Feuille d'exercices n° 4 (compléments en attendant Hahn–Banach)

Exercice 1. On rappelle le résultat suivant vu en cours : soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré fini, $p \in [1, +\infty[$ et q son exposant conjugué. On considère l'application $g \mapsto \ell_g$ de $L^q(\mu)$ dans $L^p(\mu)^*$ définie par $\ell_g(f) = \int_\Omega fg d\mu$. Alors l'application $g \mapsto \ell_g$ est une isométrie linéaire surjective.
On souhaite étendre ce résultat au cas où μ est σ-finie.

1. Montrer qu'il existe $I \subseteq \mathbf{N}$ et des parties mesurables $(A_n)_{n\in I}$ telles que $\bigsqcup_{n\in I} A_n = \Omega$ et $0 < \mu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in I$.
2. On définit $w = \displaystyle\sum_{n\in I} \frac{\mathbf{1}_{A_n}}{2^n \mu(A_n)}$. Montrer que $w \in L^1(\mu)$ et que w est à valeurs strictement positives.
   On définit une mesure ν en posant $\nu(A) = \int_A w d\mu$. C'est une mesure finie.
3. On considère $\Theta \colon L^p(\mu) \to L^p(\nu)$ définie par $\Theta(f) = w^{-\frac{1}{p}} f$.
   Montrer que Θ est bien définie, et est une isométrie linéaire surjective de $L^p(\mu)$ sur $L^p(\nu)$.
4. Conclure.

Exercice 2. Soit μ, ν deux mesures finies sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telles que $\mu \geq \nu$. Montrer qu'il existe une mesure λ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que $\mu = \nu + \lambda$.

Exercice 3. Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable, et μ_1, μ_2 deux mesures finies sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Montrer qu'il existe deux mesures étrangères ν_1, ν_2 sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telles que $\mu_1 - \mu_2 = \nu_1 - \nu_2$.
(On dit que ν_1, ν_2 sont *étrangères* s'il existe une partie mesurable E telle que $\nu_1(A) = \nu_1(A \cap E)$ et $\nu_2(A) = \nu_2(A \setminus E)$ pour toute partie mesurable A)

Parlons maintenant un peu d'*axiome du choix* ; si X est un ensemble, une *fonction de choix* sur X est une fonction $f \colon \mathcal{P}(X) \setminus \emptyset \to X$ telle que pour toute partie non vide A de X on ait $f(A) \in A$. L'axiome du choix est l'énoncé suivant : tout ensemble admet une fonction de choix.

Exercice 4. Montrer que l'axiome du choix est équivalent aux énoncés suivants :

1. Soit I un ensemble et $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles non vides. Alors $\prod_{i\in I} X_i$ est non vide.
2. Soit X, Y deux ensembles et $f \colon X \to Y$ une surjection. Alors il existe $g \colon Y \to X$ telle que pour tout $y \in Y$ on ait $f(g(y)) = y$.

On dit qu'un ensemble partiellement ordonné $(X, \leq)$ est *inductif* si pour tout sous-ensemble $Y \subseteq X$ totalement ordonné par $\leq$ il existe $x \in X$ tel que $y \leq x$ pour tout $y \in Y$. Le *lemme de Zorn* est l'énoncé suivant : tout ensemble partiellement ordonné inductif admet un élément maximal (i.e. $x \in X$ tel que $(x \leq y) \Rightarrow (x = y)$) .

Exercice 5. Montrer que si le lemme de Zorn est vrai alors l'axiome du choix est vrai aussi.

La réciproque est vraie : si l'axiome du choix est vrai il en va de même du lemme de Zorn. On l'admet ici. L'axiome du choix, ou des variantes plus faibles (en particulier l'axiome du choix dépendant) est fréquemment utilisé sans mention particulière. On suppose dans la suite de la feuille que l'axiome du choix est vrai.

Exercice 6. Soit X, Y deux ensembles. Montrer que X s'injecte dans Y ou Y s'injecte dans X.
(Cet énoncé est lui aussi équivalent à l'axiome du choix...)

Ce résultat est à mettre en relation avec le théorème suivant (dont la preuve n'utilise pas l'axiome du choix).

Exercice 7. Théorème de Cantor–Schröder–Bernstein
Soit X, Y deux ensembles et $f \colon X \to Y$, $g \colon Y \to X$ deux injections. Montrer qu'il existe une bijection $h \colon X \to Y$.

Exercice 8.

1. Montrer que $\mathbf{R}$ est en bijection avec $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$.
2. Montrer que $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$ (pour $n \in \mathbf{N}^*$) et $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ sont en bijection.

Exercice 9. Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une famille d'ensembles tels que chaque X_i soit en bijection avec $\mathbf{R}$. Montrer que $\bigcup_i X_i$ est en bijection avec $\mathbf{R}$.

Exercice 10. À l'aide du lemme de Zorn, montrer que tout espace vectoriel (sur un corps quelconque) admet une base.

Exercice 11.

1. Soit B une base de $\mathbf{R}$ en tant que $\mathbf{Q}$-espace vectoriel. Montrer que $\mathbf{R}$ et B sont en bijection.
2. Montrer que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^2$ sont isomorphes en tant que $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels.