Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre de printemps 2021-2022**
Master mathématiques et applications — Analyse réelle et complexe

---

Fonctions d'une variable complexe

On pourra éventuellement compléter le cours et les TDs avec les vidéos (préparées initialement pour faire réviser des agrégatifs pendant le premier confinement) de la liste accessible en cliquant sur (ou en scannant) le code ci-contre.

Si vous souhaitez une ressource supplémentaire, les livres "Éléments d'analyse complexe", de Jean-François Pabion et "Analyse complexe pour la licence L3" de Patrice Tauvel me semblent bien adaptés au niveau L3/agreg.

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l' ensemble des points de $\mathbf{C}$ où la fonction est différentiable (comme application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$) et l'ensemble des points où elle est dérivable.

1. $z \mapsto \overline{z}$.
2. $z \mapsto z\overline{z}$.
3. $z \mapsto \Re\mathrm{e}(\mathrm{z})$.
4. $z \mapsto \Im\mathrm{m}(\mathrm{z})$.
5. $z \mapsto \overline{z}^3$.
6. $z \mapsto z^k$ pour $k \in \mathbb{Z}$ fixé.
7. $z \mapsto e^z := e^x(\cos y + i \sin y)$ si $z = x + iy$.

Exercice 2.
Soit $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une fonction dérivable en $z_0 \in \mathbf{C}$. Montrer que la fonction g définie par $g(z) = \overline{f\left(\overline{z}\right)}$ est dérivable en $\overline{z_0}$, et calculer $g'(\overline{z_0})$.

Exercice 3.
Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$. Soit $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. On note $P = \Re\mathrm{e}(\mathrm{f})$ et $Q = \Im\mathrm{m}(\mathrm{f})$ les parties réelle et imaginaire de f.

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est constante sur U.
   (b) P est constante sur U.
   (c) Q est constante sur U.
2. En déduire que les assertions précédentes sont aussi équivalentes à :
   (d) $\overline{f}$ holomorphe sur U.
   (e) $|f|$ est constante sur U.
   (f) $|f|$ est holomorphe sur U.

Exercice 4.
Pour U un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f\colon U \to \mathbf{C}$ une fonction différentiable on note (en identifiant $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}^2$ comme d'habitude)

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

1. Énoncer les équations de Cauchy-Riemann à l'aide de $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$.
2. Montrer que si f est différentiable sur U alors $\bar{f}$ aussi et $\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \overline{\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}}$.

3. Montrer que, si f et g sont différentiables sur U, alors $\dfrac{\partial fg}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial z} g + f \dfrac{\partial g}{\partial z}$. Énoncer et démontrer la formule analogue pour $\dfrac{\partial fg}{\partial \bar{z}}$.
4. Calculer $\dfrac{\partial z^n}{\partial z}$, $\dfrac{\partial z^n}{\partial \bar{z}}$, $\dfrac{\partial \bar{z}^n}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial \bar{z}^n}{\partial \bar{z}}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
5. Soit $P \in \mathbf{C}[X,Y]$ tel que $x + iy \mapsto P(x,y)$ soit holomorphe. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbf{C}[X]$ tel qu'on ait, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $P(x,y) = Q(x+iy)$.

Exercice 5.
Soit $\theta \in [0, 2\pi]$.

a) Montrer que si $|z| < 1$, la série $S(z) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} z^n$ converge absolument.
b) Montrer que, pour $z = 1$, la série dérivée de S diverge. En déduire le rayon de convergence de S.
c) Montrer, sur cet exemple, qu'une série entière et sa série dérivée n'ont pas nécessairement le même comportement sur le bord du disque de convergence.

Exercice 6.

1. Montrer que la fonction $z \mapsto \displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ est définie et continue sur le disque unité fermé.
2. Montrer que f n'est pas prolongeable par une fonction holomorphe en 1 (on montrera que la restriction de f à $\mathbf{R}$ n'a pas de dérivée à gauche en 1).

Exercice 7. (lemme d'Abel)

1. Soit $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, $z_0 \in \mathbf{C}$, $|z_0| = R$. Montrer que si la série numérique $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n z_0^n$ converge alors la série de fonctions $z \longmapsto \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge uniformément sur le segment $[0, z_0]$ du plan complexe

   (on pourra commencer par le cas $z_0 = 1$ et en déduire le cas général ; considérer la suite $r_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ et utiliser la relation $a_n = r_{n+1} - r_n$).
2. **Application :** on veut montrer que
$$\log 2 = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}. \tag{1}$$
   (a) Montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1 et que pour tout $t \in]-1, 1[$, $\log(1+t) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1}$.
   (b) En utilisant a), en déduire la formule (1).

Exercice 8.
Soit $U = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^-$ et Log la détermination principale du logarithme.

1. A t-on $\mathrm{Log}(e^z) = z$ pour tout $z \in (\exp)^{-1}(U)$? Sinon, déterminer un ouvert V de $\mathbf{C}$ où cette égalité est vraie.
2. Soit $P^+ = \{z \in \mathbf{C} : \Re\mathrm{e}(z) > 0\}$. A t-on $\mathrm{Log}(zz') = \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(z')$ pour tous $z, z' \in P^+$?
3. Même question en remplaçant P^+ par $\pi^+ = \{z \in \mathbf{C} : \Im\mathrm{m}(z) > 0\}$.
4. Pour $z \in U$ et $\alpha \in \mathbf{C}$, on pose $z^{(\alpha)} = e^{\alpha \mathrm{Log}(z)}$. Montrer que pour $n \in \mathbf{N}$ et $z \in U$ on a $z^{(n)} = z^n$.
5. On pose $z = e^{3i\pi/4}$. Comparer $(z^{(2)})^{(i)}$, $z^{(2i)}$ et $(z^{(i)})^{(2)}$.

Exercice 9.

Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur U.

1. Soit F une fonction continue de U dans C. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) F est une détermination sur U du logarithme de f, i.e
   $$\forall z \in U \quad e^{F(z)} = f(z)$$
   (b) F est holomorphe sur U, $F'(u) = \dfrac{f'(u)}{f(u)}$ pour tout $u \in U$ et il existe $u_0 \in U$ tel que $e^{F(u_0)} = f(u_0)$.
2. Soit F et G deux déterminations du logarithme de f dans U. Comparer F et G.
3. Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}^*$ contenant un cercle centré à l'origine. Montrer qu'il n'existe pas de détermination holomorphe du logarithme sur U.
4. Exprimer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n$ à l'aide de la détermination principale du logarithme.

Exercice 10.

Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. On appelle détermination holomorphe sur U de la fonction arctangente toute fonction holomorphe f sur U, à valeurs dans $\mathbf{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbf{Z}\}$ telle que $\tan(f(z)) = z$, $(z \in U)$.

1. Montrer que s'il existe une détermination holomorphe sur U de la fonction arctangente, alors $-i \notin U$ et $i \notin U$.
2. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ ne contenant ni i, ni $-i$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est une détermination holomorphe de la fonction arctangente sur U,
   (b) $2if(z)$ est une détermination holomorphe sur U du logarithme de $\dfrac{1+iz}{1-iz}$.
3. Soit U un ouvert **connexe** de $\mathbf{C}$ ne contenant ni i, ni $-i$. Supposons qu'il existe sur U une détermination holomorphe de la fonction arctangente. Expliciter toutes les déterminations holomorphes sur U de la fonction arctangente.
4. Soit $U = \mathbf{C} \setminus \{iy : |y| \geqslant 1\}$.
   (a) Construire sur U une détermination holomorphe f de la fonction arctangente.
   (b) Donner le développement en série entière de f sur le disque ouvert $D(0,1)$.

Exercice 11.

Notons U le plan complexe privé des deux demi-droites $[1, +\infty[$ et $]-\infty, -1]$ de l'axe réel.

1. Montrer que l'image de U par la fonction $\phi : \mathbf{C} \to \mathbf{C},\ z \mapsto z^2 - 1$ est contenue dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+$.
2. On note Log une détermination du logarithme définie sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+$. Montrer que la fonction $f\colon U \to \mathbf{C}$ définie par $z \mapsto e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}(z^2-1)}$ est bien définie et holomorphe sur U. Calculer son carré et sa dérivée.
3. Notons V le plan complexe privé du segment $[-1, 1]$. Vérifier que pour $z \in V$, on a $z^{-1} \in U$. On définit $g\colon V \to \mathbf{C}$ en posant $g(z) = izf(z^{-1})$. Montrer que g est bien définie et holomorphe sur V. Calculer son carré et sa dérivée.
4. Ainsi il existe sur V une détermination holomorphe de $(z^2-1)^{1/2}$. Montrer que néanmoins, il n'existe pas de détermination holomorphe de $\log(z^2 - 1)$.

Exercice 12.

Soit γ le cercle unité parcouru dans le sens direct, et soit f une fonction continue définie sur le support de γ et à valeurs dans $\mathbf{C}$. Montrer que

$$\overline{\int_\gamma f(z)dz} = -\int_\gamma \frac{\overline{f(z)}}{z^2} dz.$$

Exercice 13.
Soient $P = \{z : \Im\mathrm{m}(z) \geq 0\}$ et f continue sur P et à valeurs dans $\mathbf{C}$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbf{N}$, $M \in \mathbf{R}^+$ tels que :

$$|f(z)| \leq M|z|^n \text{ pour tout } z \in P.$$

Soit γ_R le demi-cercle de centre 0 et de rayon R contenu dans P. Montrer que

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)e^{iz}dz\right| \leq M\pi R^n.$$

Exercice 14. (lemmes de Jordan)
On fixe $r_0 \in \mathbf{R}^+$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 2\pi[$ avec $\alpha_1 < \alpha_2$.

1. Soit $\Delta_1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| \geq r_0, \arg(z) \in [\alpha_1, \alpha_2]\}$. Soit $f : \Delta_1 \to \mathbf{C}$ continue telle que $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$ et soit $\gamma_r : [\alpha_1, \alpha_2] \to \mathbf{C}$ défini par $\gamma_r(\alpha) = re^{i\alpha}$. Montrer que
$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz = 0.$$

2. Soit $\Delta_2 = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z| \leqslant r_0, \arg(z) \in [\alpha_1, \alpha_2]\}$. Soit $g : \Delta_2 \to \mathbf{C}$ continue telle que $\lim\limits_{z\to 0} zg(z) = 0$ et soit $\gamma_r : [\alpha_1, \alpha_2] \to \mathbf{C}$ défini par $\gamma_r(\alpha) = re^{i\alpha}$. Montrer que
$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} g(z)dz = 0.$$

Exercice 15. Soit γ le cercle de centre 0 et de rayon 1. Calculer :

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^n}dz \,(n \in \mathbf{Z}) \quad ; \quad \int_\gamma \frac{\cos z}{z}dz \quad ; \quad \int_\gamma \frac{\sin z}{z}dz \quad ; \quad \int_\gamma \frac{\cos z}{z^2}dz$$

Exercice 16.
Soit U un ouvert simplement connexe qui contient le cercle $\{z \in \mathbf{C} \colon |z - z_0| = r\}$. Montrer que U contient le disque fermé $\bar{D}(z_0, r)$.

Exercice 17. (Théorème de Morera)
Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$, et f une fonction continue de U dans $\mathbf{C}$. On suppose que, pour tout triangle T dont le bord est contenu dans U, on a $\displaystyle\int_{\partial T} f(z)dz = 0$. Notre but est de montrer que f est holomorphe.

1. Dans cette question on suppose que $U = D(z_0, r)$ pour un certain $z_0 \in \mathbf{C}$ et $r > 0$. Pour $a \in U$ on pose $F(a) = \displaystyle\int_{[z_0,a]} f(z)dz$.
   (a) Montrer que pour tout $a, b \in U$ on a $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_{[a,b]} f(z)dz$.
   (b) Montrer que F est holomorphe et que $F' = f$.
2. Prouver le théorème de Morera à l'aide du résultat de la question précédente.
3. La réciproque de ce théorème est-elle vraie sur tout ouvert de $\mathbf{C}$? Sur tout ouvert étoilé ?

Exercice 18. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$, $z_0 \in U$ et f une fonction continue sur U et holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$. Montrer que f est holomorphe sur U.

Exercice 19. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$, $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes qui converge uniformément sur les compacts de U vers $f \colon U \to \mathbf{C}$. Montrer que f est holomorphe sur U.

Exercice 20.
Soit U un ouvert connexe et f une fonction holomorphe sur U telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$.

1. Montrer que pour tout lacet γ tracé dans U on a :
$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in \mathbf{Z}.$$
2. En déduire que si pour tout $n \geq 2$, il existe sur U une détermination holomorphe de $(f(z))^{1/n}$, alors il existe sur U une détermination holomorphe de $\log f$.

Exercice 21.
Donner une démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss (tout $P \in \mathbf{C}[X]$ non constant admet une racine dans $\mathbf{C}$) basée sur le théorème de Liouville, et une basée sur le principe du maximum (dans les deux cas on pourra considérer $\frac{1}{P}$, où $P \in \mathbf{C}[X]$ ne s'annule pas).

Exercice 22.
Soit f une fonction entière telle que, pour tout $z \in \mathbf{C}$, on ait $|f(z)| \leqslant \sqrt{|z|}$. Montrer que f est constante. Que dire d'une fonction entière f telle que pour tout $z \in \mathbf{C}$ on ait $|f(z)| \leq |z|^\alpha$, avec $\alpha \in]0, +\infty[$?

Exercice 23.
Soit f une fonction entière non constante. Montrer que son image est dense dans $\mathbf{C}$.

Exercice 24.
Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$.

1. Montrer que l'ensemble des zéros de f est fini.
2. Montrer que f est un polynôme.
3. Retrouver ce résultat en utilisant la notion de singularité en 0 d'une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{0\}$

Exercice 25.
Soient $R > 0$, f une fonction holomorphe sur $D(0, R[$ et continue sur $D(0, R]$. On note γ_R le cercle de centre 0 et de rayon R parcouru une fois dans le sens positif. Montrer que, pour tout $z \in D(0, R[$, on a
$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{f(u)}{u - z}\, du\,.$$

Exercice 26. Soit $z_0 \in \mathbf{C}$, $r_0 > 0$ et f une fonction holomorphe sur $D(z_0, r_0)$. Montrer que pour tout $r < r_0$ et tout z tel que $|z - z_0| < r$ on a
$$|f'(z)| \leq \frac{r}{(r - |z - z_0|)^2} \max\{|f(z_0 + re^{i\theta}| \colon \theta \in \mathbf{R}\}$$

Exercice 27. (Intégrales à paramètres, version holomorphe) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, U un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f \colon U \times X$ une fonction. On suppose que :

- Pour μ-presque tout $t \in X$ la fonction $z \mapsto f(z, t)$ est holomorphe sur Ω ; pour un tel t on note $g(z, t)$ la dérivée de $z \mapsto f(z, t)$.
- Pour tout $z \in \Omega$ la fonction $t \mapsto f(z, t)$ est mesurable.
- Pour tout compact $K \subset U$, il existe une fonction μ-intégrable g_k telle que $|f(z, t)| \leq g_k(t)$ pour tout $z \in K$ et tout $t \in X$.

Montrer qu'alors $z \mapsto \int_X f(z, t) d\mu(t)$ est holomorphe, de dérivée $z \mapsto \int_X g(z, t) d\mu(t)$

Déduire de ce résultat que la fonction $\Gamma \colon z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ est holomorphe sur $U = \{z \colon \Re\mathrm{e}(z) > 0\}$.

Exercice 28.
Etudier l'existence et l'unicité de fonctions holomorphes f sur un voisinage connexe U de 0 telles que :
a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$, $\forall n \geqslant 1$. b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \exp(-n)$, $\forall n \geqslant 1$.

Exercice 29.
Déterminer les zéros de la fonction $z \longmapsto 1-\exp\left(\frac{z}{z-1}\right)$ dans le disque ouvert $D(0,1[$. Cela contredit-il le principe des zéros isolés ?

Exercice 30.
Soient U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de U qui converge vers $a \in U$ sans jamais prendre cette valeur. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur U telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$f'(a_n)g(a_n) = g'(a_n)f(a_n)\,.$$

Montrer que si $g(a) \neq 0$, alors il existe une constante $c \in \mathbf{C}$ telle que $f = cg$.

Exercice 31.
Soient f et g deux fonctions entières telles que :

$$|f(z)| \leqslant |g(z)|\,, \quad \forall z \in \mathbf{C}\,.$$

a) Montrer que tout zéro z_0 de g est un zéro de f et que la multiplicité de f au point z_0 est au moins aussi grande que celle de g.
b) En déduire qu'il existe $c \in \mathbf{C}$ tel que $f = cg$.

Exercice 32.
Soit f une fonction entière vérifiant

$$\forall z \in \mathbf{C}\, \exists n \in \mathbf{N}\, f^{(n)}(z) = 0\ .$$

Montrer que f est un polynôme.
(On rappelle que la notation $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f)

Exercice 33.
Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$ et z_0 un point de U. Soit f une fonction holomorphe de U dans $\mathbf{C}$ qui n'est pas constante au voisinage de z_0. Montrer qu'il existe une fonction φ définie sur un voisinage de z_0 et dont la dérivée ne s'annule pas en z_0 et un entier $p > 0$ tel que l'on ait, pour tout z voisin de z_0 :

$$f(z) = f(z_0) + \varphi(z)^p$$

Exercice 34.
En utilisant l'exercice précédent, montrer qu'une fonction holomorphe sur un ouvert U, qui n'est constante sur aucune composante connexe de U, est ouverte (i.e. envoie tout ouvert de U sur un ouvert de $\mathbf{C}$).

Exercice 35. (Inversion locale et globale, version holomorphe)

1. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$, $z_0 \in U$ et $f\colon U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe telle que $f'(z_0) \neq 0$. Montrer qu'il existe un ouvert V tel que $z_0 \in V \subset U$; la restriction de f à V est injective ; $f(V)$ est ouvert ; et f^{-1} est holomorphe sur $f(V)$.
2. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et f une fonction holomorphe et injective sur U. Montrer que $f(U)$ est ouvert et $f^{-1}\colon f(U) \to U$ est holomorphe.

Exercice 36. (Lemme de Schwarz).
Soit D le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 et soit f holomorphe sur D. On suppose que $f(0) = 0$ et $f(D) \subseteq D$.

1. En considérant $g\colon z \mapsto \dfrac{f(z)}{z}$, montrer que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D$ et que $|f'(0)| \leq 1$.
2. On suppose de plus qu'il existe $z_0 \neq 0$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in D$.
3. Même question en supposant cette fois que $|f'(0)| = 1$.

Exercice 37.
Un *automorphisme* d'un ouvert U de $\mathbf{C}$ est une bijection $f\colon U \to U$ telle que f et f^{-1} sont holomorphes. Pour $a \in D = D(0,1)$ et $z \in D$ on note $\varphi_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

1. Soit $a \in D$. Montrer que $\varphi_a(D) = D$ et que $\varphi_a \circ \varphi_{-a}(z) = z$ pour tout $z \in D$.
2. Soit f un automorphisme de D tel que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $f(z) = e^{i\alpha}z$ pour tout $z \in D$.
3. Montrer que les automorphismes de D sont exactement les applications de la forme $z \mapsto e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$, où $\alpha \in \mathbf{R}$ et $a \in D$.
4. Déterminer le groupe des automorphismes de $\mathbf{C}$ (on pourra commencer par montrer que, si f est un tel automorphisme, alors $|f(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$).

Exercice 38.
Soit $R > 0$ et f une fonction holomorphe sur le disque ouvert $D(0,R)$. Pour tout $r \in [0, R[$ on pose $M_r = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

1. Montrer que M_r est une fonction croissante.
2. Montrer que s'il existe $r_1 \neq r_2$ tels que $M(r_1) = M(r_2)$ alors f est constante sur $D(0,R)$.
3. Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$. On note $P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. Pour $r > 0$ on pose $s(r) = \dfrac{M(r)}{r^n}$.
   (a) Montrer que s est décroissante et que si P n'est pas de la forme $P(z) = \lambda z^n$ alors s est strictement décroissante (on pourra considérer $f(z) = z^n P\left(\dfrac{r_1 r_2}{z}\right)$ pour comparer $s(r_1)$ et $s(r_2)$)
   (b) Montrer que, pour tout $r > 0$ on a $|a_n| \leq s(r)$ et que $\lim\limits_{r \to +\infty} s(r) = |a_n|$.
   (c) En déduire que si P n'est pas de la forme $a_n z^n$, alors il existe z de module 1 et tel que $|P(z)| > |a_n|$.
   (d) Montrer que si P est majoré par 1 sur le disque unité, alors $|P(z)|$ est majoré par $|z|^n$ hors du disque unité.

Exercice 39. (Développement en série de Laurent)
Dans cet exercice on fixe deux réels R_1, R_2 avec $0 < R_1 < R_2$.
On note $C(R_1, R_2) = \{z \in \mathbf{C} \colon r_1 < |z| < R_2\}$. On fixe une fonction f holomorphe sur $C(R_1, R_2)$; pour $r \in]R_1, R_2[$ et $t \in [0, 2\pi]$ on note $\gamma_r(t) = re^{it}$.

1. Pour $r \in]R_1, R_2[$ on note $\mu(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta$. Montrer que μ est constante sur $]R_1, R_2[$ (on pourra s'intéresser à sa dérivée).
2. Montrer que pour tout $r \in]R_1, R_2[$ et tout $\theta \in [0, 2\pi]$ on a $f(re^{i\theta}) = \displaystyle\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n r^n e^{in\theta}$ avec pour tout $n \in \mathbf{Z}$ l'égalité $a_n = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_r} \dfrac{f(z)}{z^{n+1}}dz$ et où la série ci-dessus converge absolument.
   (on prendra bien soin de justifier que a_n ne dépend pas de r ; on pourra commencer par appliquer le théorème de convergence normale de Dirichlet à $\theta \mapsto f(re^{i\theta})$, r étant fixé)

3. Montrer que la série ci-dessus converge uniformément sur $C(\rho_1, \rho_2)$ pour tous réels ρ_1, ρ_2 tels que $R_1 < \rho_1 < \rho_2 < R_2$.
4. On appelle *développement en série de Laurent* de f le développement obtenu ci-dessus ; énoncer et démontrer un théorème d'unicité du développement en série de Laurent.
5. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et f une fonction holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$. Montrer qu'il existe $r > 0$ et une (unique) suite $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ telle que pour tout $z \in D(z_0, r)$ on ait $f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$; et que le rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^n$ est infini. C'est le développement en série de Laurent de f au voisinage d'une singularité isolée.
6. Soit f une fonction holomorphe sur un disque épointé $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.
Redémontrer, à l'aide du développement en série de Laurent, que f se prolonge en une fonction holomorphe sur $D(z_0, r)$ si, et seulement si, f est bornée sur un voisinage de z_0.

Exercice 40.

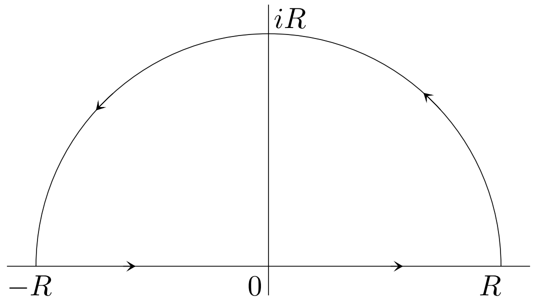
1. Trouver l'ordre des pôles dans les cas suivants :
$$f(z) = \frac{z}{\sin z}, \quad f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}.$$
2. Calculer, sans utiliser la partie singulière, les résidus de f en chacune de ses singularités isolées :
$$\begin{array}{lll} f(z) = \dfrac{z}{\sin z} & f(z) = \dfrac{1}{z(e^z-1)} & f(z) = \dfrac{z}{e^z+1} \\ f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^2} & f(z) = \dfrac{1}{\sin(z^2)} & f(z) = \dfrac{e^{iz}}{1+\cos(z)} \end{array}$$
Pour chacune des singularités isolés de f, donner l'expression de la partie singulière associée et (re)trouver le résidu correspondant :
$$\begin{array}{lll} f(z) = e^{1/z} & f(z) = z\cos(1/z) & f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z^{2n+1}} \\ f(z) = \dfrac{1}{z(e^z-1)} & f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^2} & f(z) = \dfrac{1}{\sin(z^2)} \end{array}$$

Exercice 41.
Soit $r > 0$. Existe-t-il une fonction holomorphe f sur le disque épointé de centre 0 et de rayon r telle que $|f(z)|$ soit équivalent à $\exp\left(\frac{1}{|z|}\right)$?

Exercice 42. (Théorème des résidus)
Dans cet exercice, on considère un ouvert U *simplement connexe* ; on rappelle que cela signifie que, pour toute fonction holomorphe $f : U \to \mathbf{C}$ et tout lacet γ tracé dans U, on a $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

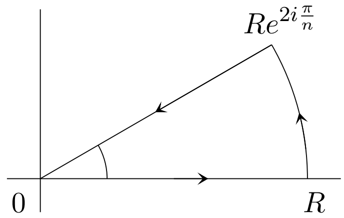
1. Rappeler pourquoi tout ouvert étoilé est simplement connexe.
2. Soit f une fonction holomorphe sur $U \setminus A$, où A est un ensemble fini. Soit γ un lacet tracé dans U et ne rencontrant pas A. Montrer l'égalité
$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{a\in A} \text{rés}(f, a)\text{Ind}_\gamma(a)$$
3. En particulier, montrer que si f est holomorphe sur U, $z_0 \in U$ et γ est un lacet tracé dans U et ne rencontrant pas z_0, alors
$$\text{Ind}_\gamma(z_0)f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Exercice 43. Pour $R > 1$, on considère le contour suivant :

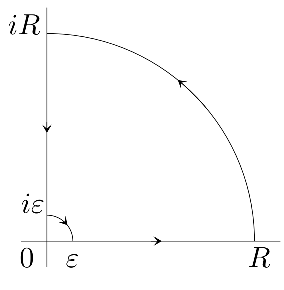


1. On fixe $a \geq 0$. Calculer l'intégrale de $z \mapsto \dfrac{e^{iaz}}{1+z^2}$ sur ce lacet. En faisant tendre R vers $+\infty$, déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}dx$.
2. En intégrant $\dfrac{ze^{iz}}{1+z^2}$ sur le même contour, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{1+x^2}dx$.

Exercice 44. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. En considérant le contour ci-dessous, puis en faisant tendre R vers $+\infty$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$.



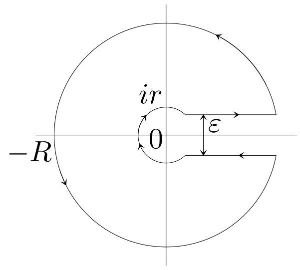
Exercice 45. En intégrant $\dfrac{e^{iz}}{z}$ sur le lacet suivant, puis en faisant tendre ε vers 0 et R vers $+\infty$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$.



Exercice 46. On fixe $a \in]0,1[$. On note Log la détermination principale du logarithme définie sur $U = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$, et on pose pour $z \in U$

$$f(z) = e^{(a-1)\mathrm{Log}(z)} .$$

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{a-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
   Pour $0 < \varepsilon < r < 1 < R$, on considère le lacet $\gamma_{\varepsilon,r,R}$ suivant :



On pose $I(\varepsilon, r, R) = \displaystyle\int_{\gamma_{\varepsilon,r,R}} \frac{f(z)}{z+1} dz.$

2. Calculer $I(\varepsilon, r, R)$ par le théorème des résidus.
3. Déterminer $I(r, R) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} I(\varepsilon, r, R)$.
4. Déterminer la limite de $I(r, R)$ quand $r \to 0$ et $R \to +\infty$ et en déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} \ .$$

<u>Exercice 47.</u> Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2u\cos(\theta) + u^2}$ pour $u \in \mathbf{C}$ de module différent de 1.

<u>Exercice 48.</u>
Soit $P = X^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$.

1. Montrer que, pour tout R suffisamment grand et tout z tel que $|z| \geq R$ on a $|z^n| > \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right|$.
2. En déduire une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss.

<u>Exercice 49.</u>
On fixe $a \in \mathbf{C}$, $|a| \geqslant 1$ et $n \geqslant 2$. Montrer que l'équation $1 + z + az^n = 0$ a toutes ses racines dans le disque $D(0, 2[$.

<u>Exercice 50.</u>
Soit $P(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots a_m$ un polynôme. On suppose que $|P(z)| \leqslant 1$, $\forall z \in D(0,1)$. Montrer qu'il existe z_0, $|z_0| = 1$, tel que $|P(z_0)| = 1$.

Approfondissement : quelques exercices pour démontrer le petit théorème de Picard

Les exercices suivants viennent du livre d'analyse complexe d'Amar et Matheron. On ne les traitera pas en TD mais n'hésitez pas à poser des questions.

<u>Exercice 51.</u> Soit f une fonction holomorphe sur le disque ouvert $D = D(0,1)$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$; on suppose que f est bornée et on note $M = \|f\|_\infty$.

1. On fixe $b \in \mathbf{C} \setminus f(D)$. Justifier l'existence et l'unicité d'une détermination holomorphe h de $\sqrt{1 - \dfrac{f(z)}{b}}$ vérifiant $h(0) = 1$.
2. Donner les deux premiers termes du développement de h en série entière en 0.
3. Montrer qu'on a $\|h\|_\infty^2 \leq 1 + \dfrac{M}{|b|}$ et en déduire, à l'aide du résultat de la question précédente et de la formule de Parseval, l'inégalité $|b| \geq \dfrac{1}{4M}$.
4. Montrer que $f(D)$ contient le dique $D(0, \dfrac{1}{4M})$.

Exercice 52. (Théorème de Bloch)

1. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert contenant le disque fermé $\bar{D}$ de centre 0 et de rayon 1 et vérifiant $f'(0) = 1$.
   (a) On définit $\omega\colon t \mapsto t \sup\{|f'(z)|\colon |z| \leq 1-t\}$. Montrer que ω est bien définie et continue sur $[0,1]$.
   (b) Prouver qu'il existe $t_0 > 0$ et $a \in D$ tels que $a \leq 1 - t_0$, $|f'(a)| = \dfrac{1}{t_0}$ et $|f'(z)| < \dfrac{1}{t}$ pour tout $t < t_0$ et tout z tel que $|z| \leq 1 - t$.
   (c) Montrer que $|f'(z)| \leq \dfrac{2}{t_0}$ pour tout $z \in D(a, \dfrac{t_0}{2})$.
   (d) En déduire que $g\colon z \mapsto f(z) - f(a)$ vérifie $|g(z)| \leq 1$ pour tout $z \in D(a, \dfrac{t_0}{2})$.
   (e) À l'aide du résultat de l'exercice précédent, montrer que $f(D)$ contient le disque $D\left(f(a), \dfrac{1}{16}\right)$.
2. Démontrer le théorème de Bloch : il existe une constante $C > 0$ telle que si f est holomorphe sur D, alors $f(D)$ contient un disque de rayon $C|f'(0)|$.
3. Soit g une fonction entière non constante. En appliquant le théorème de Bloch à des fonctions de la forme $z \mapsto g(\lambda z + b)$, montrer que $g(\mathbf{C})$ contient des disques de rayons arbitrairement grands.

Exercice 53. (Petit théorème de Picard)
On considère une fonction entière f telle que pour tout $z \in \mathbf{C}$ on ait $f(z) \neq 0$ et $f(z) \neq 1$.

1. Montrer qu'il existe une fonction entière g telle que pour tout $z \in \mathbf{C}$ on ait
$$f(z) = \exp\left(2i\pi(\mathrm{ch}(g(z)))^2\right)$$
2. Montrer que $g(\mathbf{C})$ ne rencontre pas l'ensemble
$$E = \{\pm \ln(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + 2ik\pi\colon n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{Z}\}$$
3. À l'aide du résultat de la dernière question de l'exercice précédent, prouver que f est constante.
4. Prouver le *petit théorème de Picard* : si f est une fonction entière non constante, alors on a soit $f(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$ soit $f(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \setminus \{a\}$, où $a \in \mathbf{C}$.

Le *grand théorème de Picard* est l'énoncé selon lequel, si U est un ouvert de $\mathbf{C}$, f est holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$ et z_0 est une singularité essentielle de f, alors pour tout voisinage V de z_0 contenu dans U l'ensemble $f(V)$ est soit $\mathbf{C}$ soit $\mathbf{C}$ privé d'un point. Le petit théorème de Picard en est un cas particulier immédiat (cas où la singularité est « à l'infini » : considérer $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$...). On en trouve une preuve relativement élémentaire dans le livre de Tauvel.