Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre printemps 2024-2025**
M1 - Mathématiques générales | UE : Analyse Fonctionnelle 2

Feuille d'exercices n° 5 : Un peu de topologie

Exercice 1. Déterminer si les espaces suivants sont séparables :

1. $L^\infty([0,1])$.
2. $C([0,1])$, l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, muni de la norme du supremum. Plus généralement, $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$, pour K un compact métrique.
3. $\mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$, l'espace des opérateurs continus sur un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, muni de la norme-opérateur.
4. Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé séparable.

Exercice 2. Soit (X, τ) un espace topologique séparé. Montrer que la diagonale $\Delta_X = \{(x,x) \colon x \in X\}$ est fermée dans $X \times X$ muni de la topologie produit.

Exercice 3. Soit X un ensemble, (Y, τ_Y) un espace topoologique et $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions de X dans Y. On définit une famille $\tau_\mathcal{F}$ de parties de X en décrétant que $O \in \tau_\mathcal{F}$ si, et seulement si, pour tout $x \in O$ il existe un sous-ensemble fini I de $\mathcal{F}$ et des ouverts $(U_f)_{f \in I}$ de (Y, τ_Y) tels que

$$x \in \{x' \in X : \forall f \in I \ f(x') \in U_f\} \subseteq O$$

1. Montrer que $\tau_\mathcal{F}$ est une topologie sur X. On l'appelle la *topologie engendrée par la famille de fonctions $\mathcal{F}$*.
2. Montrer que chaque $f \in \mathcal{F}$ est continue de $(X, \tau_\mathcal{F})$ vers (Y, τ_Y).
3. Soit σ une topologie sur X telle que chaque $f \in \mathcal{F}$ soit continue de (X, σ) dans (Y, τ_Y). Montrer que σ contient $\tau_\mathcal{F}$.
4. Montrer qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de X converge vers x dans $(X, \tau_\mathcal{F})$ si, et seulement si, $(f(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $f(x)$ dans (Y, τ_Y) pour tout $f \in \mathcal{F}$.
5. Soit (Z, τ_Z) un autre espace topologique. Montrer que $g \colon (Z, \tau_Z) \to (X, \tau_\mathcal{F})$ est continue si, et seulement si, $f \circ g \colon (Z, \tau_Z) \to (Y, \tau_Y)$ est continue pour tout $f \in \mathcal{F}$.
6. Expliquer pourquoi les topologies produits peuvent être vues comme des topologies engendrées par une famille de fonctions et expliciter une base d'ouverts pour une topologie produit.

Exercice 4.
Montrer que, dans un espace vectoriel topologique, l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

Exercice 5. Soit X un espace vectoriel topologique.

1. Montrer que X est séparé (on rappelle que par convention dans notre cours $\{0\}$ est fermé dans X).
2. Montrer qu'une forme linéaire $f \colon X \to \mathbf{R}$ est continue si, et seulement si, f est continue en 0.

Exercice 6.
Soit X l'espace des fonctions mesurables $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ telles que $\displaystyle\int_0^1 |f(t)|^{1/2}\,\mathrm{d}t < +\infty$, quotienté par la relation d'équivalence donnée par l'égalité presque partout.

1. Montrer que X est un espace vectoriel.
2. Montrer que l'on définit une distance sur X par la formule $d(f,g) = \displaystyle\int_0^1 |f(t) - g(t)|^{1/2}\,\mathrm{d}t$, et que la topologie associée fait de X un espace vectoriel topologique.
3. Montrer que les seuls ouverts convexes de X sont $\emptyset$ et X. (**Indication.** *Montrer que l'enveloppe convexe d'une boule ouverte $B(x,r)$ contient la boule ouverte $B(x, \sqrt{2}r)$*).
   En déduire que toute forme linéaire continue sur X est nulle.

Exercice 7.

1. Soit I un ensemble infini non dénombrable. Montrer que la topologie produit sur $\{0,1\}^I$, sur $[0,1]^I$ ou sur $\mathbf{R}^I$, n'est pas métrisable.
   Indication : dans un espace topologique métrisable, tout point admet une base dénombrable de voisinages (pourquoi ?) ; montrer que cette propriété est en défaut.
2. Dans le cas où $I = [0,1]$ montrer que $\mathbf{R}^I$, muni de la topologie produit, est séparable. Cette topologie admet-elle une base dénombrable d'ouverts ?
   Indication : Pour $n \in \boldsymbol{N}^*$, considérer les fonctions à valeurs dans $\boldsymbol{Q}$ et constantes sur chaque $[i/n, i+1/n[$.
3. Pour $x \in [0,1]$ on note χ_x la fonction caractéristique de $\{x\}$. Montrer que $\{\chi_x : x \in [0,1]\}$, muni de la topologie induite par $\mathbf{R}^{[0,1]}$, est discret. Est-il séparable ? En déduire une nouvelle preuve du fait que $\mathbf{R}^{[0,1]}$ n'est pas métrisable.