
Feuille d'exercices n° 7 : compléments

Exercice 1. *Principe d'incertitude de Heisenberg.*
Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. On souhaite montrer l'inégalité suivante :

$$\left(\int_{\mathbf{R}} x^2|f(x)|^2dx\right)\left(\int_{\mathbf{R}} \xi^2|\hat{f}(\xi)|^2d\xi\right) \geqslant \frac{\pi}{2}(\|f\|_2)^4 \tag{H}$$

On note $I = \left(\int_{\mathbf{R}} x^2|f(x)|^2dx\right)\left(\int_{\mathbf{R}} \xi^2|\hat{f}(\xi)|^2d\xi\right)$.

1. Montrer que $I = 2\pi\left(\int_{\mathbf{R}} x^2|f(x)|^2dx\right)\left(\int_{\mathbf{R}} |f'(x)|^2dx\right)$
2. En déduire que $I \geqslant 2\pi\left(\int_{\mathbf{R}} |xf(x)f'(x)|dx\right)^2$.
3. Dans cette question on note $g(x) = |f(x)|^2$.
   Montrer que $\int_{\mathbf{R}} |xf(x)f'(x)|dx \geqslant -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} xg'(x)dx$ et démontrer (H).
4. Que se passe-t-il pour $f\colon x \mapsto e^{-ax^2}$ (avec $a > 0$) ?
5. Que pensez-vous de l'inégalité (H) dans le cas où $f \in L^2(\mathbf{R})$?

Exercice 2. Cet exercice prolonge le dernier exercice de la feuille 7. On suppose que $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ et que le support de $\hat{f}$ est contenu dans $[-\pi, \pi]$. Montrer que pour tout réel t on a

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n)\,\mathrm{sin_c}((t-n)\pi)$$

On rappelle que $\mathrm{sin_c}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, convenablement prolongée en 0.
Afin d'établir l'égalité ci-dessus, on pourra commencer par appliquer la formule sommatoire de Poisson à $\hat{f}$, et utiliser (en le justifiant) que pour tout ξ on a

$$\hat{f}(\xi) = \chi_{[-\pi,\pi]}(\xi)\sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(\xi + 2n\pi)$$