

Examen partiel du 22 octobre 2025 - éléments de correction

Exercice 1.

Soit H un espace de Hilbert et $T: H \rightarrow H$ une application linéaire continue et telle que $\langle T(x), x \rangle \geq \|x\|^2$ pour tout $x \in H$.

1. Montrer que $\text{Im}(T)$ est dense dans H .

Soit $y \in \text{Im}(T)^\perp$. On a en particulier $0 = \langle T(y), y \rangle \geq \|y\|^2$ donc $y = 0$. On en conclut que $\text{Im}(T)^\perp = \{0\}$, ce qui implique (puisque $\text{Im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de H) que $\text{Im}(T)$ est dense.

2. Montrer que $\|T(x)\| \geq \|x\|$ pour tout $x \in H$, puis que $\text{Im}(T)$ est fermé dans H .

Il suffit de montrer l'inégalité attendue pour $x \neq 0$; pour cela on applique Cauchy-Schwarz pour obtenir $\|x\|^2 \leq \langle T(x), x \rangle \leq \|T(x)\| \|x\|$ et on divise des deux côtés par $\|x\|$.

Pour montrer que $\text{Im}(T)$ est fermé, on considère une suite de Cauchy $(T(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\text{Im}(T)$. Par hypothèse sur T on a pour tout n, m que $\|T(x_n) - T(x_m)\| = \|T(x_n - x_m)\| \geq \|x_n - x_m\|$ donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, et par conséquent converge vers $x \in H$. Donc $(T(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $T(x) \in \text{Im}(T)$. Il suit que $(\text{Im}(T), \|\cdot\|)$ est complet et donc $\text{Im}(T)$ est fermé dans H .

3. Montrer que T est un isomorphisme et que T^{-1} est continu.

On a déjà montré que T est surjectif. Si $x \in \ker(T)$ alors $\|x\|^2 \leq \langle T(x), x \rangle = 0$ donc $\ker(T) = \{0\}$: T est injective.

Puisque $\|T(x)\| \geq \|x\|$ pour tout $x \in H$ et T est bijective on obtient que $\|y\| \geq \|T^{-1}(y)\|$ pour tout $y \in H$, donc T^{-1} (qui est linéaire) est continu.

Exercice 2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+$, exprimer $\int_x^{x+h} f(t) dt$ comme produit de convolution de f par une fonction φ_h .

Soit φ_h la fonction caractéristique de $[-h, 0]$. On a par définition

$$f * \varphi_h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi_h(x-t) dt = \int_{-h \leq x-t \leq 0} f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $F_h(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$. Montrer que $F_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} f$ dans $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$.

Puisque $F_h = f * \left(\frac{1}{h} \varphi_h\right)$ et que $f \in L^1(\mathbb{R})$ il nous suffit de vérifier que si $h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors

$\psi_n = \frac{1}{h_n} \varphi_{h_n}$ est une unité approchée pour la convolution.

C'est presque immédiat : déjà, pour tout n on a $\|\psi_n\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \psi_n(t) dt = \frac{1}{h_n} \int_{[-h_n, 0]} dt = 1$. Ensuite, fixons $\delta > 0$. Alors pour tout n suffisamment grand on a $[-h_n, 0] \cap \{t : |t| \geq \delta\} = \emptyset$, donc $\int_{|t| \geq \delta} \psi_n(t) dt = 0$ pour tout n suffisamment grand.

On conclut en appliquant le théorème vu en TD dans la fiche de rappels sur la convolution.

Exercice 3. Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^d$ et $H = L^2(\Omega, \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel. On considère $C = \left\{ f \in H : \int_{\Omega} f(t) dt \geq 1 \right\}$.

1. Montrer que C est convexe et fermé dans H .

Soit χ la fonction constante égale à 1 sur Ω .

Par définition du produit scalaire on a $f \in H \Leftrightarrow \langle f, \chi \rangle \geq 1$. Comme $f \mapsto \langle f, \chi \rangle$ est linéaire et continue on en déduit que C est convexe et fermé.

2. Soit $g \in H$. Déterminer le projeté de g sur C et calculer $d(g, C)$.

Si $\int_{\Omega} g(t) dt \geq 1$ alors g est son propre projeté et $d(g, C) = 0$.

On peut donc supposer que $\int_{\Omega} g(t) dt < 1$. Alors soit r tel que $\int_{\Omega} g(t) dt + r\lambda(\Omega) = 1$ (où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$; notons que nécessairement $r > 0$ et qu'un tel r existe parce que $0 < \lambda(\Omega) < +\infty$). Montrons que $f = g + r\chi$ est le projeté de g sur C .

Déjà, f appartient bien à C . Soit h un élément de C ; on a :

$$\begin{aligned} \langle g - f, h - f \rangle &= -r \int_{\Omega} (h(t) - g(t) - r) dt \\ &= -r \left(\int_{\Omega} h(t) dt - 1 \right) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Ceci prouve que f satisfait la caractérisation du projeté, et donc f est bien le projeté de g sur C .

On a donc $d(g, C) = \|g - f\|_2 = \|r\chi\|_2 = r\sqrt{\lambda(\Omega)}$.

Un calcul immédiat nous donne $r = \frac{1 - \int_{\Omega} g(t) dt}{\lambda(\Omega)}$ et finalement $d(g, C) = \frac{1 - \int_{\Omega} g(t) dt}{\sqrt{\lambda(\Omega)}}$.

Exercice 4. Soit H un espace de Hilbert séparable, de dimension infinie. Soit $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ deux bases hilbertiennes de H . Soit T une application linéaire continue de H dans lui-même.

1. En appliquant l'égalité de Parseval à chaque $T(e_n)$ dans la base $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|T(e_n)\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|T^*(f_k)\|^2$$

et en déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|T(e_n)\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|T(f_k)\|^2.$$

Pour tout n on a $\|T(e_n)\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle T(e_n), f_k \rangle|^2$. On obtient donc (toutes les sommes ci-dessous sont des sommes de réels positifs, ce qui justifie les échanges d'ordre de sommation et fait qu'on n'a pas à s'interroger sur la sommabilité) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \|T(e_n)\|^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle T(e_n), f_k \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle e_n, T^*(f_k) \rangle|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle T^*(f_k), e_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \|T^*(f_k)\|^2. \end{aligned}$$

Il s'ensuit en particulier que $\sum_{k=0}^{+\infty} \|T^*(f_k)\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|T(f_k)\|^2$ (en appliquant le résultat précédent

avec $e_k = f_k$ pour tout k) d'où finalement $\sum_{n=0}^{+\infty} \|T(e_n)\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|T(f_k)\|^2$.

On dit que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt si $\sum_{n=0}^{+\infty} \|T(e_n)\|^2 < +\infty$. On note HS l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

2. Montrer qu'on obtient une norme sur HS en posant

$$\|T\|_{\text{HS}} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \|T(e_n)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et que $\|T\| \leq \|T\|_{\text{HS}}$ pour tout $T \in \text{HS}$.

Il est immédiat que $\|0\|_{\text{HS}} = 0$ et que $\|\lambda T\|_{\text{HS}} = |\lambda| \|T\|_{\text{HS}}$ pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$. Pour tout $N \in \mathbf{N}$ et tout $T, S \in \text{HS}$ on a

$$\sum_{n=0}^N \|T(e_n) + S(e_n)\|^2 = \sum_{n=0}^N \|T(e_n)\|^2 + \sum_{n=0}^N \|S(e_n)\|^2 + 2\text{Re} \left(\sum_{n=0}^N \langle T(e_n), S(e_n) \rangle \right)$$

et

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\sum_{n=0}^N \|T(e_n)\|^2} + \sqrt{\sum_{n=0}^N \|S(e_n)\|^2} \right)^2 &= \sum_{n=0}^N \|T(e_n)\|^2 + \sum_{n=0}^N \|S(e_n)\|^2 + 2\sqrt{\sum_{n=0}^N \|T(e_n)\|^2} \sqrt{\sum_{n=0}^N \|S(e_n)\|^2} \\ &\geq \sum_{n=0}^N \|T(e_n)\|^2 + \sum_{n=0}^N \|S(e_n)\|^2 + 2 \sum_{n=0}^N \|T(e_n)\| \|S(e_n)\|. \end{aligned}$$

En comparant ces deux expressions (grâce à l'inégalité de Cauchy–Schwarz), et en faisant tendre N vers $+\infty$, on en déduit que $\|T + S\|_{\text{HS}} \leq \|T\|_{\text{HS}} + \|S\|_{\text{HS}}$.

Il ne nous reste plus qu'à vérifier la propriété de séparation. Si $\|T\|_{\text{HS}} = 0$ alors $T(e_n) = 0$ pour tout n donc (par linéarité) T est nulle sur $\text{Vect}(\{e_n : n \in \mathbf{N}\})$ et (par densité et continuité) T est nulle sur H tout entier.

Soit $x \in H$ et $T \in \text{HS}$. On a :

$$\begin{aligned} \|T(x)\|^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle T(x), e_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, T^*(e_n) \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x\|^2 \|T^*(e_n)\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 \|T\|_{\text{HS}}^2 \end{aligned}$$

Par définition d'une norme subordonnée, on en conclut que $\|T\| \leq \|T\|_{\text{HS}}$

3. Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_{\text{HS}}$ sont-elles équivalentes sur HS?

Pour $N \in \mathbf{N}$, considérons l'application $P_N : x \mapsto \sum_{n=0}^N \langle x, e_n \rangle e_n$ (autrement dit, la projection orthogonale sur $\text{Vect}(\{e_n : n \leq N\})$). Sa norme subordonnée vaut 1 ; de plus $\|P_N\|_{\text{HS}} = \sqrt{N+1}$, donc P_N est un opérateur de Hilbert–Schmidt et la suite $(P_N)_{N \in \mathbf{N}}$ témoigne du fait que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_{\text{HS}}$ ne sont pas équivalentes sur HS.

4. On suppose que T est de Hilbert–Schmidt ; montrer qu'alors il existe une suite d'opérateurs $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tels que $\dim(\text{Im}(T_n)) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} T$ dans $\mathcal{L}(H, H)$.

Pour $N \in \mathbf{N}$ considérons $T_N = T \circ P_N$ (en reprenant les notations de la question précédente) ; c'est un opérateur de rang fini et on a $T(e_n) = T_N(e_n)$ pour tout $n \geq N$. Pour tout $n > N$ on a $T_N(e_n) = 0$. Il suit de cela en particulier que l'on a $\|T - T_N\|_{\text{HS}}^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|T(e_n)\|^2 \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$.

Comme on a déjà observé que $\|T - T_N\| \leq \|T - T_N\|_{\text{HS}}$ on conclut que $T_N \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} T$ dans $\mathcal{L}(H, H)$.

5. Soit $T \in \text{HS}$ et B la boule unité fermée de H . Montrer que $\overline{T(B)}$ est compact dans H .

Comme H est complet, il nous suffit de montrer que $T(B)$ est précompact ; fixons donc $\varepsilon > 0$. D'après le résultat précédent, il existe un opérateur de rang fini S tel que $\|T - S\| \leq \varepsilon$, et $S(B)$ est

précompact puisque borné et contenu dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Il existe donc $x_1, \dots, x_n \in B$ tels que pour tout $x \in B$ il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\|S(x) - S(x_i)\| \leq \varepsilon$. À l'aide de l'inégalité triangulaire (et de la définition d'une norme subordonnée), on conclut que pour tout $x \in B$ il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\|T(x) - T(x_i)\| \leq 3\varepsilon$. Donc $T(B)$ est précompact, ce qui conclut.