
Contrôle continu du 14/03/2022 (durée 1h30)

Le sujet comporte 3 exercices indépendants. Ils peuvent être traités dans n'importe quel ordre, mais il est recommandé de suivre l'ordre du sujet. Documents, calculatrices, téléphones portables, etc. sont interdits.

Exercice 1. Soit $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. On considère la fonction f_a 2π-périodique et impaire définie par

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, 2a[\\ 0 & \text{si } x \in [2a, \pi] \end{cases}$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de f, décrire le mode de convergence de sa série de Fourier et expliciter sa limite.
2. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^4(na)}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^3(na)\cos(na)}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^3(na)}{n}$.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle

$$y''(t) + e^{\mathrm{i}t} y(t) = 0 \tag{E}$$

1. Décrire la structure de l'ensemble des solutions maximales de (E).
2. Soit f une solution maximale de (E). Montrer que f est 2π-périodique si, et seulement si, $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$.
3. Soit f une fonction 2π-périodique solution de (E). On note $(c_n(f))_{n\in\mathbf{Z}}$ les coefficients de Fourier complexes de f. Donner une relation liant $c_n(f)$ et $c_{n-1}(f)$ pour $n \in \mathbf{Z}$.
4. Déterminer toutes les solutions 2π-périodiques de (E) (on pourra en donner une écriture sous forme de série trigonométrique)

Exercice 3.
Dans cet exercice on fixe deux réels R_1, R_2 avec $0 \leq R_1 < R_2$.
On note $C(R_1, R_2) = \{z \in \mathbf{C} \colon r_1 < |z| < R_2\}$. On fixe une fonction f holomorphe sur $C(R_1, R_2)$; on rappelle que f, vue comme une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $C(R_1, R_2)$.
Pour $r \in]R_1, R_2[$ et $t \in [0, 2\pi]$ on note $\gamma_r(t) = re^{\mathrm{i}t}$.

1. Pour $r \in]R_1, R_2[$ on note $\mu(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{\mathrm{i}\theta})d\theta$. Montrer que μ est constante sur $]R_1, R_2[$ (on pourra s'intéresser à sa dérivée).
2. Montrer que pour tout $r \in]R_1, R_2[$ et tout $\theta \in [0, 2\pi]$ on a $f(re^{\mathrm{i}\theta}) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n r^n e^{in\theta}$ avec pour tout $n \in \mathbf{Z}$ l'égalité $a_n = \dfrac{1}{2\mathrm{i}\pi}\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$ et où la série ci-dessus converge absolument.
   (on prendra bien soin de justifier que a_n ne dépend pas de r ; on pourra commencer par fixer r et appliquer un théorème du cours sur les séries de Fourier)
3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$ converge uniformément sur $C(\rho_1, \rho_2)$ pour tous réels ρ_1, ρ_2 tels que $R_1 < \rho_1 < \rho_2 < R_2$.
4. On appelle *développement en série de Laurent* de f le développement obtenu ci-dessus ; énoncer et démontrer un théorème d'unicité du développement en série de Laurent.