Examen partiel du 23 octobre 2023: éléments de correction.

Dans les exercices 1 et 4 on considère des espaces vectoriels normés sur $\mathbf{K} = \boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$.

Exercice 1. *On munit $\ell^1(\boldsymbol{N})$ de la norme $\|\cdot\|_1$, définie par $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|$.*

1. *On note $E = \{x \in \ell^1(\boldsymbol{N}) \colon \exists N \in \boldsymbol{N}\ \forall n \geq N\ x(n) = 0\}$. Montrer que E est dense dans $\ell^1(\boldsymbol{N})$.*

   Soit $x \in \ell^1(\mathbf{N})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} |x(n)| < \varepsilon$. Considérons

$$y \colon n \mapsto \begin{cases} x(n) & \text{si } n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Alors $y \in E$ et $\|x - y\|_1 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |x(n)| \leq \varepsilon$. On vient de montrer que E est dense dans $\ell^1(\mathbf{N})$.

Pour $u \in \ell^\infty(\boldsymbol{N})$, on définit $T_u \colon \ell^1(\boldsymbol{N}) \to \mathbf{K}$ par

$$\forall v \in \ell^1(\mathbf{N}) \quad T_u(v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)v(n)$$

2. *Montrer que pour tout $u \in \ell^\infty(\boldsymbol{N})$ la fonction T_u est bien définie, linéaire, et déterminer sa norme subordonnée.*

   On fixe $u \in \ell^\infty(\mathbf{N})$. Soit $v \in \ell^1(\mathbf{N})$ et $N \in \mathbf{N}$. On a

$$\sum_{n=0}^{N} |u(n)v(n)| \leq \|u\|_\infty \sum_{n=0}^{N} |v(n)| \leq \|u\|_\infty \|v\|_1$$

   Ceci étant vrai pour tout N, on en déduit que $n \mapsto u(n)v(n)$ appartient à $\ell^1(\mathbf{N})$ et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u(n)v(n)| \leq \|u\|_\infty \|v\|_1$$

   Donc T_u est bien définie, et sa linéarité est immédiate (une combinaison linéaire de deux séries convergentes converge vers la combinaison linéaire de leurs sommes) ; la majoration précédente nous permet alors de conclure que T_u est continue et que $\|T_u\| \leq \|u\|_\infty$.
   Pour établir l'inégalité réciproque, fixons $\varepsilon > 0$ puis trouvons $n \in \mathbf{N}$ tel que $|u(n)| \geq \|u\|_\infty - \varepsilon$. Notons v la suite qui vaut 1 en n et 0 ailleurs ; alors on a $\|v\|_1 = 1$ et $|T_u(v))| = |u(n)| \geq \|u\|_\infty - \varepsilon$. On en déduit que $\|T_u\| \geq \|u\|_\infty - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, et par conséquent $\|T_u\| \geq \|u\|_\infty$.
   Finalement on a obtenu $\|T_u\| = \|u\|_\infty$.

3. *Soit $\varphi \in \ell^1(\boldsymbol{N})'$. Pour $n \in \boldsymbol{N}$ on note e_n l'élément de $\ell^1(\boldsymbol{N})$ défini par $e_n(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.*

   Pour $n \in \boldsymbol{N}$ on pose $u(n) = \varphi(e_n)$.

   (a) *Montrer que $u \in \ell^\infty(\boldsymbol{N})$ et que $T_u(v) = \varphi(v)$ pour tout $v \in E$.*
   Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $|u(n)| = |\varphi(e_n)| \leq \|\varphi\|\|e_n\|_1 = \|\varphi\|$. Donc $u \in \ell^\infty(\mathbf{N})$.
   Puisque $T_u(e_n) = \varphi(e_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a par linéarité $T_u(v) = \varphi(v)$ pour tout v qui s'écrit comme combinaison linéaire des e_n, autrement dit pour tout $v \in E$.

(b) *Montrer que $T_u = \varphi$.*

Comme T_u et φ sont continues et coïncident sur E, qui est dense dans $\ell^1(\mathbf{N})$, elles sont égales sur $\ell^1(\mathbf{N})$: $T_u = \varphi$.

4. *Montrer que l'application $u \mapsto T_u$ est une isométrie linéaire surjective de $\ell^\infty(\boldsymbol{N})$ sur $\ell^1(\boldsymbol{N})'$.*

On vient de montrer que $u \mapsto T_u$ est surjective, on a déjà vérifié qu'elle est isométrique, et sa linéarité est immédiate : pour tout $u_1, u_2 \in \ell^\infty(\mathbf{N})$, tout $\lambda \in \mathbf{K}$ et tout $v \in \ell^1(\mathbf{N})$ on a

$$T_{\lambda u_1 + u_2}(v) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_1(n) + u_2(n))v(n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_1(n)v(n) + \sum_{n=0}^{+\infty} u_2(n)v(n) = \lambda T_{u_1}(v) + T_{u_2}(v)$$

Exercice 2. *Soit H un espace de Hilbert réel et $P \colon H \to H$ une application linéaire continue telle que $P \circ P = P$.*

1. *Montrer que* $\mathrm{Im}(P)$ *est fermé.*

Commr P est un projecteur on a $\mathrm{Im}(P) = \{x \in H \colon P(x) = x\} = \ker(Id - P)$, qui est fermé puisque $Id - P$ est continue.

2. *Montrer que P est une projection orthogonale si, et seulement si,* $\ker(P) = \mathrm{Im}(P)^\perp$.

Supposons que P est une projection orthogonale. Alors pour tout $x \in H$ on a que $x - P(x)$ est orthogonal à $\mathrm{Im}(P)$; en particulier si $x \in \ker(P)$ alors $x \in \mathrm{Im}(P)^\perp$. Comme $\ker(P)$ et $\mathrm{Im}(P)^\perp$ sont deux supplémentaires de $\mathrm{Im}(P)$ (pour tout projecteur P on a $H = \ker(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$), cette inclusion nous donne l'égalité $\ker(P) = \mathrm{Im}(P)^\perp$.

(on pourrait aussi obtenir l'inclusion réciproque en regardant $\langle P(x), P(x)\rangle = \langle P(x), x\rangle = 0$ pour $x \in \mathrm{Im}(P)^\perp$)

Réciproquement, supposons que $\ker(P) = \mathrm{Im}(P)^\perp$ et notons Q la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(P)$. On a $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Im}(Q)$ et $\ker(P) = \mathrm{Im}(P)^\perp = \mathrm{Im}(Q)^\perp = \ker(Q)$. Comme P et Q sont des projecteurs, on en déduit que $P = Q$.

3. *Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) P est une projection orthogonale.

(b) $\|P\| \leq 1$.

(c) $\forall x \in H \quad \langle P(x), x\rangle \leq \|x\|^2$.

Indication. *Pour l'implication (c) $\Rightarrow$ (a), considérer pour $\varepsilon > 0$ $\langle P(x+\varepsilon y), x + \varepsilon y\rangle$ avec $x \in \mathrm{Im}(P)$ et $y \in \mathrm{Im}(P)^\perp$, afin d'établir que* $\mathrm{Im}(P)^\perp \subseteq \ker(P)$.

Supposons que P est une projection orthogonale. Alors pour tout $x \in H$ on a $\langle P(x), x - P(x)\rangle = 0$, donc $\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|x - P(x)\|^2$, ce qui entraîne que $\|P(x)\|^2 \leq \|x\|^2$. Ceci étant vrai pour tout $x \in H$, on obtient comme attendu que $\|P\| \leq 1$.

Si $\|P\| \leq 1$ alors d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz on a pour tout $x \in H$ que

$$\langle P(x), x\rangle \leq \|P(x)\|\|x\| \leq \|P\|\|x\|^2 \leq \|x\|^2$$

Supposons maintenant la troisième condition vérifiée, et considérons $x \in \mathrm{Im}(P)$, $y \in \mathrm{Im}(P)^\perp$ ainsi que $\varepsilon > 0$, puis calculons

$$\begin{aligned}\langle P(x+\varepsilon y), x+\varepsilon y\rangle &= \langle P(x+\varepsilon y), x\rangle \quad \text{parce que } y \in \mathrm{Im}(P)^\perp \\ &= \langle P(x), x\rangle + \varepsilon\langle P(y), x\rangle \\ &= \|x\|^2 + \varepsilon\langle P(y), x\rangle \quad \text{parce que } P(x) = x\end{aligned}$$

Cette quantité étant plus petite que $\|x + \varepsilon y\|^2 = \|x\|^2 + \varepsilon^2\|y\|^2$, on obtient pour tout $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon\langle P(y), x\rangle \leq \varepsilon^2\|y\|^2$$

En divisant par ε puis en faisant tendre ε vers 0, on obtient que $\langle P(y), x\rangle \leq 0$.

L'inégalité précédente étant aussi vraie pour $-x$ et y, on conclut que pour tout $x \in \operatorname{Im}(P)$ et tout $y \in \operatorname{Im}(P)^\perp$ on a $\langle P(y), x\rangle = 0$.
En particulier pour tout $y \in \operatorname{Im}(P)^\perp$ on a $\|P(y)\|^2 = \langle P(y), P(y)\rangle = 0$, donc $\operatorname{Im}(P)^\perp \subseteq \ker(P)$. Comme P est un projecteur cela entraîne (encore parce que $\operatorname{Im}(P)$ et $\ker(P)$ sont deux supplémentaires de $\operatorname{Im}(P)$) que $\operatorname{Im}(P)^\perp = \ker(P)$, et on a déjà vu que cela implique que P est une projection orthogonale.

4. *Montrer que P est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im}(P)$ si, et seulement si, $P^* = P$.*
Si P est une projection orthogonale alors on a pour tout $x, y \in H$ que $y - P(y)$ est orthogonal à $P(x)$, donc $\langle P(x), P(y)\rangle = \langle P(x), y\rangle$. On a de même $\langle x, P(y)\rangle = \langle P(x), P(y)\rangle$. On conclut en particulier que pour tout $x, y \in H$ on a $\langle P(x), y\rangle = \langle x, P(y)\rangle$, donc $P^* = P$.
Réciproquement, si $P^* = P$ alors pour tout $x \in \operatorname{Im}(P)^\perp$ on a
$$\|P(x)\|^2 = \langle P(x), P(x)\rangle = \langle x, P^*P(x)\rangle = \langle x, P^2(x)\rangle = \langle x, P(x)\rangle = 0$$
Donc $P(x) = 0$ pour tout $x \in \operatorname{Im}(P)^\perp$, ce qui établit que $\operatorname{Im}(P)^\perp \subseteq \ker(P)$, et on a déjà vu plus haut que cela entraîne que P est une projection orthogonale
(Pour la deuxième inclusion on aurait aussi pu écrire que pour $x \in \ker(P)$ et $y \in \operatorname{Im}(P)$ on a z tel que $y = P(z)$ d'où $\langle x, y\rangle = \langle x, P(z)\rangle = \langle P^*(x), z\rangle = \langle P(x), z\rangle = 0$).

Exercice 3. *Soit $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ une suite de fonctions de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$. On suppose que :*

- *Pour tout $x \in \boldsymbol{R}$ l'ensemble $\{f_n(x) \colon n \in \boldsymbol{N}\}$ est borné.*
- *La famille de fonctions $\{f_n \colon n \in \boldsymbol{N}\}$ est équicontinue.*

Montrer que $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ admet une suite extraite qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction continue $f \colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$.
Il s'agit ici de mettre en place une extraction diagonale : sur chaque compact K on est dans le contexte du théorème d'Ascoli, et on peut donc extraire une sous-suite qui converge uniformément sur K ; mais on veut produire une sous-suite qui converge simultanément sur tous les compacts.
Considérons la suite des restrictions des f_n à $[-1, 1]$, qui est compact. Cette suite satisfait les hypothèses du théorème d'Ascoli (dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ toute partie bornée est relativement compacte), et on peut donc trouver $\varphi_1 \colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que $(f_{\varphi_1(n))})_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$.
En répétant ce raisonnement, et en utilisant la compacité de $[-k, k]$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on peut trouver pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ une fonction $\varphi_k \colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que $(f_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_k(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[-k, k]$ (en extrayant une sous-suite qui converge uniformément sur $[-k, k]$ de la suite $(f_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_{k-1}(n)})_{n\in\mathbf{N}}$).
Posons maintenant $\psi(n) = \varphi_1 \circ \ldots \varphi_n(n)$. La fonction $\psi \colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est strictement croissante, et pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ la suite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite extraite de $(f_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_k(n)})_{n\in\mathbf{N}}$. Par conséquent, $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[-k, k]$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.
En particulier, cette suite extraite converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers une limite que l'on note f ; puisque chaque compact de $\mathbf{R}$ est contenu dans $[-k, k]$ pour tout k suffisamment grand, $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur les compacts.
Puisque la famille $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est équicontinue, chaque f_n est continue. Donc f est continue sur $[-k, k]$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ en tant que limite uniforme de fonctions continues. Par conséquent f est continue sur $\mathbf{R}$.

Exercice 4. *Dans cet exercice on fixe $p \in [1, +\infty[$ et on munit $\ell^p(\boldsymbol{N})$ de sa norme usuelle $\|\cdot\|_p$, définie par $\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.*
On cherche à caractériser les parties compactes de $(\ell^p(\boldsymbol{N}), \|\cdot\|_p)$. Soit A une partie de $\ell^p(\boldsymbol{N})$.

1. *Dans cette question on suppose que A, muni de la distance induite par $\|\cdot\|_p$, est précompact.*
   (a) *Montrer que A est borné.*

Par définition de la précompacité, il existe $a_1, \ldots, a_n$ tels que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, 1)$. L'inégalité triangulaire nous donne alors que pour tout $a \in A$ on a $\|a\|_p \leq \max_{i=1,\ldots,n} \|a_i\|_p + 1$. Donc A est borné.

(b) *Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \boldsymbol{N}$ tel que pour tout $x \in A$ on ait* $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} |x(k)|^p < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$; utilisons la précompacité de A pour trouver $a_1, \dots, a_r \in A$ tels que pour tout $a \in A$ il existe $i \in \{1, \dots, r\}$ satisfaisant $\|a - a_i\|_p \leq \varepsilon$.
Pour $N \in \mathbf{N}$ et $x \in \ell^p(\mathbf{N})$ notons x^N le vecteur obtenu en posant $x_N(i) = x(i)$ pour tout $i \leq N$, et $x(i) = 0$ pour tout $i \geq N+1$.
Pour tout $x \in \ell^p(\mathbf{N})$ on a $\|x - x^N\|_p \leq \|x\|_p$.
Comme chaque a_i appartient à $\ell^p(\mathbf{N})$, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ il existe N_i tel que

$$\sum_{k=N_i+1}^{+\infty} |a_i(k)|^p \leq \varepsilon^p$$

Notons $N = \max\limits_{i=1,\dots,p} N_i$. On a $\|a_i - a_i^N\|_p \leq \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$.
Grâce à l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_p$, on a pour tout $a \in A$ et tout $i \in \{1, \dots, r\}$ que

$$\|a - a^N\|_p \leq \|a - a_i\|_p + \|a_i - a_i^N\|_p + \|a_i^N - a^N\|_p \leq 2\|a - a_i\|_p + \|a_i - a_i^N\|_p$$

On conclut que $\|a - a^N\|_p \leq 3\varepsilon$ pour tout $a \in A$.
On vient de prouver qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $a \in A$ on ait

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} |a(k)|^p \leq (3\varepsilon)^p$$

Comme $(3\varepsilon)^p$ tend vers 0 avec ε, ceci est équivalent à ce que demandait l'énoncé.

2. *Réciproquement, supposons que A est borné et que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \boldsymbol{N}$ tel que pour tout $x \in A$ on ait* $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} |x(k)|^p < \varepsilon$.

(a) *On fixe $\varepsilon > 0$ et $N \in \boldsymbol{N}$. On note $\pi_N \colon \ell^p(\boldsymbol{N}) \to \mathbf{K}^{N+1}$ l'application définie par*

$$\pi_N(x) = (x(0), \dots, x(N))$$

Montrer que $\pi_N(A)$ est une partie précompacte de $(\mathbf{K}^{N+1}, \|\cdot\|_p)$.

L'application π_N est linéaire continue (de norme 1). Comme A est borné $\pi_N(A)$ est donc borné, par conséquent relativement compact dans $\mathbf{K}^{N+1}$ (parce que $\mathbf{K}^{N+1}$ est un espace vectoriel normé de dimension finie) et donc précompact.

(b) *Montrer que A est précompact dans $(\ell^p(\boldsymbol{N}), \|\cdot\|_p)$.*

Soit $\varepsilon > 0$; fixons $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $x \in A$ on ait $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} |x(k)|^p < \varepsilon^p$, autrement dit (en identifiant naturellement $\mathbf{K}^{N+1}$ au sous-ensemble de $\ell^p(\mathbf{N})$ formé par les suites nulles à partir du rang $N+1$) tel que pour tout $x \in A$ on ait $\|x - \pi_N(x)\|_p \leq \varepsilon$.
Comme $(\pi_N(A), \|\cdot\|_p)$ est précompact, il existe $a_1, \dots, a_r \in A$ tels que $\pi_N(A)$ est contenu dans $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{r} B(\pi_N(a_i), \varepsilon)$.
Pour tout $x \in A$ et tout $i \in \{1, \dots, r\}$ on a

$$\begin{aligned}\|x - a_i\| &\leq \|x - \pi_N(x)\|_p + \|\pi_N(x) - \pi_N(a_i)\|_p + \|a_i - \pi_N(a_i)\|_p \\ &\leq 2\varepsilon + \|\pi_N(x) - \pi_N(a_i)\|_p\end{aligned}$$

On en conclut que pour tout $x \in A$ il existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tel que $\|x - a_i\|_p \leq 3\varepsilon$, ce qui prouve que $(A, \|\cdot\|_p)$ est précompact.

3. *À l'aide des résultats des questions précédentes, énoncer une caractérisation des parties compactes de* $(\ell^p(\boldsymbol{N}), \|\cdot\|_p)$.

   Rappelons qu'un espace métrique est compact si, et seulement si, il est à la fois précompact et complet ; comme $(\ell^p(\mathbf{N}), \|\cdot\|_p)$ est complet, un sous-ensemble de $\ell^p(\mathbf{N})$ est complet pour la distance induite si, et seulement si, il est fermé.

   Il suit qu'une partie de $\ell^p(\mathbf{N})$ est compacte si, et seulement si, elle est fermée et précompacte (pour la distance induite). À l'aide des résultats précédents on obtient finalement la caractérisation suivante : une partie A de $(\ell^p(\mathbf{N}), \|\cdot\|_p)$ est compacte si, et seulement si

   - A est fermée.
   - A est bornée.
   - Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $x \in A$ on ait $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} |x(k)|^p < \varepsilon$.