Éléments de correction du contrôle partiel du 12 mars 2024.

L'emploi de documents, calculatrices, etc. n'est pas autorisé. Lors de la correction une grande attention sera portée à la qualité de la rédaction.

Exercice 1. *Soit X un espace vectoriel normé, $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre d'éléments de X et $(c_1, \dots, c_n) \in \boldsymbol{R}^n$. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue f telle que $f(x_i) = c_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Soit $E = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. C'est un sous-espace vectoriel de X dont $(x_1, \dots, x_n)$ est une base. Il existe une unique application linéaire $f : E \to \mathbf{R}$ telle que $f(x_i) = c_i$, et cette application est continue puisque E est de dimension finie. Le théorème de prolongement de Hahn–Banach nous permet d'étendre f en une application linéaire continue définie sur X tout entier, ce qui démontre le résultat attendu.

Exercice 2. *Montrer qu'il existe une forme linéaire continue $T : (L^\infty([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (\boldsymbol{R}, |\cdot|)$ de norme 1 et telle que pour toute $f \in C([0,1], \boldsymbol{R})$ on ait $T(f) = f\left(\frac{1}{2}\right)$.*

L'application $S : (C([0,1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbf{R}, |\cdot|)$ définie par $S(f) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ est linéaire, et pour tout $f \in C([0,1], \mathbf{R})$ on a $|S(f)| \le \|f\|_\infty$ donc $\|S\| \le 1$. Notons g la fonction constante égale à 1 ; on a $\|g\| = 1$ et $S(g) = 1$, ce dont on conclut que $\|S\| \ge 1$ et donc que $\|S\| = 1$.
Identifions $C([0,1], \mathbf{R})$ à un sous-espace vectoriel de $L^\infty([0,1])$; le théorème de Hahn–Banach nous permet d'étendre S en une application linéaire $T : (L^\infty([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbf{R}, |\cdot|)$ de norme 1.

Exercice 3. *Montrer que tout espace métrique compact est séparable.*

Pour tout n il existe un sous-ensemble fini $A_n \subseteq X$ tel que $X = \bigcup_{x \in A_n} B(x, 2^{-n})$ (on utilise ici que (X,d) est précompact, ce qui est une conséquence immédiate de la propriété de Borel–Lebesgue et du fait que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $X = \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon)$).
Notons $A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$. Alors A est (au plus) dénombrable en tant qu'union dénombrable d'ensembles finis. Reste à montrer que A est dense ; pour cela, fixons $\varepsilon > 0$ et $x \in X$ puis choisissons n tel que $2^{-n} \le \varepsilon$. Il existe $a \in A_n$ tel que $d(x,a) < 2^{-n} \le \varepsilon$, donc il existe $a \in A$ tel que $d(x,a) < \varepsilon$. Ceci montre que A est dense dans (X,d), qui est donc bien séparable.

Exercice 4. *Dans cet exercice, pour $p \in [1, +\infty]$ on munit $L^p([0,1])$ de sa norme usuelle notée $\|\cdot\|_p$. On considère un sous-espace vectoriel fermé X de $L^1([0,1])$ tel que $X \subseteq \bigcup_{1 < p \le +\infty} L^p([0,1])$. On souhaite montrer qu'il existe $q > 1$ tel que $X \subseteq L^q([0,1])$.*
Pour alléger un peu la notation, pour $n \ge 1$ on note $q_n = 1 + \frac{1}{n}$. Pour $n \in \boldsymbol{N}^*$ on considère

$$X_n = \{f \in X \cap L^{q_n}([0,1]) : \|f\|_{q_n} \le n\}$$

1. *Montrer que chaque X_n est fermé dans $(X, \|\cdot\|_1)$ (on pourra penser à utiliser le lemme de Fatou).*
   Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $(f_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X_n qui converge vers f dans $(X, \|\cdot\|_1)$. Comme $(f_i)_{i \in \mathbf{N}}$ converge vers f dans $(L^1([0,1]), \|\cdot\|_1)$, il existe une sous-suite $(f_{\varphi(i)})_{i \in \mathbf{N}}$ qui converge vers f presque partout.
   En appliquant le lemme de Fatou, on obtient :
   $$\int_{[0,1]} |f|^{q_n} d\lambda = \int_{[0,1]} \lim_{i \to +\infty} |f_{\varphi(i)}|^{q_n} d\lambda \le \liminf_{i \to +\infty} \int_{[0,1]} |f_{\varphi(i)}|^{q_n} d\lambda \le n^{q_n}$$
   (La dernière inégalité vient du fait que $\|f_i\|_{q_n} \le n$ pour tout i).
   On vient de montrer que $f \in L^{q_n}([0,1])$ et $\|f\|_{q_n} \le n$, autrement dit $f \in X_n$ et X_n est donc bien fermé.

2. *Montrer que* $X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} X_n$.

Par définition, $\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} X_n \subseteq X$. Pour montrer l'inclusion réciproque, considérons $f \in X$; par hypothèse sur X il existe $p > 1$ tel que $f \in L^p([0,1])$. Rappelons que (à cause de l'inégalité de Hölder, voir ci-dessous si nécessaire) on a $\|f\|_q \leq \|f\|_p$ pour tout $q \in [1,p]$. En particulier, pour tout $n \geq \|f\|_p$ et tel que $q_n \leq p$ on a $f \in X_n$, ce qui montre que $X = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} X_n$.

Rappelons comment se montre le fait énoncé au paragraphe précédent : soit $q \in [1,p]$ et f dans $L^p([0,1])$. En notant $r = \frac{p}{q} \geq 1$ on a que $|f|^q \in L^r([0,1])$ et $|f|^q = |f|^q \cdot 1$; l'inégalité de Hölder donne alors $\||f|^q\|_1 \leq \||f|^q\|_r \cdot 1 = \||f|^p\|^q$, ou encore $\|f\|_q^q \leq \|f\|_p^q$.

3. *Montrer qu'il existe n tel que X_n est d'intérieur non vide dans X.*

Chaque X_n est fermé dans X, et X est fermé dans $(L^1([0,1]), \|\cdot\|_1)$, qui est un espace de Banach. Donc $(X, \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach, et on peut invoquer le théorème de Baire : puisque les X_n forment une famille dénombrable de fermés qui recouvre X, l'un d'entre eux doit être d'intérieur non vide.

4. *Conclure.*

Il suit du résultat de la question précédente que, pour un certain n, $L^{q_n}([0,1]) \cap X$ est d'intérieur non vide dans X ; un sous-espace vectoriel d'intérieur non vide doit coïncider avec l'espace tout entier, autrement dit il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $L^{q_n}([0,1]) \cap X = X$, i.e. $X \subseteq L^{q_n}([0,1])$.

Exercice 5. *Soit X un espace de Banach. Dans cet exercice on fixe une suite $(e_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ d'éléments de X dont on suppose qu'elle est une* base de Schauder*, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$ il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ telle que* $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$.

Étant donnés x et $(a_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ comme ci-dessus on pose $\varphi_n(x) = a_n$. On considère pour $n \in \boldsymbol{N}$ l'application linéaire $P_n = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k e_k$ et on souhaite établir que chaque P_n est continue et que $\sup\{\|P_n\| \colon n \in \boldsymbol{N}\} < +\infty$

Dans la définition de P_n, le terme e_k était oublié dans le sujet distribué le jour du partiel. Cela affecte la question 5 de cet exercice.

1. *On considère l'ensemble Σ formé par toutes les suites $(a_n)_{n\in\boldsymbol{N}} \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$ converge.*

   (a) *Montrer que Σ est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$.*

   Manifestement Σ contient la suite nulle. De plus, si $\sum a_n e_n$ et $\sum b_n e_n$ convergent, et λ est un scalaire, alors $\sum(\lambda a_n + b_n)e_n$ converge puisqu'une combinaison linéaire de deux suites convergentes est encore une suite convergente. Donc Σ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

   (b) *Pour $a \in \Sigma$ on pose*

   $$N(a) = \sup\left\{ \left\| \sum_{i=k}^{p} a_i e_i \right\| : (k,p) \in \mathbf{N}^2 \text{ et } k \leq p \right\}$$

   Montrer que N est une norme sur Σ.

   Puisque toute suite convergente est bornée, l'ensemble apparaissant dans le sup ci-dessus est borné pour tout $a \in \Sigma$ et N est donc bien définie, à valeurs positives. Clairement $N(0) = 0$, et $N(\lambda a) = |\lambda| N(a)$ pour tout $\lambda \neq 0$ puisque $x \mapsto |\lambda| x$ est une bijection croissante de $\mathbf{R}^+$ dans lui-même (et donc pour tout $A \subseteq \mathbf{R}^+$ on a $\sup |\lambda A| = |\lambda| \sup A$). Si $N(a) = 0$ alors pour tout n on a $\|a_n e_n\| = 0$ donc $a_n = 0$ et a est la suite nulle (la définition d'une base de Schauder implique immédiatement que chaque e_n est non nul, donc $\|e_n\| \neq 0$).

   Il nous reste à vérifier l'inégalité triangulaire ; soit $a, b \in \Sigma$. Pour tout $(k,p) \in \mathbf{N}^2$ tels que $k \leq p$ on a

   $$\left\| \sum_{i=k}^{p} (a_i + b_i) e_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=k}^{p} a_i e_i \right\| + \left\| \sum_{i=k}^{p} b_i e_i \right\| \leq N(a) + N(b)$$

   On en conclut que $N(a+b) \leq N(a) + N(b)$, et N est donc bien une norme sur Σ.

(c) *Montrer que* (Σ, N) *est un espace de Banach.*

Soit $(a^n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy dans Σ. Pour tout $i \in \mathbf{N}$ fixé et tout $n, m \in \mathbf{N}$ on a $\|a_i^n e_i - a_i^m e_i\| \leq N(a^n - a^m)$. Donc chaque suite $(a_i^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ et est donc convergente vers a_i.

Pour montrer que $\sum a_i e_i$ converge, fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $M \in \mathbf{N}$ tel que $N(a^n - a^m) \leq \varepsilon$ pour tout $n, m \geq I$; fixons un tel M. Puisque $\sum a_i^M e_i$ converge, il existe un rang I tel que pour tout (k, p) tels que $I \leq k \leq p$ on ait $\| \sum_{i=k}^p a_i^M e_i| \leq \varepsilon$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, il suit de cela et du fait que $N(a^n - a^M) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq M$ que pour tout (k, p) tels que $I \leq k \leq p$ on a $\| \sum_{i=k}^p a_i e_i| \leq 2\varepsilon$.

Finalement, $\sum a_i e_i$ vérifie le critère de Cauchy dans $(X, \|\cdot\|)$, qui est complet : $\sum a_i e_i$ converge, par conséquent $a \in \Sigma$. La même idée donne que $N(a^n - a)$ tend vers 0, autrement dit $(a^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers a dans (Σ, N) qui est donc complet.

On considère l'application linéaire $T\colon \Sigma \to X$ *définie par* $T(a) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$.

2. *Montrer que* $T\colon (\Sigma, N) \to (X, \|\cdot\|)$ *est continue et bijective.*

   Par définition d'une base de Schauder, pour tout $x \in X$ il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n$, autrement dit T est bijective. La linéarité de T est immédiate (et donnée par l'énoncé).

   Pour voir que T est continue, fixons $a \in \Sigma$. Pour tout $I \in \mathbf{N}$ on a $\| \sum_{i=0}^I a_i e_i\| \leq N(a)$ par définition de N, ce qui donne $\|T(a)\| \leq N(a)$. Puisque T est linéaire, on en conclut que T est continue (et de norme plus petite que 1).

3. *Montrer qu'il existe* $M \in \boldsymbol{R}$ *telle que pour tout* $x \in X$ *on ait*

$$\sup\left\{\left\|\sum_{i=k}^{p} \varphi_i(x) e_i\right\| : (k,p) \in \mathbf{N}^2 \text{ et } k \leq p\right\} \leq M\|x\|$$

   Comme (Σ, N) et $(X, \|\cdot|)$ sont deux espaces de Banach, on peut appliquer le théorème de l'application ouverte à la bijection linéaire continue T, et conclure que T^{-1} est également une bijection linéaire continue, autrement dit il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in X$ on ait $N(T^{-1}(x)) \leq M\|x\|$. Par définition de φ_i on a $T^{-1}(x) = (\varphi_i(x))_{i\in\mathbf{N}}$, et alors la définition de N alliée à l'inégalité précédente nous permet de conclure que

$$\sup\left\{\left\|\sum_{i=k}^{p} \varphi_i(x) e_i\right\| : (k,p) \in \mathbf{N}^2 \text{ et } k \leq p\right\} \leq M\|x\|$$

4. *Montrer que* φ_n *est continue pour tout* $n \in \boldsymbol{N}$.

   Fixons $n \in \mathbf{N}$. L'inégalité obtenue à la question précédente nous donne en particulier que pour tout $x \in X$ on a $\|\varphi_n(x) e_n\| \leq M\|x\|$, donc $|\varphi_n(x)| \leq \frac{M}{\|e_n\|}\|x\|$ (rappelons que $\|e_n\| \neq 0$). Comme φ_n est linéaire, cette inégalité nous permet de conclure que φ_n est continue.

5. *Conclure.*

   Chaque P_n est linéaire continue en tant que combinaison linéaire d'applications linéiares continues. De plus, pour tout $x \in X$ on a par définition d'une base de Schauder que $\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = x$. En particulier, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée pour tout $x \in X$, et le théorème de Banach–Steinhaus nous permet de conclure que $\sup\{\|P_n\|\colon n \in \mathbf{N}\} < +\infty$.