M2A
Dynamique des groupes polonais

Automne 2018/2019
J. Melleray

Examen partiel

L'emploi des notes de cours est autorisé ; les autres documents sont interdits.

Exercice I
Soit G un sous-groupe fermé de S_∞. Comme dans le cours, on introduit un symbole de relation k-aire R_O pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ et chaque orbite O pour l'action naturelle de G sur $\mathbb{N}^k$. On note $\mathcal{O}$ l'ensemble de ces orbites et on considère le langage $\mathcal{L} = \{R_O\}_{O \in \mathcal{O}}$; on définit la $\mathcal{L}$-structure M d'univers $\mathbb{N}$ et telle que pour tout $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ et tout $O \in \mathcal{O}$ on ait $(n_1, \dots, n_k) \in R_O^M \Leftrightarrow (n_1, \dots, n_k) \in O$.

Montrer que M est une structure homogène (on pourra utiliser le fait vu en cours que G est le groupe d'automorphismes de M).

Exercice II
Soit G un groupe polonais, et X un espace polonais sur lequel G agit continûment (i.e. $(g, x) \mapsto gx$ est continue). Etant donné $x_0 \in X$, on souhaite montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(i) L'application d'orbite : $G \to Gx_0$, $g \mapsto gx_0$ est une application ouverte.

(ii) Gx_0 est G_δ dense dans $\overline{Gx_0}$.

(iii) Gx_0 est comaigre dans $\overline{Gx_0}$.

1. Montrer que (i) implique (ii).
   L'implication de (ii) vers (iii) étant triviale, on suppose dans la suite (iii) vérifiée et on souhaite en déduire (i). On suppose Gx_0 dense dans X pour simplifier les notations.
2. On note H le stabilisateur de x_0, et φ l'application quotient de G/H vers Gx_0 définie par $\varphi(gH) = gx_0$. Montrer que φ est continue, et que (i) équivaut à affirmer que φ est un homéomorphisme.
3. Montrer qu'il existe une partie comaigre Ω de X telle que pour tout ouvert U de G/H $\varphi(U) \cap \Omega$ soit ouvert dans Ω (on pourra mettre à profit le fait que G/H admet une base dénombrable d'ouverts).
4. On introduit $\Sigma := \Omega \cap Gx_0$. Montrer que Σ est comaigre et que φ^{-1} est continue sur Σ.
5. Montrer que $\Sigma_1 := \{x \in X : \forall^* g \in G \ gx \in \Sigma\}$ est comaigre, puis que Σ_1 contient Gx_0.
6. Montrer que pour toute suite $(g_n) \in G^{\mathbb{N}}$ et tout $g \in G$, il existe $k \in G$ tel que $kg_n x_0$ appartienne à Σ pour tout n, et $kgx_0 \in \Sigma$.
7. Conclure.

T.S.V.P

Exercice III

1. Soit X un espace polonais non dénombrable. On dit que $x \in X$ est un *point de condensation* si aucun voisinage de x n'est dénombrable, et on note C l'ensemble des points de condensation de X.
   (a) Montrer que $X \setminus C$ est un ouvert dénombrable de X.
   (b) Montrer que C est un polonais non dénombrable et sans points isolés.
2. Soit Y un polonais non vide et sans points isolés, sur lequel on fixe une distance compatible complète d.
   (a) Montrer qu'aucun ouvert non vide de Y n'est dénombrable.
   (b) Soit U un ouvert non vide de Y et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe deux ouverts non vides V, W disjoints tels que $\overline{V}$ et $\overline{W}$ sont contenus dans U, et V, W sont tous deux de diamètre majoré par ε.
   (c) A l'aide du résultat de (2b), construire une application continue et injective $f \colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to Y$.
3. Soit X un espace polonais, et $A \subseteq X$ un ensemble borélien. Montrer que si A n'est pas dénombrable alors il existe une application continue et injective de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans A.

Remarque : si X est un espace topologique séparé admettant une base dénombrable d'ouverts, il n'est pas difficile de construire une injection de X dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Le résultat de l'exercice précédent entraîne donc que l'hypothèse du continu est vraie pour les ensembles boréliens (i.e. un borélien non dénombrable est en bijection avec $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$). En utilisant un exercice proposé en cours (mais pas traité), on sait qu'un analytique quelconque est en bijection avec un fermé de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, ce qui permet d'étendre ce résultat aux ensembles analytiques. Un ensemble coanalytique infini peut par contre être de cardinal $\aleph_0, \aleph_1$ ou $2^{\aleph_0}$ (ce dernier n'étant pas nécessairement égal à $\aleph_1$).