

### Feuille d'exercices n° 4 : rappels sur le produit de convolution

Dans toute cette feuille  $d$  désigne un entier  $\geq 1$ . Pour  $f, g$  deux fonctions mesurables et  $x \in \mathbf{R}^d$  on souhaite poser

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}^d} f(t)g(x-t)dt$$

quand cette intégrale (pour la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}^d$ ) est définie.

Notons, grâce au théorème de changement de variable, que  $f * g(x)$  est défini si et seulement si  $g * f(x)$  est défini, et qu'alors on a l'égalité  $f * g(x) = g * f(x)$ . De plus, l'inégalité de Hölder assure que  $f * g$  est définie partout dès lors que  $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$ ,  $g \in L^q(\mathbf{R}^d)$  (avec  $1 \leq p, q \leq +\infty$ )  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  et qu'alors on a  $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$ . En fait dans ce cas  $f * g$  est même uniformément continue (voir l'exercice 2).

On a même mieux, avec l'inégalité de Young pour la convolution : si  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$  avec  $p, q, r \in [1, +\infty]$  alors  $f * g$  est définie presque partout, appartient à  $L^r(\mathbf{R}^d)$  et  $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ .

On va revoir rapidement comment établir quelques propriétés fondamentales de la convolution (sans présupposer de connaissance particulière à ce sujet, en particulier on n'utilisera pas l'inégalité de Young, qu'on ne va redémontrer que dans les cas  $q = 1$  et  $r = +\infty$ ).

On rappelle que pour  $p \in [1, +\infty[$  les fonctions continues à support compact forment un sous-ensemble dense de  $L^p(\mathbf{R}^d)$  (ce résultat reste-t-il vrai pour  $p = +\infty$ ?)

**Exercice 1.** Soit  $f, g, h: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{C}$  trois fonctions mesurables. On suppose que  $f * (g * h)$  est définie presque partout; montrer qu'alors  $(f * g) * h$  est définie presque partout et que  $f * (g * h) = (f * g) * h$  presque partout.

**Exercice 2.** Soit  $p \in [1, +\infty[$  et  $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$ . On fixe  $x \in \mathbf{R}^d$  et on note  $f_x(t) = f(t-x)$ .

Montrer que  $x \mapsto f_x$  est uniformément continue de  $(\mathbf{R}^d, |\cdot|)$  dans  $(L^p(\mathbf{R}^d), \|\cdot\|_p)$ .

(on commencera par traiter le cas où  $f$  est continue à support compact)

**Exercice 3.** Dans cet exercice on suppose que  $p, q \in [1, +\infty]$  sont des exposants conjugués, i.e.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

On fixe  $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$  et  $g \in L^q(\mathbf{R}^d)$ .

1. À l'aide du résultat de l'exercice précédent, montrer que  $f * g$  est uniformément continue.
2. Montrer que si  $f$  et  $g$  sont continues à support compact alors  $f * g$  est continue à support compact.
3. On suppose que  $p, q < +\infty$ . Montrer que  $f * g$  tend vers 0 quand  $\|x\| \rightarrow +\infty$ .
4. Si  $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$  et  $g \in L^\infty(\mathbf{R}^d)$ , est-il toujours vrai que  $f * g(x)$  tend vers 0 quand  $\|x\|$  tend vers  $+\infty$ ?

**Exercice 4.** Soit  $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$  et  $g \in L^p(\mathbf{R}^d)$  avec  $1 \leq p < +\infty$ .

1. Montrer que si  $p = 1$  alors  $f * g \in L^1(\mathbf{R}^d)$  et  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ .

On suppose maintenant  $1 < p < +\infty$  et on note  $q$  l'exposant conjugué de  $p$ .

2. En écrivant, pour  $t \in \mathbf{R}^d$ ,  $|f(t)| = |f(t)|^{\frac{1}{p}} |f(t)|^{\frac{1}{q}}$ , montrer que pour tout  $x \in \mathbf{R}^d$  on a

$$\int_{\mathbf{R}^d} |f(t)g(x-t)|dt \leq \left( \int_{\mathbf{R}^d} |f(t)|^p |g(x-t)|^q dt \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_1^{\frac{1}{q}}$$

3. Montrer que  $\int_{\mathbf{R}^d} \left( \int_{\mathbf{R}^d} |f(t)|^p |g(x-t)|^q dt \right) dx = \|f\|_1 \|g\|_p^p$ .
4. Conclure que  $f * g$  est définie presque partout, appartient à  $L^p(\mathbf{R}^d)$  et  $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$ .

**Exercice 5.** Pour  $n \in \mathbf{N}^*$  et  $x \in ]n, n + \frac{1}{n^3}[$  on pose  $f(x) = n$ ; pour  $n \in -\mathbf{N}^*$  et  $x \in ]n + \frac{1}{n^3}, n[$  on pose  $f(x) = -n$ ; et ailleurs on pose  $f(x) = 0$ . Montrer que  $f \in L^1(\mathbf{R})$  mais  $f * f(0)$  n'est pas défini. Pourtant  $f * f$  est définie presque partout, et appartient à  $L^1(\mathbf{R})$ , d'après le résultat de l'exercice précédent.

**Exercice 6.** On dit qu'une suite de fonctions intégrables  $k_n: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{C}$  est une *unité approchée* pour la convolution si :

- (i)  $\forall n \in \mathbf{N} \quad \int_{\mathbf{R}^d} k_n(t) dt = 1.$
- (ii)  $M = \sup \{ \|k_n\|_1 : n \in \mathbf{N} \} < +\infty.$
- (iii) Pour tout  $\delta > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\|x\| \geq \delta} |k_n(t)| dt = 0.$

1. Montrer que si  $\varphi: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{C}$  est à support compact et telle que  $\int_{\mathbf{R}^d} \varphi(t) dt = 1$  alors la suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définie par  $\varphi_n: x \mapsto n^d \varphi(nx)$  est une unité approchée pour la convolution.

On fixe  $p \in [1, +\infty[$  et une unité approchée pour la convolution  $(k_n)_{n \in \mathbf{N}}$ . On souhaite montrer que pour tout  $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$  on a  $f * k_n \rightarrow f$  dans  $L^p(\mathbf{R}^d)$ . On note  $q$  l'exposant conjugué de  $p$ .

- 2. On suppose que  $f$  est continue, bornée et  $f(0) = 0$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^d} |k_n(t) f(t)| dt = 0.$
- 3. En utilisant (pour  $t \in \mathbf{R}^d$ ) l'égalité  $|k_n(t)| = |k_n(t)|^{\frac{1}{p}} |k_n(t)|^{\frac{1}{q}}$ , montrer que pour tout  $x \in \mathbf{R}^d$  et tout  $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$  on a

$$|f * k_n(x) - f(x)| \leq M^{\frac{1}{q}} \left( \int_{\mathbf{R}^d} |f(x-t) - f(x)|^p |k_n(t)| dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

4. Conclure, à l'aide du théorème de Fubini-Tonelli et du résultat du premier exercice de cette feuille.

**Exercice 7.** Soit  $p \in [1, +\infty[$  et  $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$ . Soit  $\varphi: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{C}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  à support compact contenu dans  $B_f(0, M)$ .

Soit  $y \in \mathbf{R}^d$ ; pour tout  $x$  appartenant à la boule de centre 0 et de rayon  $M + \|y\| + 1$  on pose  $g(x) = f(x)$ , et ailleurs on pose  $g(x) = 0$ .

- 1. Montrer que  $g \in L^1(\mathbf{R}^d)$  et que pour tout  $x \in \mathbf{R}^d$  tel que  $\|y - x\| \leq 1$  on a  $g * \varphi(x) = f * \varphi(x).$
- 2. Montrer que  $g * \varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que tout  $x \in \mathbf{R}^d$  et tout  $i \in \{1, \dots, d\}$  on a

$$\frac{\partial(g * \varphi)}{\partial x_i}(x) = g * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$$

3. Montrer que  $f * \varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  que pour tout  $x \in \mathbf{R}^d$  et tout  $i \in \{1, \dots, d\}$  on a

$$\frac{\partial(f * \varphi)}{\partial x_i}(x) = f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$$

4. En utilisant l'existence d'une unité approchée pour la convolution formée de fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact, montrer que l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact est dense dans  $L^p(\mathbf{R}^d)$ .