

Feuille d'exercices numéro 2
Théorème de Baire

Exercice 1 Dérivée

Montrer que si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction dérivable, sa dérivée f' est de première classe.

Exercice 2 Bases algébriques d'un espace de Banach

Soit X un espace de Banach de dimension infinie. Montrer que si $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une base de l'espace vectoriel X , alors A est non dénombrable.

Exercice 3 Maigre vs négligeable

1. Construire, pour tout $\varepsilon > 0$, un ouvert dense de \mathbf{R} de mesure de Lebesgue $\leq \varepsilon$.
(**Indication** : considérer une union d'intervalles centrés en chaque rationnel).
2. Montrer qu'il existe une partition $\mathbf{R} = A \cup B$ avec A maigre et B de mesure nulle.
3. De telles partitions arrivent naturellement en mathématiques, en voici un exemple. On dit qu'un nombre réel x est de Liouville si, pour tout $n \geq 1$, il existe des entiers $p \in \mathbf{Z}$ et $q > 1$ tels que $0 < |x - p/q| < 1/q^n$. Montrer que l'ensemble des nombres de Liouville est de mesure nulle et comeigre.

Exercice 4 Pas de loi des grands nombres au sens de Baire

Dans l'espace $X = \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ muni de la topologie produit, on considère

$$A = \left\{ (x_n)_{n \geq 1} : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = 1 \text{ et } \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = 0 \right\}.$$

1. Montrer que tout ouvert non vide de X contient une suite ayant un nombre fini de termes nuls.
2. Montrer que A est comeigre.

Exercice 5 Nilpotence vs nilpotence ponctuelle

Soit X un espace de Banach et $T : X \rightarrow X$ une application linéaire continue telle que, pour tout $x \in X$, il existe un entier n_x tel que $T^{n_x}(x) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un entier n tel que $T^n = 0$.
2. Montrer que la conclusion du 1. devient fautive sans l'hypothèse de complétude.

Exercice 6 Encore un exemple d'inversion de quantificateurs

Soit $\varphi : \ell^\infty \rightarrow \mathbf{R}$ une application linéaire continue telle que : $\forall u \in \ell^\infty(\mathbf{N}) \exists n \in \mathbf{N} \varphi(u) = u(n)$.
Montrer que : $\exists n \in \mathbf{N} \forall u \in \ell^\infty \varphi(u) = u(n)$.

Exercice 7 Les compacts métriques dénombrables se plongent dans \mathbf{R}

Soit (K, d) un espace métrique compact et dénombrable.

Pour $x \neq y \in K$ montrer que $\{f \in C(K, \mathbf{R}) : f(x) \neq f(y)\}$ est ouvert dense dans $C(K, \mathbf{R})$, puis que K est homéomorphe à un fermé de \mathbf{R} .

Remarque : l'hypothèse "métrique" est redondante dans cet exercice, tout espace compact séparé dénombrable étant métrisable. Et on peut en fait montrer qu'un tel K est homéomorphe à un fermé de \mathbf{R} contenu dans \mathbf{Q} .

Exercice 8 Baire et les espaces L^p

1. Montrer que ℓ_1 est maigre dans ℓ_2 . (**Indication** : Montrer que l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \leq 1$ est un fermé d'intérieur vide de ℓ_2).
2. Montrer que $L^2([0, 1])$ est maigre dans $L^1([0, 1])$.

Exercice 9 Fonctions continues nulle part dérivables

Soit X l'espace de Banach $C([0, 1])$. Étant donnés $\varepsilon, A > 0$ on pose

$$F_{\varepsilon, A} = \{f \in X : \exists x \in [0, 1], \text{ tel que si } |x - y| < \varepsilon \text{ alors } |f(x) - f(y)| \leq A|x - y|\}.$$

1. Montrer que les ensembles $F_{\varepsilon, A}$ sont fermés d'intérieur vide.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions nulle part dérivables est comeigre dans X .

Exercice 10 Fonctions C^∞ nulle part développables en série entière.

On munit l'espace $X = C^\infty([0, 1])$ de la distance

$$d(f, g) = \sum_{n \geq 0} \min(2^{-n}, \|f^{(n)} - g^{(n)}\|_\infty)$$

1. Montrer que X est complet pour cette distance.
2. Pour $a \in]0, 1[$ et $B > 0$, montrer que l'ensemble

$$F_{a,B} = \{f \in X : \forall k \in \mathbf{N}, |f^{(k)}(a)| \leq k!B^k\}$$

est un fermé d'intérieur vide.

3. Montrer que l'ensemble des fonctions nulle part développables en série entière est comeagre dans X .

Exercice 11 Une fonction de seconde classe

Montrer que $\mathbf{1}_\mathbf{Q} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ n'est pas une fonction de première classe, mais que c'est la limite simple d'une suite de fonctions de première classe.

Exercice 12 Compléments sur les séries de Fourier

1. Soit $h_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une suite de fonctions continues. Montrer que $\{x \in \mathbf{R} : \sup_n h_n(x) = +\infty\}$ est un G_δ .
2. Soit X l'ensemble des fonctions continues 2π -périodiques de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . Pour $f \in X$, montrer que l'ensemble des réels x en lesquels la série de Fourier $(S_n f(x))_n$ est non bornée est un G_δ .
3. Montrer que l'ensemble des fonctions continues 2π -périodiques dont la série de Fourier converge sur un ensemble maigre de \mathbf{R} est un ensemble comeagre de X .

Le dernier résultat est à comparer avec le difficile théorème de Carleson : si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue, sa série de Fourier converge presque partout.