



DOCTORAT DE L'UNIVERSITE  
LOUIS PASTEUR STRASBOURG I

Nom du candidat : Monsieur MERCAT Christian

Titre de la thèse : Théorie de champs conformes finis, holomorphe discrète.

Jury de soutenance :

- D. BENNEQUIN (Directeur de Thèse)
- Y.C. DE VERDIERE (Rapporteur externe)
- R. LANGLANDS
- M. ROSSO (Directeur de Thèse)
- M. SLUPINSKI (Rapporteur interne)
- J.B. ZUBER (Rapporteur externe)

Le jury était présidé par : R. LANGLANDS

Date de soutenance : 27 AVR. 1998

Discipline ou spécialité mathématique.

Rappel des rapports préalables : rapporteurs	Niveau scientifique			
	Satisfaisant	Bon	Très Bon	Exceptionnel
M. M. SLUPINSKI	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
M. J.B. ZUBER	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
M. Y.C. DE VERDIERE	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**RAPPORT DE SOUTENANCE**

(à établir par le Président du Jury après avoir pris l'avis des membres de Jury)

1° EVALUATION GENERALE

Niveau Scientifique de la Présentation Orale : Satisfaisant  Bon  Très Bon  Exceptionnel

Qualité Pédagogique de la Présentation Orale : Satisfaisante  Bonne  Très Bon  Exceptionnel

Maîtrise dans la discussion : Satisfaisante  Bonne  Très Bon  Exceptionnel

- Mention attribuée :

HONORABLE

TRES HONORABLE

TRES HONORABLE  
AVEC FELICITATIONS

2° NIVEAU SCIENTIFIQUE ET PEDAGOGIQUE

Veillez préciser dans quelle mesure la discussion suivant la soutenance et les entretiens précédés vous ont permis d'évaluer la culture scientifique du candidat, ses qualités de communication, son efficacité dans une discussion, son potentiel d'innovation.

Christian Mercat a exposé avec beaucoup de clarté, de conviction et de dynamisme les principaux résultats de sa thèse, en prenant le temps de bien situer les motivations et la problématique.

L'exposé a confirmé ce que montrait le texte, à savoir les qualités d'ouverture et de curiosité du candidat, aussi bien vers les mathématiques pures qu'appliquées ou vers la physique.

Il a bien mis en évidence des idées originales sur lesquelles repose son travail, qui s'avère sur de multiples directions. Le jury souligne la créativité du candidat.

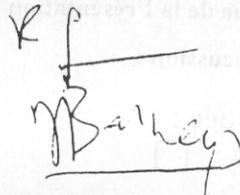
La discussion qui a suivi montre que Mercat a réfléchi très sérieusement aux prolongements de son travail.

Pour toutes ces raisons, le jury lui décerne le grade de Docteur de l'Université Louis Pasteur, spécialité mathématiques, avec la mention très honorable.

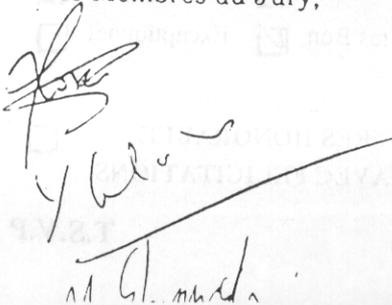
Il est convaincu qu'il fera un excellent enseignant et un excellent chercheur.

Strasbourg, le 27/4/98

Le Président du Jury,

  
Bailey

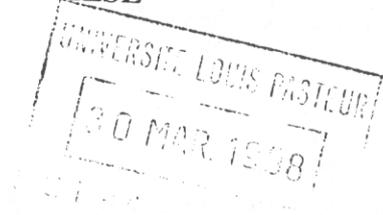
Les Membres du Jury,

  
M. G. Mercat



# DOCTORAT DE L'UNIVERSITE LOUIS PASTEUR STRASBOURG I

## RAPPORT DE PRESENTATION DE LA THESE



Nom du candidat : **Monsieur MERCAT Christian**

Titre de la thèse : Théorie de champs conformes finis, holomorphe discrète.

Jury de soutenance :

D. BENNEQUIN (Directeur de Thèse)

**Y.C. DE VERDIERE** (Rapporteur externe)

R. LANGLANDS

M. ROSSO (Directeur de Thèse)

M. SLUPINSKI (Rapporteur interne)

J.B. ZUBER (Rapporteur externe)

### Rapport de Monsieur Y.C. DE VERDIERE

#### 1° EVALUATION GENERALE

Par comparaison avec des thèses de Doctorat récentes soutenues dans votre Université, ou dont vous avez eu connaissance personnellement, cette thèse est-elle à votre avis digne d'être soutenue

en vue du Doctorat

OUI



NON



Dans l'affirmative cette thèse est-elle d'un niveau scientifique :

SATISFAISANT



BON



TRES BON



EXCEPTIONNEL



T.S.V.P.

Prière de renvoyer le présent rapport **trois semaines avant la soutenance** au Secrétariat de l'Université  
Louis Pasteur - Bureau des Etudes Doctorales - B.P. 1032/F - 67070 STRASBOURG CEDEX

## 2° CONTENU SCIENTIFIQUE

*Veillez commenter les résultats qui, dans le mémoire, vous paraissent :*

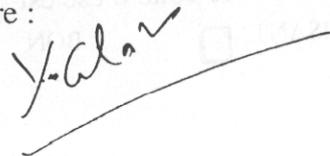
- d'un intérêt scientifique particulier, justifiant la soutenance,
- mériter une discussion lors de la soutenance,
- exiger une révision ou des compléments avant la soutenance,
- trop éloignés de votre compétence pour que vous puissiez donner un avis valable.

*Feuille jointe*

Le Rapporteur,

Date 27 ~~mai~~ mars 98

Signature :



Vu et autorisation de soutenance.

Le Président de l'Université Louis Pasteur,



# DOCTORAT DE L'UNIVERSITE LOUIS PASTEUR STRASBOURG I

## RAPPORT DE PRESENTATION DE LA THESE



Nom du candidat : **Monsieur MERCAT Christian**

Titre de la thèse : Théorie de champs conformes finis, holomorphe discrète.

Jury de soutenance :

D. BENNEQUIN (Directeur de Thèse)

Y.C. DE VERDIERE (Rapporteur externe)

R. LANGLANDS

M. ROSSO (Directeur de Thèse)

**M. SLUPINSKI** (Rapporteur interne)

J.B. ZUBER (Rapporteur externe)

### Rapport de **Monsieur M. SLUPINSKI**

#### 1° EVALUATION GENERALE

Par comparaison avec des thèses de Doctorat récentes soutenues dans votre Université, ou dont vous avez eu connaissance personnellement, cette thèse est-elle à votre avis digne d'être soutenue

en vue du Doctorat

OUI



NON



Dans l'affirmative cette thèse est-elle d'un niveau scientifique :

SATISFAISANT



BON



TRES BON



EXCEPTIONNEL



T.S.V.P.

Prière de renvoyer le présent rapport **trois semaines avant la soutenance** au Secrétariat de l'Université  
Louis Pasteur - Bureau des Etudes Doctorales - B.P. 1032/F - 67070 STRASBOURG CEDEX

## 2° CONTENU SCIENTIFIQUE

Veillez commenter les résultats qui, dans le mémoire, vous paraissent :

- d'un intérêt scientifique particulier, justifiant la soutenance,
- mériter une discussion lors de la soutenance,
- exiger une révision ou des compléments avant la soutenance,
- trop éloignés de votre compétence pour que vous puissiez donner un avis valable.



v. feuille jointe

Le Rapporteur,

Date 12/04/08

Signature :

*M. Slupinski*

Vu et autorisation de soutenance.

Le Président de l'Université Louis Pasteur,

P le Président  
Le Vice-Président

*Gawem*

Rapport sur le mémoire présenté par Christian Mercat en vue d'un doctorat en mathématiques

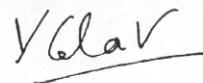
Le thèse de Christian Mercat est consacrée à l'introduction et à l'étude d'une notion de fonction holomorphe discrète avec en vue des applications à la théorie des champs conformes et aux systèmes statistiques. Je suis largement incompetent pour commenter ce dernier aspect du travail et mon analyse ne porte que sur les chapitres 1 à 6 de la thèse.

Si  $\Gamma$  est le 1-squelette d'une décomposition cellulaire d'une surface compacte orientée, on introduit la décomposition duale  $\Gamma^*$ . On donne des poids sur les arêtes de ces 2 graphes et l'équation de Cauchy-Riemann relie les valeurs d'une 1-forme sur une arête de  $\Gamma$  et sur l'arête duale au moyen du rapport des poids et du nombre complexe  $\sqrt{-1}$ . Cette définition généralise une définition de Mme Lelong-Ferrand. La pertinence de la définition peut s'apprécier d'une part dans la façon dont la théorie des formes holomorphes sur une surface de Riemann se retrouve dans le cas discret, d'autre part en termes des applications visées aux systèmes statistiques; comme je l'ai dit plus haut, je n'ai aucune opinion sur le 2ème point.

Voici quelques commentaires sur le premier : l'extension des relations entre l'holomorphie et l'harmonicité se présente bien. Il en est de même pour ce qui est des problèmes globaux de différentielles holomorphes à part un canular sur la dimension des formes abéliennes qui est 2 fois trop élevé. Ceci est dû à l'utilisation simultanée de 2 graphes. La correspondance entre la théorie discrète et la théorie continue mériterait d'être plus approfondie en s'inspirant par exemple de la théorie de Thurston (approximation des fonctions holomorphes au moyen des empilements de cercles).

L'auteur introduit ensuite le graphe médial et des généralisations déjà présentes dans la théorie des invariants de noeuds et la théorie des réseaux électriques résistifs. Les notions cruciales de cartes critiques et semi-critiques sont ensuite introduites. Les subtilités liées dans le cas du genre  $\geq 2$  aux questions de ramification ont été correctement analysées. L'auteur n'étudie pas les transformations électriques élémentaires (srie, parallèle, toile-triangle), ni les mineurs de graphes qui pourraient donner lieu à des résultats purement discrets.

*Conclusion* : la partie de la thèse que je comprends est correcte du point de vue mathématique, quoique la présentation soit parfois un peu lourde. L'auteur a fait preuve de créativité et montré sa bonne connaissance des surfaces de Riemann et de leurs propriétés d'holomorphie. Les théorèmes sont en général assez faciles à démontrer ce qui est plutôt le signe que les objets introduits sont les bons. Il ne fait pas de doute pour moi que cette thèse mérite tout à fait d'être soutenue comme doctorat en mathématiques.



Yves Colin de Verdière

(27 mars 98)

apport sur la thèse  
'Théorie de champs conformes finis, holomorphie discrète'  
de CHRISTIAN MERCAT

Le modèle d'Ising sur certains réseaux bidimensionnels converge (au sens de ses fonctions de corrélation) vers une théorie des champs conforme rationnelle (TCCR) lorsque la taille du réseau tend vers zéro si les paramètres du modèle satisfont à certaines relations. Cependant, la façon dont apparaît la structure conforme de la théorie limite comme une limite de structures conformes est assez mystérieuse : la TCCR est de nature continue alors que le modèle d'Ising est de nature discrète et la notion même de structure conforme, ou de structure holomorphe, n'est pas bien comprise dans un cadre discret.

Dans la première partie de cette thèse CHRISTIAN MERCAT définit et étudie une notion d'holomorphie discrète. Le pas essentielle dans sa démarche est l'introduction du "complexe double" qui lui permet d'écrire un analogue discret de l'équation de Cauchy-Riemann et donc d'avoir une théorie de formes holomorphes. Cette théorie possède plusieurs propriétés analogues aux propriétés de la théorie classique des formes holomorphes sur les surfaces de Riemann, ainsi que des propriétés qui lui sont propres. A mon sens le résultat le plus intéressant de cette première partie de la thèse est le théorème 10 du chapitre 6 qui donne des conditions suffisantes pour que une suite de fonctions  $\{f_k\}$  holomorphes discrètes par rapport à des décompositions cellulaires de plus en plus fines d'un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  converge vers une fonction holomorphe (au sens usuel) sur  $\Omega$ .

La deuxième partie de la thèse est consacrée à l'étude de certains aspects des systèmes statistiques. CHRISTIAN MERCAT introduit la notion de "carte critique" pour une décomposition cellulaire avec métrique d'une surface, et il montre (cf. Théorème 13 du chapitre 8) que dans le cas du modèle d'Ising l'existence d'une carte critique (pour une métrique bien choisie) équivaut à la criticalité (au sens usuel) du modèle d'Ising. Il donne aussi dans le chapitre 8 une autre condition nécessaire et suffisante, pour l'existence d'une carte critique qui est beaucoup plus subtil. Son théorème (cf. Théorème 12 du chapitre 8) est qu'il existe une carte critique si et seulement si le champ fermionique  $\psi$  de Kadanoff et Ceva satisfait à une équation différentielle discrète qu'il appelle 'l'équation de Dirac sans masse'. Il faut souligner que le champ  $\psi$  tel qu'il était présenté dans la littérature n'était pas défini globalement et que CHRISTIAN MERCAT a su lui donner un sens global en faisant des constructions de type spinoriel qui me semblent tout à fait nouvelles.

## CONCLUSION

Cette thèse représente un travail très original qui est intéressant à la fois pour les mathématiciens et pour les physiciens. L'auteur a rédigé son texte dans un style bien à lui, que j'ai trouvé très agréable à lire, et je pense qu'il a mis le doigt sur un certain nombre d'idées qui devraient conduire à des recherches futures fructueuses.

Pour toutes ces raisons je recommande très vivement la soutenance de cette thèse,  
Marcus Slupinski ( Maître de Conférences, Université de Strasbourg 1)

le 12 mai 1998

M Slupinski

# DOCTORAT DE L'UNIVERSITE LOUIS PASTEUR STRASBOURG I

## RAPPORT DE PRESENTATION DE LA THESE



Nom du candidat : **Monsieur MERCAT Christian**

Titre de la thèse : Théorie de champs conformes finis, holomorphe discrète.

Jury de soutenance :

D. BENNEQUIN (Directeur de Thèse)

Y.C. DE VERDIERE (Rapporteur externe)

R. LANGLANDS

M. ROSSO (Directeur de Thèse)

M. SLUPINSKI (Rapporteur interne)

**J.B. ZUBER** (Rapporteur externe)

### Rapport de Monsieur J.B. ZUBER

#### 1° EVALUATION GENERALE

Par comparaison avec des thèses de Doctorat récentes soutenues dans votre Université, ou dont vous avez eu connaissance personnellement, cette thèse est-elle à votre avis digne d'être soutenue

en vue du Doctorat

OUI



NON



Dans l'affirmative cette thèse est-elle d'un niveau scientifique :

SATISFAISANT



BON



TRES BON



EXCEPTIONNEL



T.S.V.P.

Prière de renvoyer le présent rapport **trois semaines avant la soutenance** au Secrétariat de l'Université  
Louis Pasteur - Bureau des Etudes Doctorales - B.P. 1032/F - 67070 STRASBOURG CEDEX

## 2° CONTENU SCIENTIFIQUE

Veillez commenter les résultats qui, dans le mémoire, vous paraissent :

- d'un intérêt scientifique particulier, justifiant la soutenance,
- mériter une discussion lors de la soutenance,
- exiger une révision ou des compléments avant la soutenance,
- trop éloignés de votre compétence pour que vous puissiez donner un avis valable.

La thèse que M. Mercat présente porte sur les propriétés mathématiques sous-jacentes au modèle d'Ising bidimensionnel. Dans la limite continue, ce modèle est décrit par des champs de spineurs satisfaisant l'équation de Dirac libre, ces champs devenant holomorphes ou antiholomorphes au point critique.

Le but de cette thèse est de trouver l'analogue de ces structures dans la théorie discrète, pour un modèle défini sur un graphe associé à une décomposition cellulaire d'une surface  $\Sigma$  de genre  $g$ .

Les points les plus marquants de la discussion me paraissent être les suivants:

1. M. Mercat a été capable de définir une notion d'holomorphicité discrète adaptée au problème qui l'occupe, en introduisant en sus du graphe de départ le graphe dual (complexe cellulaire "double"). On se donne une métrique sur ces deux graphes. c'est-à-dire qu'on attache une longueur  $\ell(a) \geq 0$  à chacune de leurs arêtes  $a$ . Une fonction  $f$  définie sur l'union de ces deux graphes est holomorphe si elle satisfait l'analogue discret de l'équation de Cauchy-Riemann:  $\frac{f(x)-f(x')}{\ell(x,x')} = -i \frac{f(y)-f(y')}{\ell(y,y')}$ , pour toute paire de liens duaux  $(x, x')$  et  $(y, y')$ . Cette notion permet de retrouver de nombreuses notions familières dans le continu (relation holomorphicité-harmonicité, théorème des résidus, etc). Une exception notable concerne le nombre des différentielles holomorphes, qui est  $2g$  et non pas  $g$ , en genre  $g$ .

2. Par ailleurs, M. Mercat introduit la notion de criticalité d'un graphe. *Grosso modo*, un double complexe cellulaire muni d'une métrique est critique s'il existe une application du revêtement universel de  $\Sigma$  dans le plan euclidien qui conserve les longueurs des arêtes et l'orientation et telle que les paires d'arêtes duales soient envoyées sur des paires d'arêtes orthogonales se coupant en leur milieu. La condition est satisfaite dans le cas de réseaux réguliers, mais aussi pour des classes de graphes plus généraux.

3. Dans une troisième partie (chap. 7 et 8), M. Mercat étudie le modèle d'Ising défini sur un complexe cellulaire. Il considère en particulier le champ  $\psi$ , défini par le produit des variables de spin et de désordre. Il montre d'abord que  $\psi$  définit sur  $\Sigma$  une structure de spin: il est bien défini sur le revêtement de  $\Sigma$ . Il montre aussi qu'il satisfait un analogue discret de l'équation de Dirac (de masse nulle) si le graphe est critique pour des longueurs  $\ell$  définies en termes des constantes d'interaction du modèle d'Ising. (La condition de criticalité de M. Mercat équivaut à la condition usuelle pour des réseaux réguliers). Il démontre enfin que  $\psi$  a les propriétés d'holomorphicité attendues.

Ce travail me paraît ouvrir des voies intéressantes pour l'étude d'autres modèles statistiques (modèles de Potts, de Baxter, ...). La situation non critique, où les  $\psi$  satisfont toujours une équation de Dirac libre, mais massive, qui mélange les composantes holomorphes et antiholomorphes, mériterait aussi d'être approfondie. Mais telle qu'elle est, cette thèse présente un très joli ensemble de résultats originaux, non triviaux et prometteurs et mérite évidemment d'être soutenue. Il convient aussi de souligner que la thèse est bien rédigée et d'une lecture agréable. :

Le Rapporteur,

Date le 16 Mars 1998

Signature :

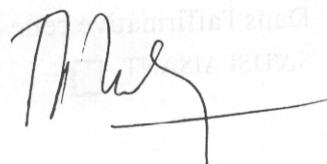
Vu et autorisation de soutenance.

Le Président de l'Université Louis Pasteur,

P. le Président

Le Vice-Président







UNIVERSITE  
LOUIS PASTEUR  
STRASBOURG

## CERTIFICAT

Le Chef de la Division des Enseignements de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg, soussigné, certifie que

*Monsieur MERCAT Christian*

né le *3 juillet 1969* à *CHATEAU RENAULT*

département ou pays *Indre et Loire*

a obtenu le *27 avril 1998* devant l'UNIVERSITE LOUIS PASTEUR DE STRASBOURG, le grade de *DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE STRASBOURG I*, en *MATHÉMATIQUES* avec la mention *TRES HONORABLE*.

En foi de quoi, le présent certificat lui est délivré.

Strasbourg, le 12 Juin 1998

Le Chef de la Division des Enseignements,



*A. Nonnenmacher*  
A. NONNENMACHER

*NOTA : Il n'est pas délivré de duplicata de ce certificat. Il appartient au titulaire d'établir lui-même et de faire certifier conformes par la Mairie de son domicile les copies qui peuvent lui être nécessaires.*