Examen partiel du 21 octobre 2024: éléments de correction.

L'emploi de documents, calculatrices, etc. n'est pas autorisé. Le sujet comporte 4 exercices indépendants.

Exercice 1. *Dans cet exercice, on note c l'espace des suites réelles convergentes, et c_0 l'espace des suites réelles qui tendent vers 0 en $+\infty$. On les munit de $\|\cdot\|_\infty$, définie par $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbf{N}\}$.*

1. *Montrer que $(c, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.*

   Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy dans c.

   Pour tout $i \in \mathbf{N}$ et tout $n, m \in \mathbf{N}$ on a $|x_n(i) - x_m(i)| \leq \|x_n - x_m\|_\infty$, par conséquent la suite $(x_n(i))_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ et est donc convergente. Notons $x(i)$ sa limite.

   Montrons que $\|x_n - x\|_\infty \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. Pour cela, on fixe de nouveau $\varepsilon > 0$ et on trouve N tel que $\|x_n - x_m\|_\infty \leq \varepsilon$ pour tout $n, m \geq N$, autrement dit $|x_n(i) - x_m(i)| \leq \varepsilon$ pour tout $i \in \mathbf{N}$ et tout $n, m \geq N$.

   En faisant tendre m vers $+\infty$ (à n et i fixés) on obtient $|x_n(i) - x(i)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ et tout $i \in \mathbf{N}$, autrement dit $\|x_n - x\|_\infty \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

   Pour conclure, on doit prouver que x est convergente, et pour cela il suffit de prouver que x est une suite de Cauchy.

   Fixons $\varepsilon > 0$ et trouvons n tel que $\|x_n - x\|_\infty \leq \varepsilon$. Comme $(x_n)_n$ est de Cauchy, il existe I tel que pour tout $i, j \geq I$ on ait $|x_n(i) - x_n(j)| \leq \varepsilon$, et en appliquant l'inégalité triangulaire on en déduit que pour tout $i, j \geq I$ on a $|x(i) - x(j)| \leq 3\varepsilon$. Par conséquent x est bien une suite de Cauchy, donc un élément de c.

   Remarque. Il était aussi possible d'utiliser sans démonstration le fait que $(\ell^\infty(\mathbf{N}, \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach, puis de montrer que c est fermé dans $(\ell^\infty(\mathbf{N}, \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

2. *Montrer que l'application $L : x \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} x(n)$ est continue sur c, puis que $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.*

   L'application L est linéaire sur c. De plus, pour toute suite convergente $(x(n))_{n\in\mathbf{N}}$, on a pour tout n que $x(n) \in [-\|x\|_\infty, \|x\|_\infty]$, qui est fermé, donc $L(x) \in [-\|x\|_\infty, \|x\|_\infty]$. Puisque L est linéaire, cela prouve que L est continue (et de norme subordonnée inférieure ou égale à 1 ; en considérant par exemple une suite constante, on vérifie facilement que $\|L\| = 1$).

   Puisque $c_0 = L^{-1}(\{0\})$, c_0 est fermé dans l'espace de Banach $(c, \|\cdot\|_\infty)$, ce qui implique que $(c, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

3. *Soit E l'espace des suites réelles ne prenant qu'un nombre fini de valeurs non nulles. Montrer que E est dense dans $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.*

   Soit $x \in c_0$, et $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x(n) = 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $|x(n)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

   Posons $y(n) = \begin{cases} x(n) & \text{si } n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

   On a alors que $y \in E$ et

   $$\|x - y\|_\infty = \sup\{|x(n) - y(n)| : n \in \mathbf{N}\} = \sup\{|x(n)| : n > N\} \leq \varepsilon$$

   Ceci prouve que E est dense dans $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

4. *Soit $u \in \ell^1(\mathbf{N}, \mathbf{R})$. Pour $x \in c_0$ on pose*

   $$T_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)u(n)$$

(a) *Montrer que T_u est bien définie, continue et que $\|T_u\| = \|u\|_1$.*

Soit $x \in c_0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $|x(n)u(n)| \leq \|x\|_\infty |u(n)|$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)u(n)|$ est convergente puisque $u \in \ell^1(\mathbf{N}, \mathbf{R})$. Ceci prouve que T_u est bien définie ; par linéarité de la limite, T_u est linéaire.

De plus on a pour tout $N \in \mathbf{N}$ que $\left| \sum_{n=0}^{N} x(n)u(n) \right| \leq \|x\|_\infty \|u\|_1$, et on conclut en faisant tendre N vers $+\infty$ que $|T_u(x)| \leq \|x\|_\infty \|u\|_1$ pour tout $x \in c_0$. Ceci prouve que T_u est continue et $\|T_u\| \leq \|u\|_1$.

Fixons $\varepsilon > 0$ et trouvons $N \in \mathbf{N}$ tel que $\sum_{n=0}^{N} |u(n)| \geq \|u\|_1 - \varepsilon$, puis posons

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq N \text{ et } u(n) \geq 0 \\ -1 & \text{si } n \leq N \text{ et } u(n) < 0 \\ 0 & \text{si } n > N \end{cases}$$

Alors $\|x\|_\infty = 1$ et $T_u(x) = \sum_{n=0}^{N} |u(n)| \geq \|u\|_1 - \varepsilon$, ce qui prouve que $\|T_u\| \geq \|u\|_1 - \varepsilon$. Puisque ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut que $\|T_u\| = \|u\|_1$.

(b) *Soit φ une forme linéaire continue sur c_0. On note e_n l'élément de c_0 tel que $e_n(n) = 1$ et $e_n(i) = 0$ si $i \neq n$; on pose $u(n) = \varphi(e_n)$.*
Montrer que $u \in \ell^1(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ et que $T_u = \varphi$.

Soit $N \in \mathbf{N}$; pour $n \leq N$ posons $x(n) = 1$ si $\varphi(e_n) \geq 0$ et $x(n) = -1$ si $\varphi(e_n) < 0$. Posons également $x(n) = 0$ pour tout $n > N$. Alors $x \in E$, $\|x\|_\infty = 1$ et

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} |u(n)| &= \sum_{n=0}^{N} |\varphi(e_n)| \\ &= \sum_{n=0}^{N} x(n)\varphi(e_n) \\ &= \varphi\left(\sum_{n=0}^{N} x(n)e_n\right) \\ &= \varphi(x) \\ &\leq \|\varphi\| \|x\|_\infty \\ &\leq \|\varphi\| \end{aligned}$$

On en conclut que $u \in \ell^1(\mathbf{N}, \mathbf{R})$; de plus pour tout $y \in E$ on a $T_u(y) = \varphi(y)$. Puisque E est dense dans c_0 et que T_u et φ sont toutes deux continues, on en déduit que $T_u = \varphi$.

(c) *Montrer que le dual topologique de c_0 est linéairement isométrique à $\ell^1(\mathbf{N}, \mathbf{R})$.*

Considérons l'application $\Phi \colon \ell^1(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \to c_0'$ définie par $\Phi(u) = T_u$. Alors Φ est linéaire, surjective d'après la question précédente et $\|\Phi(u)\| = \|u\|_1$ pour tout $u \in \ell^1(\mathbf{N}, \mathbf{R})$. Ceci prouve que Φ est une isométrie linéaire surjective de $\ell^1(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ sur c_0'.

Remarque : le dual topologique de c est aussi linéairement isométrique à ℓ^1. Les espaces c et c_0 sont linéairement isomorphes mais ne sont pas linéairement isométriques.

<u>Exercice 2.</u> *Soit H un espace de Hilbert, $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une base hilbertienne de H et $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une famille orthonormée. On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|e_n - f_n\|^2$ converge et on fixe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \|e_n - f_n\|^2 < 1$.*
On note $E = \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_N, f_{N+1}, f_{N+2}, \ldots)$.

1. *Soit $x \in E^\perp$.*

(a) *Justifier que* $\|x\|^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} |\langle x, e_n - f_n\rangle|^2$.

Puisque $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base hilbertienne, l'identité de Parseval nous donne que

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$$

Comme $x \in E^\perp$, on a $\langle x, e_n\rangle = 0$ pour tout $n \leq N$, et $\langle x, e_n\rangle = \langle x, e_n - f_n\rangle$ pour tout $n \geq N+1$. L'égalité ci-dessus devient

$$\|x\|^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} |\langle x, e_n - f_n\rangle|^2$$

(b) *Montrer que* $x = 0$.

En appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans l'égalité précédente, on aboutit à

$$\|x\|^2 \leq \|x\|^2 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|e_n - f_n\|^2$$

Puisque $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \|e_n - f_n\|^2 < 1$, ceci n'est possible que si $\|x\| = 0$, autrement dit $x = 0$.

2. *Montrer que E est dense dans H.*

   Puisque H est un espace de Hilbert dont E est un sous-espace vectoriel, on a

$$\overline{E} = (E^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = H$$

   Autrement dit, E est dense dans H.

Soit $F = \mathrm{Vect}\{f_n \colon n \geq N+1\}$.

3. *Montrer que $F^\perp$ est de dimension finie majorée par $N+1$.*

   Notons $G = \overline{F}$ et p la projection orthogonale sur G. Pour $n \leq N$, posons $y_n = e_n - p(e_n)$ et $K = \mathrm{Vect}(y_0, \ldots, y_N)$. Alors K est un sous-espace vectoriel de $G^\perp = F^\perp$, de dimension finie majorée par $N+1$. De plus $K \oplus G$ contient E et est donc dense dans H.

   Si $K \neq F^\perp$, on peut trouver $x \in F^\perp$ qui est orthogonal à K et de norme 1. On a alors $\|x - e\| \geq 1$ pour tout $e \in K \oplus G$, contredisant la densité de $K \oplus G$. Donc $K = F^\perp$.

4. *Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base hilbertienne de H.*

   Puisque $(f_0, \ldots, f_N)$ est une famille orthonormée dans $F^\perp$ de cardinal $N+1$ et $\dim(F^\perp) \leq N+1$, on a que $(f_0, \ldots, f_N)$ est une base orthonormée de $F^\perp$. On en conclut que

$$H = F^\perp \oplus \overline{F} = \mathrm{Vect}(f_0, \ldots, f_N) \oplus \overline{\mathrm{Vect}\{f_n \colon n \geq N+1\}}$$

   Par conséquent $\mathrm{Vect}\{f_n \colon n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans H. Comme $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est orthonormée, on conclut que c'est une base hilbertienne de H.

Exercice 3. *Soit $d \in \mathbf{N}^*$. On munit $\mathbf{R}^d$ de la norme euclidienne usuelle, notée $\|\cdot\|$. On dit qu'une partie $C \subset \mathbf{R}^d$ est un* arc rectifiable *s'il existe $f \colon [0,1] \to \mathbf{R}^d$ lipschitzienne et telle que $f([0,1]) = C$. Dans cet exercice on fixe un arc rectifiable C.*

1. *Montrer que C est compact.*

   Il existe une fonction f lipschitzienne telle que $f([0,1]) = C$. Par conséquent C est l'image du compact $[0,1]$ par une fonction continue, donc C est compact.

2. *On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}^d$ telle que $f_n([0,1]) = C$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}^d$.*
   Montrer que $f([0,1]) = C$ (on pourra procéder par double inclusion).
   Soit $t \in [0,1]$. On a $f(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)$, et $f_n(t) \in C$ pour tout n. Puisque C est compact, c'est une partie fermée de $\mathbf{R}^d$, donc $f(t) \in C$. Ceci prouve que $f([0,1]) \subseteq C$.
   Pour établir l'inclusion réciproque, fixons $c \in C$; pour tout $n \in \mathbf{N}$ il existe $t_n \in [0,1]$ tel que $f_n(t_n) = c$. Puisque $[0,1]$ est compact, on peut extraire une sous-suite $(t_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge vers $t \in [0,1]$. Notons que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a

   $$\|f_{\varphi(n)}(t_{\varphi(n)}) - f(t_{\varphi(n)})\| \leq \|f_{\varphi(n)} - f\|_\infty \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

   Puisque $f_{\varphi(n)}(t_{\varphi(n)}) = c$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, on obtient que $f(t_{\varphi(n)})$ converge vers c. En outre, f est continue en tant que limite uniforme d'une suite de fonctions continues, et finalement $f(t) = c$. On vient de prouver que $C \subseteq f([0,1])$.
3. *On définit la* longueur d'arc $\ell(C)$ *par*

   $$\ell(C) = \inf\Big\{K \geq 0\colon \text{ il existe } f\colon [0,1] \to \mathbf{R}^d \ K\text{-lipschitzienne et telle que } f([0,1]) = C\Big\}$$

   Montrer qu'il existe une surjection lipschitzienne de $[0,1]$ sur C dont la constante de Lipschitz est égale à $\ell(C)$.
   Par caractérisation séquentielle d'une borne inférieure, il existe une suite de fonctions K_n-lipschitziennes $f_n\colon [0,1] \to \mathbf{R}^d$ telles que $f_n([0,1]) = C$ pour tout n et $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell(C)$.
   Fixons une telle suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$. La suite $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, et il existe donc une constante $M \geq 0$ telle que toutes les fonctions f_n sont M-lipschitziennes ; en particulier $\{f_n\colon n \in \mathbf{N}\}$ est un sous-ensemble équicontinu de $C([0,1],\mathbf{R}^d)$.
   De plus, pour tout $t \in [0,1]$ on a $\{f_n(t)\colon n \in \mathbf{N}\} \subseteq C$, qui est compact. Comme $[0,1]$ est compact, toutes les hypothèses sont réunies pour appliquer le théorème d'Ascoli : $\{f_n\colon n \in \mathbf{N}\}$ est relativement compact dans $C([0,1],\mathbf{R}^d)$. Par conséquent, $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge uniformément vers $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}^d$.
   Le résultat de la question précédente nous permet d'affirmer que $f([0,1]) = C$; reste à montrer que f est $\ell(C)$-lipschitienne. Pour cela, fixons $x, y \in [0,1]$ et notons que

   $$\|f(x) - f(y)\| = \lim_{n\to+\infty} \|f_{\varphi(n)}(x) - f_{\varphi(n)}(y)\|$$

   Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $K_n \leq \ell(C) + \varepsilon$ pour tout $n \geq N$; puisque $\varphi(n) \geq n$ pour tout n on a alors, pour tout $n \geq N$, l'inégalité

   $$\|f_{\varphi(n)}(x) - f_{\varphi(n)}(y)\| \leq K_{\varphi(n)}|x-y| \leq (\ell(C)+\varepsilon)|x-y|$$

   Finalement, on obtient en passant à la limite que $\|f(x) - f(y)\| \leq (\ell(C)+\varepsilon)|x-y|$ pour tout $x, y \in [0,1]$ et tout $\varepsilon > 0$. Par conséquent f est $\ell(C)$-lipschitzienne.
   Puisque $f([0,1]) = C$, la constante de Lipschitz de f ne peut être strictement inférieure à $\ell(C)$ par définition de $\ell(C)$, elle vaut donc exactement $\ell(C)$.