mu(g)| \leq \text{Cte}(\varepsilon) \frac{1}{j^{\alpha-2-\varepsilon}} \|f\| \|g\|_\infty.$$

Comme $j = O(\frac{n}{k})$ et $k = k(\varepsilon)$ on en déduit :

$$|\mu(fg \circ T^n) - \mu(f)\mu(g)| \leq \text{Cte}(\varepsilon) \frac{1}{n^{\alpha-2-\varepsilon}} \|f\| \|g\|_\infty.$$

Ceci termine la preuve de la proposition. □

Annexe : codage pour des petites perturbations de difféomorphismes

Axiome A

Le cadre de la section 3.1 peut représenter un codage pour des petites perturbations de difféomorphismes Axiome A. L'objet de cette section est de construire ce codage. Il a été réalisé à l'aide d'une idée de C. Bonatti (preuve du lemme A.2).

Soit f un difféomorphisme C^1 Axiome A sur une variété compacte Riemannienne M , soit $\Lambda(f) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n U$ son ensemble hyperbolique, où U est un voisinage fondamental de $\Lambda(f)$. Nous donnons une construction d'un codage pour des petites perturbations de f .

Soit (Ω, S, P) un système dynamique inversible abstrait, B un petit voisinage de f pour la topologie C^1 et une application mesurable $g : \Omega \rightarrow B$. Notons $g(n, \omega) = g_{S^{n-1}\omega} \circ \dots \circ g_\omega$ pour $n \geq 0$ et $g(n, \omega) = g_{S^n\omega}^{-1} \circ \dots \circ g_{S^{-1}\omega}^{-1}$ pour $n < 0$. Soit $\Lambda_\omega = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g(n, \omega)^{-1} U$. Il est clair que $g_\omega \Lambda_\omega \subset \Lambda_{S\omega}$.

Proposition : codage *Il existe une sous-décalage Σ (bilatère) de type fini sur un alphabet fini et pour tout $\omega \in \Omega$, il existe une application surjective π_ω telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \\ \pi_\omega \downarrow & & \downarrow \pi_{S\omega} \\ \Lambda_\omega & \xrightarrow{g_\omega} & \Lambda_{S\omega} \end{array}$$

et l'ensemble des points de Λ_ω n'ayant qu'un seul antécédant est un G_δ dense.

T. Bogenschütz et V.M. Gundlach [Bog,G] ont obtenu un codage pour des systèmes dynamiques aléatoires (pas nécessairement des perturbations) dilatants, sur un sous-décalage de type fini aléatoire.

Soit (Σ, σ) le sous-décalage (bilatère) de type fini associé à f ([Bo]), nous avons le

diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \Lambda(f) & \xrightarrow{f} & \Lambda(f), \end{array}$$

où π est continue et surjective et l'ensemble des points de Λ_ω n'ayant qu'un seul antécédant est un G_δ dense. Il suffit ainsi de construire un homéomorphisme $\psi_\omega : \Lambda_\omega \mapsto \Lambda(f)$. Cette construction est faite à l'aide de deux "lemmes de pistages aléatoires". Rappelons le lemme de pistage classique.

Une suite $\{x_i\}_{a < i < b}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ est une δ -pseudo-orbite pour f si $d(fx_i, x_{i+1}) < \delta$, pour $a < i < b$. Une orbite $o(x) = \{f^i x \mid i \in \mathbb{Z}\}$ ε -piste la pseudo-orbite $\{x_i\}_{a < i < b}$, si $d(f^i x, x_i) < \varepsilon$ pour $a < i < b$. Le résultat suivant est fondamental dans la théorie des difféomorphismes hyperboliques, il a été tout d'abord obtenu par D.V. Anosov [A] avec une formulation un peu différente. La formulation générale peut être trouvée dans [Bo].

Lemme de pistage. *Soit f un difféomorphisme Axiom A d'ensemble hyperbolique Λ . Pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe $\delta > 0$ tel que toute δ -pseudo orbite dans Λ soit ε -psitée par une orbite dans Λ .*

Commençons la construction du codage. La preuve du lemme suivant est directement adaptée de celle de S. Newhouse (Théorème 3.7 [N]). Rappelons qu'un difféomorphisme Axiom A est expansif dans le sens suivant. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $d(f^n x, f^n y) < \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ implique $x = y$. Un tel $\varepsilon > 0$ est appelé constante d'expansivité.

Lemme A.1 *Soit ε une constante d'expansivité pour f . Si B est assez petite, pour tout $x \in \Lambda_\omega$ il existe un unique $z = \psi_\omega x \in \Lambda(f)$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, d(f^n z, g(n, \omega)x) < \varepsilon/2.$$

De plus, $\psi_\omega : \Lambda_\omega \rightarrow \Lambda(f)$ est continue.

Preuve : Choisissons :

1. $\delta_1 < \varepsilon$ tel que toute δ_1 -pseudo-orbite pour f soit $\varepsilon/4$ -pistée.
2. $\delta < \delta_1/3$, $\delta < \varepsilon/4$ tel que $d(x, y) < \delta \implies d(fx, fy) < \delta_1/3$.

On peut toujours supposer que $U \subset B_\delta \Lambda(f)$ et $B \subset B_{C^1}(f, \delta/3)$. Soit x un élément de $\Lambda_\omega = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g(n, \omega)^{-1} U$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe $x_n \in \Lambda(f)$ tel que $d(x_n, g(n, \omega)x) < \delta$.

On a alors :

$$\begin{aligned} d(fx_n, x_{n+1}) &\leq d(fx_n, fg(n, \omega)x) + d(fg(n, \omega)x, g(n+1, \omega)x) + d(g(n+1, \omega)x, x_{n+1}) \\ &< \delta_1. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme de pistage, on obtient $z = \psi_\omega x \in \Lambda(f)$ de sorte que $d(f^n z, x_n) < \varepsilon/4$. Il est alors facile de voir que z convient. De plus, l'unicité provient du choix de ε .

Montrons que ψ_ω est continue. Si ψ_ω n'était pas continue en $x \in \Lambda_\omega$, alors il existerait $\delta_0 > 0$ et une suite $y_k \in \Lambda_\omega$ telle que y_k converge vers x et $d(\psi_\omega x, \psi_\omega y_k) > \delta_0$. Par compacité, on peut toujours supposer que $\psi_\omega y_k$ converge vers un point $z \in \Lambda(f)$, on a alors $d(\psi_\omega x, z) > \delta_0$. Maintenant, pour tout n on a :

$$\begin{aligned} d(f^n \psi_\omega x, f^n z) &\leq d(f^n \psi_\omega x, g(n, \omega)x) + d(g(n, \omega)x, g(n, \omega)y_k) \\ &\quad + d(g(n, \omega)y_k, f^n \psi_\omega y_k) + d(f^n \psi_\omega y_k, f^n z) \\ &< \varepsilon + d(g(n, \omega)x, g(n, \omega)y_k) + d(f^n \psi_\omega y_k, f^n z). \end{aligned}$$

Ainsi, si k tend vers l'infini, on obtient pour tout n , $d(f^n \psi_\omega x, f^n z) \leq \varepsilon$, ceci contredit le choix de ε . \square

Il reste à montrer que ψ_ω est bijective.

Lemme A.2 *Pour η et B suffisamment petits, pour $z \in \Lambda$, il existe un unique $x \in \Lambda_\omega$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z} d(f^n z, g(n, \omega)x) < \eta$.*

Preuve : Pour montrer ce lemme, rappelons quelques résultats qui se déduisent directement de la théorie de difféomorphismes hyperboliques ([N]).

Si B est un voisinage suffisamment petit de f , il existe un voisinage fondamental U de $\Lambda(f)$, et $\lambda > 1$ tels que :

1. La décomposition hyperbolique $T_x M = E_x^u \oplus E_x^s$, $x \in \Lambda(f)$ s'étend en une décomposition continue $T_x M = E_x^1 \oplus E_x^2$, $x \in U$,
2. pour $g \in B$, $x \in U$, $T_x g$ préserve un champ de cône instable et est une λ -dilatation sur ce champ de cône, c'est à dire,

$$C_{x,\alpha}^u = \{v = v_1 + v_2 \in T_x M, v_1 \in E_x^1, v_2 \in E_x^2 / |v_1| < \alpha |v_2|\}$$

$$T_x g(C_{x,\alpha}^u) \subset C_{gx,\alpha}^u \text{ et pour } v \in C_{x,\alpha}^u, |T_x g v| > \lambda |v|,$$

3. pour $g \in B$, $x \in U$, $T_x g^{-1}$ préserve un champ de cône stable et est une λ -dilatation sur ce champ de cône, c'est à dire,

$$C_{x,\alpha}^s = \{v = v_1 + v_2 \in T_x M, v_1 \in E_x^s, v_2 \in E_x^u / |v_1| \geq \alpha|v_2|\}$$

$$T_x g^{-1}(C_{x,\alpha}^s) \subset C_{g^{-1}x,\alpha}^s \text{ et pour } v \in C_{x,\alpha}^s, |T_x g^{-1}v| > \lambda|v|.$$

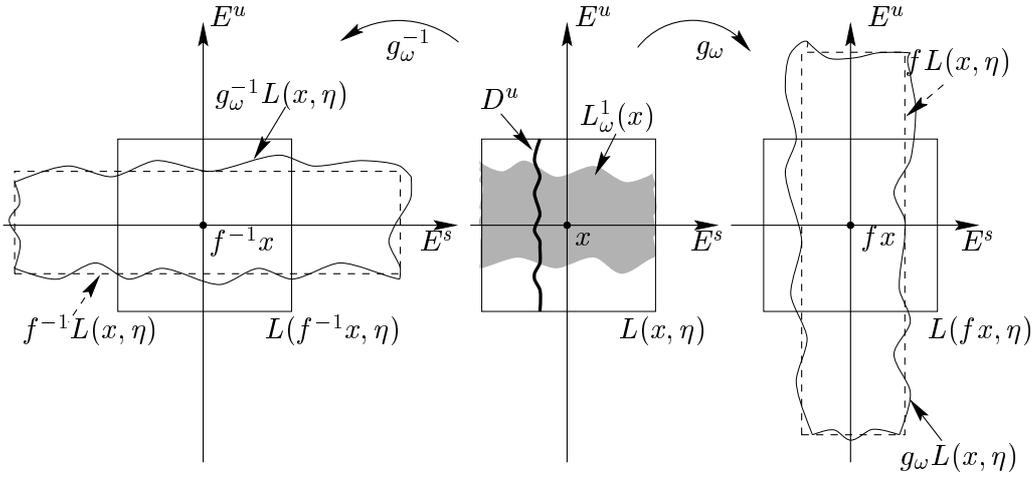


FIGURE 6.1

Soit $z \in \Lambda(f)$ et $L(z, \eta)$ un petit voisinage de Liapunov ([Po1]) de z , inclus dans U , (c'est à dire $f(L(x, \eta))$ intersecte $L(fx, \eta)$ transversalement dans le sens que leur configuration est homéomorphe à la figure 6.1). On appellera *disque stable* (resp. *disque instable*) tout C^1 disque D tel que pour tout $x \in D \cap U$, $T_x D \subset C_{x,\alpha}^s$ (resp. $T_x D \subset C_{x,\alpha}^u$). Pour $A \subset M$, on appelle *u-largeur* (resp. *s-largeur*) $\ell^u(A) = \max\{\text{diam} D^u \cap A, D^u \text{ disque instable}\}$ (resp. $\ell^s(A) = \max\{\text{diam} D^s \cap A, D^s \text{ disque stable}\}$).

Il est clair que, $\ell^s(g_\omega L(f^{-1}x, \eta)) \leq \lambda^{-1} \ell^s L(f^{-1}x, \eta)$ et $\ell^u(g_\omega^{-1} L(fx, \eta)) \leq \lambda^{-1} \ell^u L(fx, \eta)$. Pour $\omega \in \Omega$, $x \in \Lambda(f)$, soit $L_\omega^1(x) = g_{S^{-1}\omega}^{-1}[L(fx, \eta)] \cap L(x, \eta)$ (voir figure) et par induction, $L_\omega^n(x) = g_{S^{-n}\omega}^{-1}[L_{S^{-n+1}\omega}^{n-1}(f^{n-1}x)] \cap L(x, \eta)$. On obtient ainsi une suite décroissante de sous ensembles de $L(x, \eta)$ dont la u-largeur tend vers zéro ($\ell^u(L_\omega^n(x)) \leq \lambda^{-n}$). De même, soit $R_\omega^1(x) = g_\omega[L(f^{-1}x, \eta)] \cap L(x, \eta)$ et par induction, $R_\omega^n(x) = g_\omega[R_{S^{n-1}\omega}^{n-1}(f^{-n+1}x)] \cap L(x, \eta)$. On obtient une suite décroissante de sous ensembles de $L(x, \eta)$ dont la s-largeur tend vers zéro ($\ell^s(R_\omega^n(x)) \leq \lambda^{-n}$), $x = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_\omega^n(x) \cap R_\omega^n(x)$ convient. De plus, tout x vérifiant le lemme appartient à $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_\omega^n(x) \cap R_\omega^n(x)$, ceci implique l'unicité. \square

Remarque 6.6 Nous avons codé la dynamique aléatoire sur un décalage bilatère (i.e. $\Sigma \subset A^{\mathbb{Z}}$). Le passage du décalage bilatère au décalage unilatère s'effectue comme dans le cas déterministe ([Bo], [Pa, Po], [Po2]). Si F est un potentiel aléatoire appartenant à $L^1(\Omega, C(\Sigma))$, on construit un potentiel $\widetilde{F} \in L^1(\Omega, C(\Sigma))$ ne dépendant pas du passé : $\widetilde{F}_\omega(x) = \widetilde{F}_\omega(y)$ si $x_i = y_i$ pour $i \geq 0$ et une application $u \in L^1(\Omega, C(\Sigma))$ tels que

$$F_\omega(x) = \widetilde{F}_\omega(x) + u_\omega(x) - u_\omega(\sigma x).$$

Cette relation implique que \widetilde{F}_ω et F_ω ont les mêmes états d'équilibre. De plus, on a $v_n(\widetilde{F}_\omega) = v_{\frac{n}{2}}(F_\omega)$ (cf [Po2]).

Perspectives

Tout au long de ce travail, nous avons cherché à estimer la décroissance des corrélations pour des systèmes Markoviens mélangeants. Ces estimations permettent de dégager des propriétés probabilistes de ces systèmes : théorème de la limite centrale, stabilité stochastique. A chaque fois, la technique utilisée repose sur l'étude de l'opérateur de transfert. Les résultats obtenus pourraient être développés et approfondis dans les directions suivantes.

1. Dans le cas où l'opérateur de transfert, comme opérateur sur un espace de Banach B , n'est pas quasi-compact, le lien entre le spectre de l'opérateur et la décroissance des corrélations pour des fonctions de B n'est pas explicite. Une première approche pour préciser ce lien pourrait être d'étudier la fonction zêta dynamique associée et plus particulièrement les singularités de cette fonction.
2. D'autres théorèmes limites peuvent être obtenus à partir d'une bonne estimation du mélange. Plus particulièrement, le problème de l'estimation du temps d'entrée dans les cylindres peut être abordé.
3. Dans tout ce travail, les systèmes dynamiques étudiés étaient Markoviens. Dans le cadre d'un alphabet dénombrable, la θ -variation définie par X. Bressaud ([Bre]) pourrait permettre d'obtenir des résultats pour des sous-décalages non Markoviens. Pour un n -cylindre $[i_1, \dots, i_n]$, soit $v_{i_1, \dots, i_n}(f)$ la variation de f sur ce cylindre :

$$v_{i_1, \dots, i_n}(f) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in [i_1, \dots, i_n]\}$$

pour $0 < \theta < 1$, la θ -variation généralise la notion de fonction à variation bornée sur l'intervalle :

$$V_\theta(f) = \sum_{n \geq 1} \theta^n \sum_{i_1, \dots, i_n} v_{i_1, \dots, i_n}(f)$$

Les techniques mises en œuvre au chapitre 5 pourraient être adaptée pour estimer la décroissance des corrélations, pour des fonctions à θ -variation bornée, pour des sous-décalages non Markoviens, lorsque l'opérateur de transfert n'est pas quasi-compact. Dans le même ordre d'idées, la condition que σ est sans grandes branches à l'infini est assez forte. Les techniques développées dans la section 5.2 devrait s'adapter pour des systèmes possédant des grandes branches à l'infini, à condition que la contribution à l'opérateur de transfert de ses branches soit suffisamment faible.

4. Enfin, les résultats obtenus pour des applications non uniformément dilatantes et linéaires par morceaux de l'intervalle (chapitre 6) pourraient être étendus à des applications C^2 par morceaux en considérant des cônes de fonctions C^1 par morceaux dont le comportement de la dérivée est spécifié. Ce point de vue a été adopté dans [F,S 2] et [L, S, V2].

Par ailleurs, dans [K, T], T. Krüger et S. Troubetzkoy codent des difféomorphismes non uniformément hyperboliques et $C^{1+\alpha}$ sur un STF, sur un alphabet dénombrable, localement compact. Aussi, il paraît intéressant de relier les STF considérés ici à ceux construits par T. Krüger et S. Troubetzkoy.

Bibliographie

- [A,D,U] J. AARONSON, M. DENKER & M. URBANSKI *Ergodic theory for Markov fibred systems and parabolic rational maps*. Trans. Amer. Math. Soc. (1993), **337** (2), 495-548.
- [A,D] J. AARONSON & M. DENKER *Local limits theorems for Gibbs-Markov maps*. (1998).
- [A] D.V. ANOSOV *Geodesic flows and closed Riemannian manifolds with negative curvature*. Proc. Steklov Inst.Math. **90** (1967).
- [Ba] V. BALADI *Correlation spectrum of quenched and annealed equilibrium states for random expanding maps.*, Comm. Math. Phys. (1997) **186**, 671-700
- [B, K] V. BALADI & G. KELLER. *Zeta functions and transfer operator for Piecewise monotone transformations*. Commun. Math. Phys. (1990), **127**, 459-477.
- [B,K,S] V. BALADI, A. KONDAH, B. SCHMITT *Random correlations for small perturbations of expanding maps*. Random & Comput. Dyn., (1996) **4**, 179-204.
- [Bi1] G. BIRKHOFF *Extensions of Jentzsch's theorem*. T.A.M.S. (1957), **85**, 219-227.
- [Bi2] G. BIRKHOFF *Lattice theory (3rd edition)*. Amer. Math. Soc. (1967).
- [Bog1] T. BOGENSCHÜTZ *Entropy, pressure and a variational principle for random dynamical systems*. Rand. & Comput. Dynamics (1992) **1**, 219-227.
- [Bog2] T. BOGENSCHÜTZ *Stochastic stability of equilibrium states*. Rand. & Comput. Dynamics (1996) **4(2 & 3)**, 85-98.

- [Bog,G] T. BOGENSCHÜTZ and V. M. GUNDLACH *Symbolic dynamics for expanding random dynamical systems*. Rand. & Comput. Dynamics (1992-93) **1(2)**, 219-227.
- [Bo] R. BOWEN *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*. Lect. Notes in Math. (1975), **470** Springer Verlag.
- [Bre] X. BRESSAUD *Opérateurs de transfert sur le décalage à alphabet dénombrable et applications*. (1996) Thèse de l'Université de Paris 6.
- [B,F,G] X. BRESSAUD, R. FERNÁNDEZ & A. GALVES *Decay of correlations for non Hölderian dynamics. A coupling approach*. (1998) Prépublication.
- [Bro] A. BROISE *Aspects stochastiques de certains systèmes dynamiques : Transformations dilatantes de l'intervalle, Fractions continues multidimensionnelles*. (1994) Thèse de l'Université de Rennes1.
- [Buz1] J. BUZZI *Absolutely continuous S.R.B. for random Lasota-Yorke maps*. (1998)
- [Buz2] J. BUZZI *Exponential decay of correlations for random Lasota-Yorke maps*. (1998)
- [Ch] N. CHERNOV *Markov approximations and decay of correlations for Anosov flows*. Prépublication.
- [Co] P. COLLET *Some ergodic properties of maps of the interval*. Dynamical and disordered systems. R. Bamon, J.M. Gambaudo and S. Martinez ed. - Herman (1996).
- [C, I] P. COLLET, S. ISOLA *On the essential spectrum of the transfer operator for expansive Markov maps*. Comm. Math. Phy. (1991), **139**, 551-557.
- [D, S] M. DUNFORD, J.T. SCHWARTZ *Linear operators, Part I*. Interscience (1957).
- [Du] R. DURRETT *Probability : Theory and examples*. Duxbury Press, Belmont, California (1991).
- [F,S 1] P. FERRERO, B. SCHMITT *Ruelle Perron Frobenius theorems and projective metrics*. Colloque Math. Soc. J. Bolyai Random Fields. Estergom (Hungary) (1979).

- [F,S 2] P. FERRERO, B. SCHMITT *On the rate of convergence for some limit ratio theorems related to endomorphisms with a non regular invariant density*. Prébuplication (1994).
- [F, L] A.M. FISHER, A. LOPES *Polynomial decay of correlations and the central limit theorem for the equilibrium state of a non-Hölder potential*. (1997).
- [G, W] P. GASPARD & X.J. WANG. Proc. Math. Acad. Sci. USA (1988) **85** 4591.
- [Go] P. GORA *Properties of invariant measures for piecewise expanding one-dimensional transformations with summable oscillations of derivative*. Erg. Th. and Dyn. Syst. (1994), **14**, 475-492.
- [Gor] M.I. GORDIN *The central limit theorem for stationary processes*. Soviet. Math. Dokl. (1969), **10**, (5), 1174-1176.
- [G, L] M.I. Gordin & B. A. Lifshitz *The central limit theorem for stationary markov processes*. Soviet Math. Dokl., (1978), **19** (2), 392-394.
- [G,H] Y. GUIVARC'H, J. HARDY *Théorèmes limites pour une classe de chaîne de Markov et application aux difféomorphismes d'Anosov*. Ann. Ins. Poincaré, (1988), **24**, (1), 73-98.
- [H, K] F. HOFBAUER, G. KELLER. *Ergodic properties of invariant measures for piecewise monotonic transformations*. Math. Zeitschrift. (1982), **180**, 119-140.
- [H] H. HU *Decay of Correlations for Maps with Indifferent Fixed Points* (1998) prépublication.
- [I, L] I. M. IBRAGIMOV, Y. LINNIK *Independent and stationary sequences of random variables* Walters-Noardhoff Pub. Groningen (1971)
- [I] S. ISOLA *On the rate of convergence to equilibrium for countable ergodic Markov chains*. Prépuplication (1997).
- [Ka] T. KATO *Perturbation theory for linear operators*. Springer-Verlag (1984).
- [Kh,Ki] K. KHANIN & Y. KIFER *Thermodynamic formalism for random transformations and statistical mechanics*. [CA] Bunimovich, L. A. (ed.) et al., Sinai's

- Moscow seminar on dynamical systems. Providence, RI : American Mathematical Society, (ISBN 0-8218-0456-1/hbk). Transl., Ser. 2, Am. Math. Soc. (1996), **171**, 107-140.
- [Ki1] Y. KIFER *Ergodic theory of random perturbations*. Birkhäuser, Boston Basel (1986).
- [Ki2] Y. KIFER *Random perturbations of dynamical systems*. Birkhäuser, Boston Basel (1988).
- [Ki3] Y. KIFER *Equilibrium states for random expanding transformations*. Random Comput. Dynamical (1992) **1**, 1-31.
- [K,M,S] A. KONDAH, V. MAUME and B. SCHMITT *Vitesse de convergence vers l'état d'équilibre pour des dynamiques markoviennes non höldériennes*. Ann. Inst. Poincaré Sec. Prob. Stat. (1997) **33** (6) 675-695.
- [K, T] T. KRUGER & S. TROUBETZKOY *Symbolic dynamics via shadowing for diffeomorphisms with non zero exponents*. (1996).
- [La,Si,V] A. LAMBERT, S. SIBONI & S. VAIENTI *Statistical properties of a non-uniformly hyperbolic map of the interval*. Journ. of Stat. Physics. (1993), **72**, 1305-1330.
- [Le] F. LEDRAPPIER *Some properties of absolutely invariant measures on an interval*. Erg. Th. and Dyn. Syst. (1981) **1**.
- [L, W] F. LEDRAPPIER & P. WALTERS *A relativized variational principle for continuous transformations*. J. London Math. Soc. (1977), **16** 2, 568-576.
- [Li1] C. LIVERANI *Decay of Correlations in Piecewise Expanding maps*. Journal of Statistical Physics, (1995), **78**, 3/4, 1111-1129.
- [Li2] C. LIVERANI *Decay of corelations*. Ann. of Math. (1995), **142** (2), 239-301
- [Li3] C. LIVERANI *Central limit theorem for deterministic systems*. Proceedings of the International Congress on Dynamical Systems, Montevideo 95, Research Notes in Mathematics series, Pittman, (1997).

- [Li4] C. LIVERANI *Flows, random perturbations and the rate of mixing*. Prépublication.
- [L, S, V1] C. LIVERANI, B. SAUSSOL & S. VAIENTI *Conformal measure and decay of correlations for covering weighted systems*. (1996) to appear in Erg. Th. and Dyn. Syst..
- [L, S, V2] C. LIVERANI, B. SAUSSOL & S. VAIENTI *A probabilistic approach to intermittency*. (1997).
- [L, Q] P.-D LIU & M. QIAN *Smooth ergodic theory of random dynamical systems*. Lect. Notes Math. (1995) **1606**
- [Ma] V. MAUME-DESCHAMPS *Equilibrium states for non Hölderian Random dynamical systems*. Random and Computational Dynamics (1997) **5** (4) 319-335.
- [Mo] M. MORI *On the intermittency of a piecewise linear map (Takahashi model)*. Tokyo J. Math. (1993) **16**, 2, 411-428.
- [Ne] J. NEUVEU *Mathematical foundations of the calculus of probability*. Holden-Day, San Fransisco, (1965).
- [N] S.NEWHOUSE *Lecture on Dynamical Systems*. Progress in Math. (1980) **8** Birkhäuser Basel.
- [Nu] R. D.NUSSBAUM *The radius of the essential spectrum*. Duke Math. J. **37**, 473-478 (1970).
- [Pa, Po] W. PARRY & M. POLLICOTT *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*. Asterisque (1990), **187 -188**
- [Po1] M. POLLICOTT *Lectures on ergodic theory and Pesin theory on compact manifolds*. L. Math. Soc. Lect. Notes Series (1993), **180**
- [Po2] M. POLLICOTT *Rates of mixing for potentials of summable variation*. Prépublication (1997).
- [Po3] M. POLLICOTT *A complex Ruelle-Perron-Frobenius theorem and two counterexamples*. Ergd. Theory Dyn. Syst. (1984), **4**, 135-146.

- [Po,Y] M. POLLOCOTT & M. YURI *Statistical properties of maps with indifferent periodoc points*. Prépublication (1998).
- [Ra] A. RAUGI *Théorie spectrale d'un opérateur de transfert sur un espace métrique compact*. Ann. Inst. Henri Poincaré, Prob. Stat. (1992), **28** (2), 281-309.
- [Ri] M. RYCHLIK *Bounded variation and invariant meaasures*. Studia mathematica (1982), **71**, 69-80.
- [Rud] W. RUDIN *Fourier analysis on groups*. Interscience publishers, John Wiley and sons, New-York-London (1967).
- [Ru1] D. RUEELLE *Thermodynamic formalism*. Addison Wesley New-York (1978)
- [Ru2] D. RUEELLE *Statistical mechanics of a one dimensional lattice gas*. Com. Math. Phys. (1978), **9**, 267-278.
- [Ru3] D. RUEELLE *A measure associated with Axiom A attractors*. Trams. of A.M.S. (1975), **312**, 619-654.
- [Sa] O. SARIG *Thermodynamic Formalism for Countable Markov Shifts*. (1997).
- [Sc] B. SCHMITT *Existence of acip for expanding maps of the interval*. Dynamical Systems and Ergodic Theory Banach Center Publications. Warsaw (1989).
- [Se] E. SENETA *Non-negative matrices and Markov chains*. Springer (1981).
- [T] M. THALER *Estimates of the invariant densities of endomorphisms with indifferent fixed point*. Israel Journal of Math. (1980) **37** 303-314.
- [V-J1] D. VERE-JONES *Geometric ergodicity in denumerable Markov Chains*. Quarterly Journal of Math. (1962) **13** 7-28.
- [V-J2] D. VERE-JONES *Ergodic properties of non-negative matrices*. Pacific Journal of Math. (1990) **22** 361-386.
- [V] M. VIANA *Stochastic dynamics of deterministic systems*. (1997).
- [Wa1] P. WALTERS *Invariant measures and equilibrium states for somme mappings which expand distances*. Trans. Amer. Math. Soc. (1978), **236**, 121-153.

- [Wa2] P. WALTERS *An introduction to ergodic theory*. Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin (1982).
- [Wan] X.J. WANG. *statistical physics of temporal intermittency*. *Phy. Rev. A.* (1989) **40** 6647.
- [Y1] L.-S. YOUNG *Recurrence times and rates of mixing*. Prépublication (1997).
- [Y2] L.-S. YOUNG *Stochastic stability of hyperbolic attractors*. *Erg. Theory Dyn. Syst.*(1986), **6**, 311-319.