

Examen partiel du 22 octobre 2025 (durée: 2h30)

L'emploi de documents, calculatrices, etc. n'est pas autorisé. Le sujet comporte 4 exercices indépendants.

Exercice 1.

Soit H un espace de Hilbert et $T: H \rightarrow H$ une application linéaire continue et telle que $\langle T(x), x \rangle \geq \|x\|^2$ pour tout $x \in H$.

1. Montrer que $\text{Im}(T)$ est dense dans H .
2. Montrer que $\|T(x)\| \geq \|x\|$ pour tout $x \in H$, puis que $\text{Im}(T)$ est fermé dans H .
3. Montrer que T est un isomorphisme et que T^{-1} est continu.

Exercice 2. Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$.

1. Pour $x \in \mathbf{R}$ et $h \in \mathbf{R}_+$, exprimer $\int_x^{x+h} f(t) dt$ comme produit de convolution de f par une fonction φ_h .
2. Pour $x \in \mathbf{R}$ et $h \in \mathbf{R}_+^*$ on pose $F_h(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$. Montrer que $F_h \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} f$ dans $(L^1(\mathbf{R}), \|\cdot\|_1)$.

Exercice 3. Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbf{R}^d$ et $H = L^2(\Omega, \mathbf{R})$ muni de son produit scalaire usuel.

On considère $C = \left\{ f \in H : \int_{\Omega} f(t) dt \geq 1 \right\}$.

1. Montrer que C est convexe et fermé dans H .
2. Soit $g \in H$. Déterminer le projeté de g sur C et calculer $d(g, C)$.

Indication. Dans cet exercice il est utile de reformuler la définition de C à l'aide du produit scalaire de H , et de faire un dessin.

Exercice 4. Soit H un espace de Hilbert séparable, de dimension infinie. Soit $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ deux bases hilbertiennes de H . Soit T une application linéaire continue de H dans lui-même.

1. En appliquant l'égalité de Parseval à chaque $T(e_n)$ dans la base $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|T(e_n)\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|T^*(f_k)\|^2$$

et en déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|T(e_n)\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|T(f_k)\|^2.$$

On dit que T est un *opérateur de Hilbert-Schmidt* si $\sum_{n=0}^{+\infty} \|T(e_n)\|^2 < +\infty$. On note HS l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

2. Montrer qu'on obtient une norme sur HS en posant

$$\|T\|_{\text{HS}} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \|T(e_n)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et que $\|T\| \leq \|T\|_{\text{HS}}$ pour tout $T \in \text{HS}$.

3. Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_{\text{HS}}$ sont-elles équivalentes sur HS?
4. On suppose que T est de Hilbert-Schmidt; montrer qu'alors il existe une suite d'opérateurs $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tels que $\dim(\text{Im}(T_n)) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} T$ dans $\mathcal{L}(H, H)$.
5. Soit $T \in \text{HS}$ et B la boule unité fermée de H . Montrer que $\overline{T(B)}$ est compact dans H .