Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2023-2024**
M1 - Mathématiques générales | UE : Analyse Fonctionnelle 1

Feuille d'exercices n° 7 : quelques éléments de correction

Exercice 6.

1. Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$ on pose $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Montrer que $g' = f$ au sens des distributions.
2. Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$, d'intégrale non nulle. Montrer que l'ensemble des primitives de f (au sens des distributions) est l'ensemble des fonctions de la forme $G * f$, où G est une primitive de δ_0.

Correction. Reprenons en détail cet exercice qui a été traité un peu trop rapidement au tableau.
1. On commence par noter que g est une fonction continue (puisque $f \in L^1_{loc}$, g est continue sur chaque segment et donc continue sur $\mathbf{R}$) donc définit bien une distribution. Puis on calcule, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$,

$$\begin{aligned}
\langle g', \varphi \rangle &= -\int_{\mathbf{R}} g(x)\varphi'(x)\,dx \\
&= -\int_{\mathbf{R}} \left(\int_0^x f(t)\,dt \right) \varphi'(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^0 \left(\int_x^0 f(t)\,dt \right) \varphi'(x)\,dx - \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x f(t)\,dt \right) \varphi'(x)\,dx
\end{aligned}$$

On souhaite appliquer le théorème de Fubini ; pour cela on commence par mettre des modules partout, et on introduit M tel que le support de φ est contenu dans $[-M, M]$. On a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 \left(\int_x^0 |f(t)|\,dt \right) |\varphi'(x)|\,dx &= \int_{-M}^0 \left(\int_x^0 |f(t)|\,dt \right) |\varphi'(x)|\,dx \\
&\leqslant \int_{-M}^0 \left(\int_{-M}^0 |f(t)|\,dt \right) |\varphi'(x)|\,dx \\
&\leqslant \int_{-M}^0 |f(t)|\,dt \int_{-M}^0 |\varphi'(x)|\,dx \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

Cela légitime l'application du théorème de Fubini pour l'intégrale de gauche dans l'égalité ci-dessus ; l'autre intégrale se traite de la même façon, et en reprenant notre calcul on obtient finalement

$$\begin{aligned}
\langle g', \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^0 \left(\int_{-\infty}^t \varphi'(x)\,dx \right) f(t)\,dt - \int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} \varphi'(x)\,dx \right) f(t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^0 \varphi(t)f(t)\,dt + \int_0^{+\infty} \varphi(t)f(t)\,dt \\
&= \int_{\mathbf{R}} \varphi(t)f(t)\,dt \\
&= \langle f, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient comme espéré que $\langle g', \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$.
Autrement dit, $g' = f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.
2. Notons H la fonction de Heaviside ; on a $H * f \colon x \mapsto \int_{\mathbf{R}} H(x-t)f(t)\,dt$ qui est continue puisque $H \in L^\infty$ et $f \in L^1$. Donc $H * f$ induit bien une distribution.
On fixe de nouveau $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ et on écrit

$$\begin{aligned}
\langle (H*f)', \varphi \rangle &= -\langle H*f, \varphi' \rangle \\
&= -\int_{\mathbf{R}} (H*f)(x)\varphi'(x)\,dx \\
&= -\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} H(x-t)f(t)\,dt \right) \varphi'(x)\,dx
\end{aligned}$$

On souhaite à nouveau appliquer le théorème de Fubini; puisque $\|H\|_\infty = 1$ on obtient immédiatement que pour tout x on a $\int_{\mathbf{R}} |H(x-t)f(t)|\,dt \leqslant \int_{\mathbf{R}} |f(t)|\,dt = \|f\|_1$, d'où la majoration

$$\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |H(x-t)f(t)|\,dt \right) |\varphi'(x)|\,dx \leqslant \|f\|_1 \|\varphi'\|_1$$

Nous somme maintenant habilités à appliquer le théorème de Fubini, qui nous permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \langle (H*f)', \varphi \rangle &= -\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} H(x-t)\varphi'(x)\,dx \right) f(t)\,dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} \left(-\int_{\mathbf{R}} H(u)\varphi'(u+t)\,du \right) f(t)\,dt \end{aligned}$$

À l'intérieur de l'intégrale on reconnait la dérivée (au sens des distributions) de H appliquée à la fonction $u \mapsto \varphi(u+t)$ (ou bien on remplace $H(u)$ par sa valeur et on refait le petit calcul correspondant); puisque $H' = \delta_0$ cette intégrale vaut $\varphi(t)$ et finalement

$$\langle (H*f)', \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}} \varphi(t) f(t)\,dt = \langle f, \varphi \rangle$$

On conclut que $H*f$ est une primitive de f. Les autres primitives de f sont toutes les distributions de la forme $H*f+C$, où $C \in \mathbf{C}$, qui sont aussi toutes les distributions de la forme $H*f+K\int_{\mathbf{R}} f(t)\,dt$ (puisque f est d'intégrale non nulle), où $K \in \mathbf{C}$.
En utilisant que $\int_{\mathbf{R}} f(t)\,dt = 1*f$, les primitives de f dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ sont donc toutes les distributions de la forme $H*f+K*f = (H+K)*f$, où $K \in \mathbf{C}$.

Exercice 12. On suppose que $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ est telle que $u^{(4)} + u$ appartienne à $L^2(\mathbf{R})$.
Démontrer que u, u', u'' et $u^{(3)}$ appartiennent toutes à $L^2(\mathbf{R})$ (on commencera par donner un sens précis à l'énoncé...).

Correction. On suppose que $u^{(4)} + u$ est une distribution de type fonction, associée à une fonction f appartenant à $L^2(\mathbf{R})$. En appliquant la transformée de Fourier, on obtient que $\widehat{u^{(4)}+u} = (1+\xi^4)\hat{u}$ est une distribution de type fonction appartenant à $L^2(\mathbf{R})$.
Puisque $|\hat{u}| \leqslant (1+\xi^4)|\hat{u}|$, on en déduit que $\hat{u}$ appartient à $L^2(\mathbf{R})$, par conséquent u appartient à $L^2(\mathbf{R})$.
De même, $|\xi\hat{u}| \leqslant (1+|\xi|^4)|\hat{u}|$ (distinguer selon que $|\xi| \leqslant 1$ ou $|\xi| \geqslant 1$) dont $\xi\hat{u}$ appartient à $L^2(\mathbf{R})$. Donc la distribution $\hat{u'} = i\xi\hat{u}$ est associée à une fonction de $L^2(\mathbf{R})$, par conséquent u' est induite par une fonction de $L^2(\mathbf{R})$.
On raisonne de même pour montrer que u'', $u^{(3)}$ et $u^{(4)}$ sont induites par des fonctions de $L^2(\mathbf{R})$.

Exercice 13. Trouver toutes les solutions de l'équation $-y''(t) + y(t) = e^{-t^2}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ puis dans $\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$.

Correction. On sait résoudre $-y''(t) + y(t) = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$: cette équation différentielle y a les mêmes solutions que dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, qui sont toutes les fonctions de la forme $t \mapsto Ae^t + Be^{-t}$, où $A, B \in \mathbf{C}$. La seule solution de cette équation dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ est la fonction nulle.
Si y appartient à $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$, alors on peut appliquer la transformée de Fourier et obtenir que y est solution de l'équation avec second membre si, et seulement si, on a pour tout ξ l'égalité $(1+\xi^2)\widehat{y}(\xi) = \widehat{e^{-t^2}}(\xi)$.
Autrement dit, $y \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ est solution de l'équation avec second membre si, et seulement si,

$$\widehat{y} = \frac{1}{1+\xi^2}\widehat{e^{-t^2}} = \frac{1}{2}\widehat{e^{-|t|}}\widehat{e^{-t^2}} = \frac{1}{2}\widehat{e^{-|t|} * e^{-t^2}}$$

(ici on calcule par exemple le produit de convolution dans $L^2(\mathbf{R})$, en voyant $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ comme un sous-espace de $L^2(\mathbf{R})$; et on a reconnu la transformée de Fourier de $t \mapsto e^{-|t|}$)

Finalement, la magie de la transformée de Fourier nous dit que $y \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ est solution de l'équation avec second membre si, et seulement si, $y = \frac{1}{2}e^{-|t|} * e^{-t^2}$.
Comme $t \mapsto e^{-|t|}$ appartient à $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$, et $t \mapsto e^{-t^2}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, on vient de trouver une solution y dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$.
La solution qu'on vient de trouver est une distribution induite par une fonction $\mathcal{C}^\infty$ (qu'on note encore y) et finalement les solutions de notre équation dans $\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ (ou $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, toute solution étant de classe $\mathcal{C}^\infty$) sont les fonctions de la forme $t \mapsto y(t) + Ae^t + Be^{-t}$, avec $A, B \in \mathbf{C}$.

Exercice 14. Soit $u\colon \mathcal{S}(\mathbf{R}^2) \to \mathbf{C}$ l'application linéaire définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2) \quad u(\varphi) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x, -x)dx$$

1. Montrer que u est une distribution tempérée.
2. Calculer (au sens des distributions) $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$.

Correction. 1. Notons comme dans le cours $p_2(\varphi) = \sup_{y, |\alpha| \leqslant 2} (1 + \|y\|_2)^2 |\partial^\alpha \varphi(y)|$. En particulier, on a pour tout $y \in \mathbf{R}^2$ et tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ l'inégalité $(1 + \|y\|_2)^2 |\varphi(y)| \leqslant p_2(\varphi)$.
Par conséquent, on a pour tout $x \in \mathbf{R}$ que $(1 + \|(x, -x)\|_2)^2 |\varphi(x, -x)| \leqslant p_2(\varphi)$.
On en déduit, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, que

$$\int_{\mathbf{R}} |\varphi(x, -x)|\, dx \leqslant \int_{\mathbf{R}} \frac{p_2(\varphi)}{(1 + \|(x, -x)\|_2)^2}\, dx = p_2(\varphi) \int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{((1 + \sqrt{2}|x|)^2}$$

L'intégrale ci-dessus est convergente ; on en conclut que $u(\varphi)$ est bien défini pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, et qu'il existe une constante C telle que $|u(\varphi)| \leqslant Cp_2(\varphi)$. La linéarité de u étant claire, on a établi que u est une distribution tempérée.
2. On applique la définition : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ on a

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \varphi \rangle &= \langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle \\
&= \int_{\mathbf{R}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, -x) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, -x) \right) dx \\
&= \int_{\mathbf{R}} -g'(x)\, dx
\end{aligned}$$

où on a posé $g(x) = \varphi(x, -x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ (la dérivée de g se calcule à l'aide de la règle de la chaîne). Mais comme $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ la fonction g est nulle en dehors d'un compact, et on conclut finalement que $\langle \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$, autrement dit $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

Exercice 15. Soit g une fonction positive et localement intégrable sur $\mathbf{R}$ telle que la distribution associée à g, qu'on note u_g, soit tempérée.

1. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $\psi(x) = 1$ pour tout $x \in [-1, 1]$. Étant donnés deux entiers strictement positifs j, m et $x \in \mathbf{R}$, on pose

$$\varphi_{j,m}(x) = \frac{\psi\left(\frac{x}{j}\right)}{(1 + x^2)^m}$$

   Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ ainsi que $m \in \mathbf{N}^*$ tels que $|\langle u_g, \lambda \varphi_{j,m} \rangle| \leqslant 1$ pour tout $j \in \mathbf{N}^*$.
2. Montrer que $x \mapsto \frac{g(x)}{(1 + x^2)^m}$ est intégrable.
3. Donner des exemples de fonctions positives et continues sur $\mathbf{R}$ ne définissant pas une distribution tempérée.

Correction. 1. Puisque u_g est une distribution tempérée, il existe une constante $C > 0$ ainsi que $k \in \mathbf{N}$ tels que $|\langle u_g, \varphi \rangle| \leqslant C p_k(\varphi)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Fixons un tel k.
La formule de Leibniz permet de voir (par un calcul sans difficulté particulière mais un peu pénible; on s'épargne les détails ici) que $p_k(\varphi_{j,m}) \leqslant \varepsilon_m$ avec $\varepsilon_m \to 0$ quand $m \to +\infty$, en particulier pour m suffisamment grand on a $p_k(\varphi_{j,m}) \leqslant \dfrac{1}{C}$ pour tout $j \in \mathbf{N}^*$ et donc $|\langle u_g, \varphi_{j,m} \rangle| \leqslant 1$.
2. On fixe m comme à la question précédente. Alors $\varphi_{j,m}(x)$ converge simplement vers $\dfrac{1}{(1+x^2)^m}$ quand $j \to +\infty$. Le lemme de Fatou nous donne

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} \frac{g(x)}{(1+x^2)^m}\,dx &= \int_{\mathbf{R}} \lim_{j\to+\infty} g(x)\varphi_{j,m}(x)\,dx \\
&\leqslant \liminf_{j\to+\infty} \int_{\mathbf{R}} g(x)\varphi_{j,m}(x)\,dx \\
&\leqslant \liminf_{j\to+\infty} \langle u_g, \varphi_{j,m} \rangle \\
&\leqslant 1
\end{aligned}$$

Par conséquent $x \mapsto \dfrac{g(x)}{(1+x^2)^m}$ est intégrable.
3. Chaque fonction $g_\lambda \colon t \mapsto e^{\lambda t}$, où $\lambda \neq 0$, est positive et continue (donc localement intégrable) mais $x \mapsto \dfrac{g_\lambda(x)}{(1+x^2)^m}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ ou $-\infty$, ce qui montre que g_λ ne satisfait pas la condition de la question précédente et ne définit donc pas une distribution tempérée. On obtient la même conclusion avec $t \mapsto e^{t^2}$ par exemple (mais là c'est plus facile à voir directement, sans utiliser le résultat de cet exercice !).