Université d'Orléans
UFR Sciences
Département de Mathématiques

Licence 1 – Semestre 1
Tronc commun Maths – Info
Automne 2010

SLO1MA12 – Introduction au raisonnement mathématique 2 – Analyse

Ce cours a un double objectif. Il s'agit d'une part d'une introduction au calcul différentiel (*calculus* en anglais) et d'autre part d'une initiation au raisonnement mathématique. Les étudiants suivent en parallèle un cours d'algèbre linéaire, avec le même double objectif.

Chapitre 1. Fonctions classiques

Ce chapitre est une *mise en jambe* sur la théorie des fonctions d'une variable réelle. Il s'agit de rappels pour une partie des étudiants et d'une mise à niveau pour d'autres, voire de matériel en partie nouveau. Après des généralités, on passe en revue un certain nombre de fonctions dites *classiques* ([1]) :
– valeur absolue,
– polynômes,
– fractions rationnelles,
– logarithme,
– exponentielle,
– fonctions trigonométriques,
– fonctions trigonométriques réciproques,
afin que les étudiants disposent d'un stock d'exemples. Dans ce chapitre, on s'autorisera à utiliser *expérimentalement* des notions et techniques (en particulier les limites et dérivées), qui seront reprises et développées rigoureusement dans les chapitres suivants.

§ 1. Notations et généralités

Rappelons que
- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble $\{0,1,2,3,\dots\}$ des entiers naturels,
- $\mathbb{Z}$ l'ensemble $\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$ des entiers relatifs,
- $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels $x=\frac{p}{q}$, avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$,
- $\mathbb{R}$ l'ensemble de tous les nombres réels.

On a les inclusions $\mathbb{N}\subsetneq\mathbb{Z}\subsetneq\mathbb{Q}\subsetneq\mathbb{R}$. Lorsqu'on se restreint aux nombres $x\geq 0$, respectivement $x\neq 0$, on ajoute un indice supérieur $+$, respectivement $*$. Par exemple $\mathbb{Q}^{+*}=\{x=\frac{p}{q}\mid p,q\in\mathbb{N}^*\}$.

Graphe, domaine de définition, image

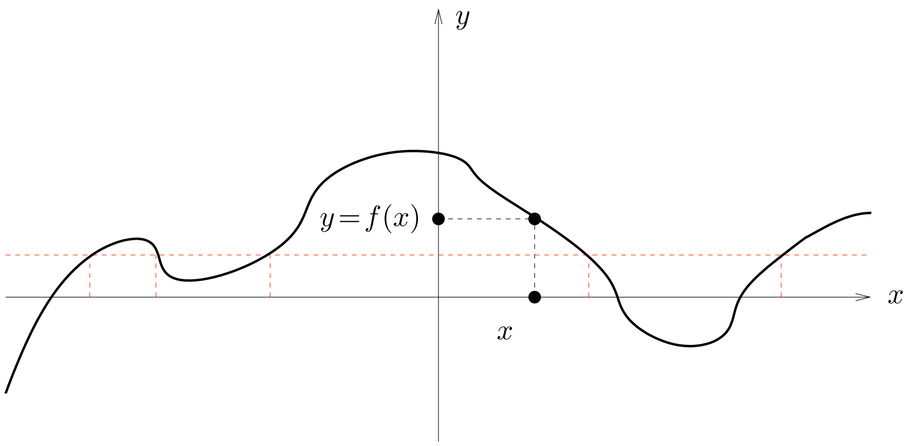
Les fonctions f que nous considérons sont à valeurs réelles et définies a priori sur $\mathbb{R}$, ce qu'on note

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto y=f(x)\end{aligned}$$

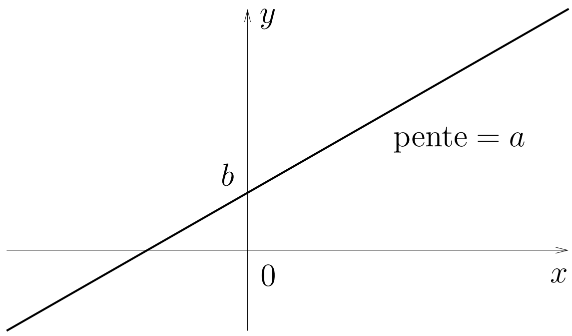
Le *graphe* (ou *courbe représentative*) d'une telle fonction est l'ensemble des points (x,y) du plan $\mathbb{R}^2$ tels que $y=f(x)$. On le note $\mathcal{G}(f)$ ou $\mathcal{G}_f$.

Notons qu'à chaque point x correspond une unique valeur $y=f(x)$, tandis que certaines valeurs y peuvent être prises en plusieurs points x (défaut d'*injectivité*) ou peuvent ne ne pas être atteintes (défaut de *surjectivité*).

[1] La fonction *partie entière* sera introduite au chapitre 4. Les fonctions hyperboliques et leurs réciproques seront étudiées dans le chapitre 5.

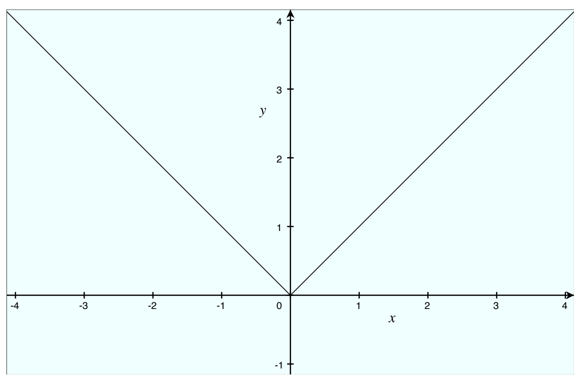


Exemple : Une fonction *affine* est une fonction de la forme $f(x) = ax + b$, où a et b sont des paramètres réels. Son graphe est une droite de pente a, passant par le point $(0, b)$.



Exemple : La fonction *valeur absolue* est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$



Propriétés de la valeur absolue :

- $|x| \geq 0\,,$
- $|-x| = |x|$
- $|x\,y| = |x|\,|y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
- $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

Certaines fonctions ne sont pas définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. Le *domaine de définition* d'un telle fonction f est l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ où l'expression $f(x)$ a un sens. On le note $\mathcal{D}(f)$ ou $\mathcal{D}_f$.

Exemples :
- Le domaine de définition de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est $\mathbb{R}^*$.
- Le domaine de définition de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est $\mathbb{R}^+$.

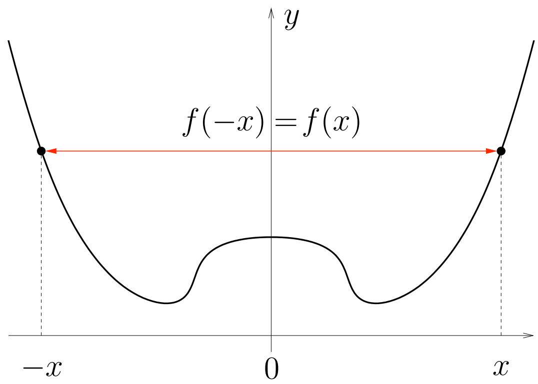
L'*image* d'une fonction f est l'ensemble des valeurs $y = f(x)$ prises par f sur son domaine de définition. On la note $\mathcal{I}(f)$ ou $\mathcal{I}_f$.

Exemples :
- L'image d'une fonction constante $x \longmapsto c$ est $\{c\}$.
- L'image de la fonction $x \longmapsto x$ est $\mathbb{R}$. C'est le cas plus généralement des puissances impaires de x.
- L'image de la fonction $x \longmapsto x^2$ est $\mathbb{R}^+$. C'est le cas plus généralement des puissances paires de x.
- L'image de la fonction $x \longmapsto |x|$ est $\mathbb{R}^+$.
- L'image de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est $\mathbb{R}^*$.
- L'image de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est $\mathbb{R}^+$.

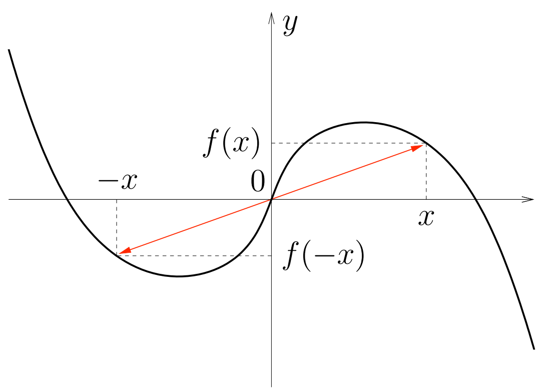
Symétries : parité, imparité, périodicité

Une fonction f est dite *paire*, respectivement *impaire* si les conditions suivantes sont vérifiées :
- $x \in \mathcal{D}(f)$ si et seulement si $-x \in \mathcal{D}(f)$,
- dans ce cas, $f(-x) = f(x)$, respectivement $f(-x) = -f(x)$.

En d'autres termes,
- une fonction est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées y,



- une fonction est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.



Exemples :

- Les fonctions constantes sont paires.
- La fonction $x \longmapsto x$ est impaire. C'est le cas plus généralement des puissances impaires de x.
- La fonction $x \longmapsto x^2$ est paire. C'est le cas plus généralement des puissances paires de x.
- La fonction $x \longmapsto |x|$ est paire.
- La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est impaire.

Proposition. Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, et cette décomposition est unique.

Démonstration.

- *Unicité* : Supposons que f est la somme d'une fonction paire g et d'une fonction impaire h :

$$f(x) = g(x) + h(x)\,. \tag{1}$$

En remplaçant x par $-x$, (**??**) devient

$$f(-x) = g(x) - h(x)\,. \tag{2}$$

En faisant la somme et la différence de (**??**) et (**??**), on obtient d'une part $f(x)+f(-x) = 2\,g(x)$, c'est–à–dire

$$g(x) = \tfrac{f(x)+f(-x)}{2} \tag{3}$$

et d'autre part $f(x) - f(-x) = 2\,h(x)$, c'est–à–dire

$$h(x) = \tfrac{f(x)-f(-x)}{2}\,. \tag{4}$$

Ceci démontre l'unicité de la décomposition (**??**).

- *Existence* : Etant donné une fonction f, on définit g et h par (**??**) et (**??**), et on vérifie que

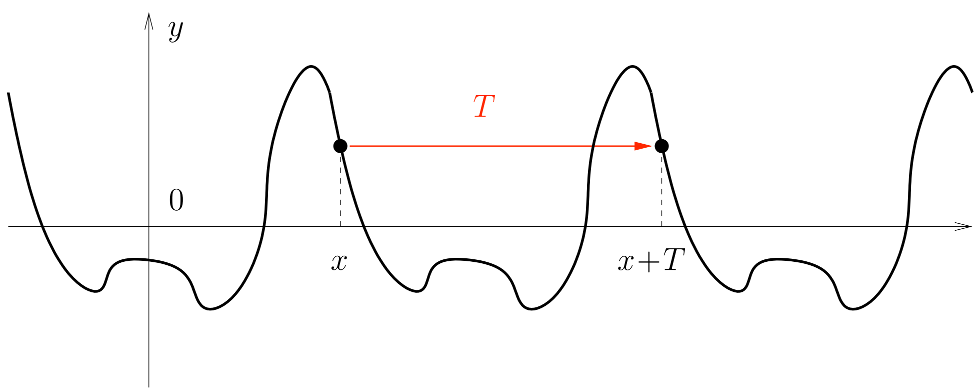
◦ g est paire : $g(-x) = \tfrac{f(-x)+f(x)}{2} = \tfrac{f(x)+f(-x)}{2} = g(x)$,
◦ h est impaire : $h(-x) = \tfrac{f(-x)-f(x)}{2} = -\tfrac{f(x)-f(-x)}{2} = -h(x)$,
◦ $g+h=f$: $g(x)+h(x) = \tfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \tfrac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$.

□

Soit $T>0$. Une fonction f est dite *de période* T (ou T*–périodique*) si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $x \in \mathcal{D}(f)$ si et seulement si $x+T \in \mathcal{D}(f)$,
- dans ce cas, $f(x+T) = f(x)$.

En d'autres termes, f est T*–périodique* si son graphe est invariant par la translation horizontale de pas T.



On appelle <u>la</u> *période* d'une fonction périodique sa plus petite période, lorsqu'elle existe.

Remarques :
- Une fonction périodique admet une infinité de périodes. En effet, si T est une période, alors ses multiples $2T$, $3T$, $4T$, ... sont également des périodes.
- Certaines fonctions périodiques ne possèdent pas de plus petite période. C'est le cas par exemple des fonctions constantes.
- On peut montrer qu'une fonction périodique, non constante et continue, admet une plus petite période.

Exemples (voir plus loin) :
- Les fonction $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \sin x$ sont périodiques de période 2π.
- La fonction $x \longmapsto \tan x$ est périodique de période π.

Composition, réciproque (à traiter au fur et à mesure des besoins)

Soient f et g deux fonctions réelles d'une variable réelle. Leur *composée* $f \circ g$ est la fonction

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \,.$$

Son domaine de définition $\mathcal{D}(f \circ g)$ est constitué des points $x \in \mathcal{D}(g)$ tels que $g(x) \in \mathcal{D}(f)$. En particulier, $\mathcal{D}(f \circ g) = \mathcal{D}(g)$ si $\mathcal{I}(g) \subset \mathcal{D}(f)$.

Attention :
- Ne pas confondre la composition $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ avec le produit $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
- En général, $f \circ g \neq g \circ f$.

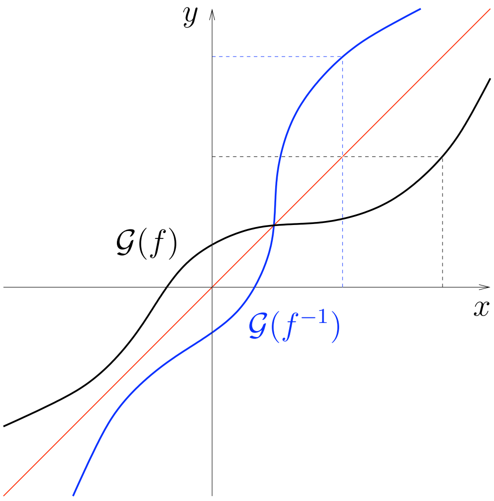
Soit f une fonction définie dans une partie I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans une partie J de $\mathbb{R}$. Rappelons que f est dite
- *injective* si elle vérifie les conditions équivalentes suivantes :
  - deux point distincts $x_1 \neq x_2$ quelconques dans I ont des images distinctes $f(x_1) \neq f(x_2)$,
  - si deux points $x_1, x_2 \in I$ ont la même image $f(x_1) = f(x_2)$, alors $x_1 = x_2$;
- *surjective* si $J = f(I)$ i.e. toute valeur $y \in J$ est atteinte par f en un point $x \in I$ au moins ;
- *bijective* si elle vérifie les conditions équivalentes suivantes :
  - f est à la fois injective et surjective,
  - les points $x \in I$ et les valeurs $y \in J$ se correspondent deux à deux par f.

Exemples :
- Une fonction strictement monotone (voir plus loin) est bijective de son domaine de définition $\mathcal{D}(f)$ sur son image $\mathcal{I}(f)$. Par exemple,
  - une fonction affine $x \longmapsto ax+b$, avec $a \neq 0$, est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
  - les puissances impaires de x sont bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est bijective de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$.
- La fonctions $x \longmapsto |x|$ n'est ni injective, ni surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par contre elle est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Il en va de même pour les puissances paires de x.

Si $f : I \longrightarrow J$ est bijective, alors on peut considérer la *fonction réciproque* $f^{-1} : J \longrightarrow I$ qui, à tout $y = f(x)$, associe sa *préimage* $x = f^{-1}(y)$.

Attention : Ne pas confondre la réciproque f^{-1} avec l'inverse $\frac{1}{f}$.

Les graphes de f et de f^{-1} sont alors symétriques par rapport à la bissectrice $y = x$.

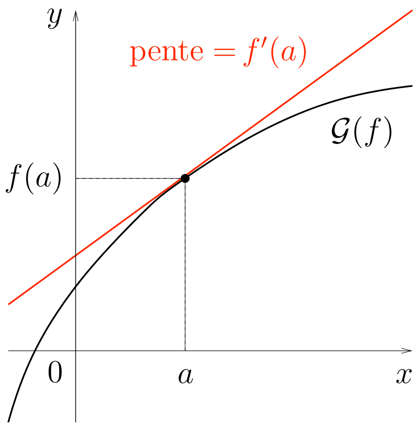


Limites

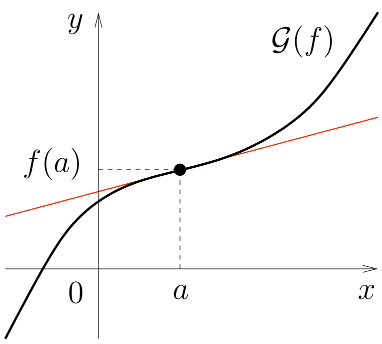
La notion de limite sera étudiée aux chapitres 3 et 4. On se limitera pour le moment à des manipulations en faisant appel aux opérations rassemblées en annexe.

Dérivées

La notion de dérivée sera étudiée au chapitre 4. On se limitera pour le moment à des manipulations en faisant appel aux formules de dérivation et aux dérivées classiques rassemblées en annexes. On utilisera également l'interprétation géométrique de la dérivée comme pente de la tangente au graphe.



Calculons l'équation de la droite tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$:
On a $f'(a) = \frac{y - f(a)}{x - a}$ d'où $y = f(a) + f'(a)\,(x-a)$.
Un *point d'inflexion* est un point où le graphe traverse sa tangente.



Monotonie

Une fonction f est dite *croissante*, respectivement *décroissante* sur $I \subset \mathcal{D}(f)$ si, pour tout $x_1, x_2 \in I$, l'inégalité $x_1 \leq x_2$ implique l'inégalité $f(x_1) \leq f(x_2)$, respectivement $f(x_1) \geq f(x_2)$. Elle est dite *strictement croissante*, respectivement *strictement décroissante* sur I si, pour tout $x_1, x_2 \in I$, l'inégalité $x_1 < x_2$ implique l'inégalité $f(x_1) < f(x_2)$, respectivement $f(x_1) > f(x_2)$.

Proposition. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.
- f est croissante, respectivement décroissante si et seulement si $f' \geq 0$, respectivement $f' \leq 0$.
- Si $f' > 0$, respectivement $f' < 0$, alors f est strictement croissante, respectivement strictement décroissante.

Démonstration. Voir chapitre 4.

Premier plan d'étude d'une fonction (voir TD et chapitre 5)

- Domaine de définition
- Symétries, réduction éventuelle du domaine d'étude
- Dérivée
- Tableau de variation
- Limites aux bornes du domaine de définition, asymptotes verticales et horizontales
- Dessin du graphe, points remarquables

§ 2. Fonctions polynomiales

Les *monômes* sont les fonctions $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Leur dérivée est $f'(x) = nx^{n-1}$ et leur graphe sera tracé en TD. Comportement à l'infini :

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ +\infty & \text{si } n>0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} > 0 \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

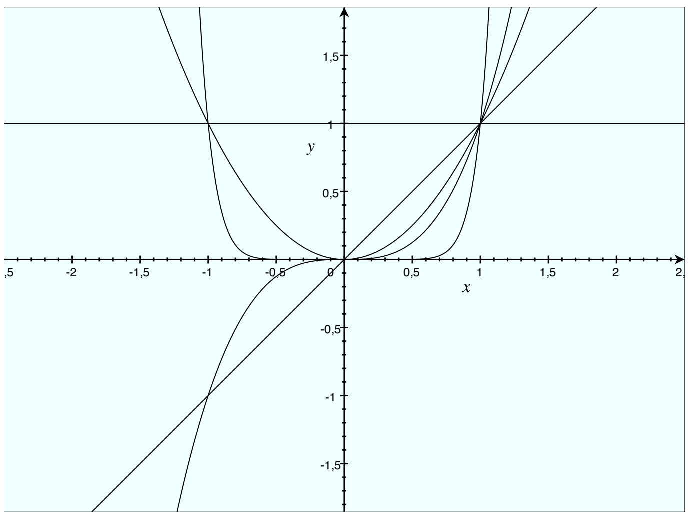


Figure. Les premiers monômes $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^{10}$

Les *polynômes* sont les combinaisons linéaires de monômes :

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \quad \text{avec } a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}.$$

Le degré de p est la puissance j la plus élevée avec un coefficient a_j non nul. Sa dérivée est

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + n a_n x^{n-1}.$$

Son comportement à l'infini est déterminé par le terme non nul de plus haut degré. Plus précisément, si $a_n \neq 0$, on voit que

$$p(x) = a_n x^n \left(1 + \tfrac{a_{n-1}}{a_n} \tfrac{1}{x} + \ldots + \tfrac{a_2}{a_n} \tfrac{1}{x^{n-2}} + \tfrac{a_1}{a_n} \tfrac{1}{x^{n-1}} + \tfrac{a_0}{a_n} \tfrac{1}{x^n}\right)$$

a le même comportement à l'infini que $a_n x^n$, car la parenthèse tend vers 1.

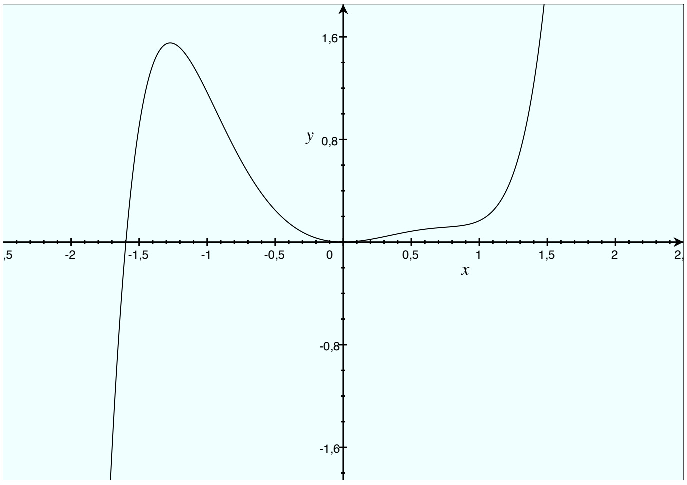


Figure. Graphe de $x \mapsto \frac{1}{6}x^7 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2$

Les *racines* (ou *zéros*) d'un polynôme p sont les réels a tels que $p(a) = 0$. Enonçons quelques résultats d'algèbre :

Théorème :

- a est une racine de p si et seulement s'il existe un polynôme q tel que $p(x) = (x-a)\, q(x)$ (i.e. p est divisible par $x-a$).
- Un polynôme de degré n admet au plus n racines.
- Tout polynôme est le produit de
  - une constante,
  - des polynômes $x - a_j$ de degré 1,
  - des polynômes $x^2 + b_k x + c_k$ de degré 2, irréductibles (i.e. $\Delta_k = b_k^2 - 4c_k < 0$).

§ 3. Fonctions rationnelles

Ce sont les fonctions de la forme

$$f(x) = \tfrac{p(x)}{q(x)} \qquad \text{où } p \text{ et } q \text{ sont des polynômes.}$$

Leur domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus A$, où A est l'ensemble des racines de q. Leur dérivée est

$$f'(x) = \tfrac{p'(x)\, q(x) - p(x)\, q'(x)}{q(x)^2}.$$

Leur comportement à l'infini est déterminé par les termes dominants de p et de q. Plus précisément, si

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ \ldots \ + a_{m-1} x^{m-1} + a_m x^m \quad \text{avec } \ a_m \neq 0$$

et

$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ \ldots \ + b_{n-1} x^{n-1} + b_n x^n \quad \text{avec } \ b_n \neq 0,$$

alors

$$f(x) = \frac{a_m}{b_n} \frac{x^m}{x^n} \frac{1 + \frac{a_{m-1}}{a_m} \frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_2}{a_m} \frac{1}{x^{m-2}} + \frac{a_1}{a_m} \frac{1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{a_m} \frac{1}{x^m}}{1 + \frac{b_{n-1}}{b_n} \frac{1}{x} + \ldots + \frac{b_2}{b_n} \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{b_1}{b_n} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{b_n} \frac{1}{x^n}}$$

a le même comportement à l'infini que $\frac{a_m}{b_n} x^{m-n}$, car la dernière fraction tend vers 1.

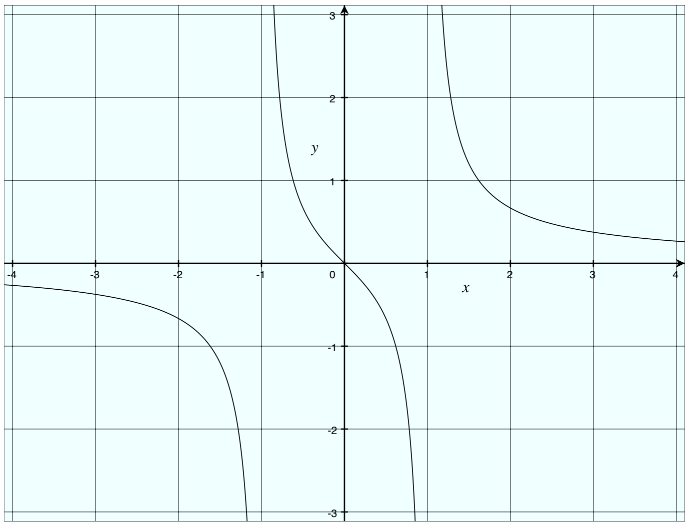


Figure. Graphe de $x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$

§ 4. La fonction logarithme

Définition. Une *primitive* d'une fonction f est une fonction F telle que $F' = f$.

Théorème. Sur un intervalle,
(a) deux primitives diffèrent par une constante,
(b) toute fonction continue possède une primitive.

Démonstration. Le point (a) est une conséquence du résultat suivant, qui sera démontré au chapitre 4 : Sur un intervalle, une fonction est constante si et seulement si sa dérivée est nulle. Le point (b) sera démontré dans un semestre ultérieur, en faisant appel à la théorie de l'intégration.

□

Définition. La fonction *logarithme*, notée $x \longmapsto \ln x$, est la primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*} =]0, +\infty[$, qui vaut 0 en $x = 1$.

Voici deux propriétés de base du logarithme. D'autres sont rassemblées en annexe.

Proposition.
(a) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
(b) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

Démonstration. (a) Fixons $y \in \mathbb{R}^{+*}$ et considérons la fonction $f(x) = \ln(xy)$. Elle est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et elle est dérivable. En utilisant la formule de dérivation d'une fonction composée, on obtient $f'(x) = \frac{1}{xy} y = \frac{1}{x}$. C'est donc une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$, qui diffère de ln par une constante $c \in \mathbb{R}$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = \ln x + c\,.$$

En prenant $x=0$, on obtient $c = \ln y$. D'où la conclusion.
(b) En posant $y = \frac{1}{x}$ dans (a), on obtient $\ln x + \ln \frac{1}{x} = \ln 1 = 0$. D'où la conclusion.

□

Corollaire. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\ln x^n = n \ln x$.

Démonstration.
• Le cas $n=0$ résulte de la convention $x^0 = 1$ et de la définition $\ln 1 = 0$.
• Si $n > 0$, on procède par récurrence.
∘ *Initialisation* pour $n=1$: $\ln x^1 = \ln x = 1 \times \ln x$.
∘ *Hérédité* : Supposons que $\ln(x^n) = n \ln x$ et montrons que $\ln(x^{n+1}) = (n+1) \ln x$. En utilisant la partie (a) de la proposition et l'hypothèse de récurrence, on a en effet

$$\ln(x^{n+1}) = \ln(x^n) + \ln x = n\,(\ln x) + \ln x = (n+1)\, \ln x\,.$$

• Si $n < 0$, on combine le cas précédent pour $m = -n > 0$ avec la partie (b) de la proposition :

$$\ln(x^n) = \ln\big((\tfrac{1}{x})^m\big) = m\, \ln \tfrac{1}{x} = n\, \ln x\,.$$

□

Passons aux propriétés de base de la fonction logarithme.

Proposition.
(a) La fonction ln est continue.
(b) La fonction ln est strictement croissante.
(c) $\lim_{x \searrow 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
(d) La fonction ln est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.

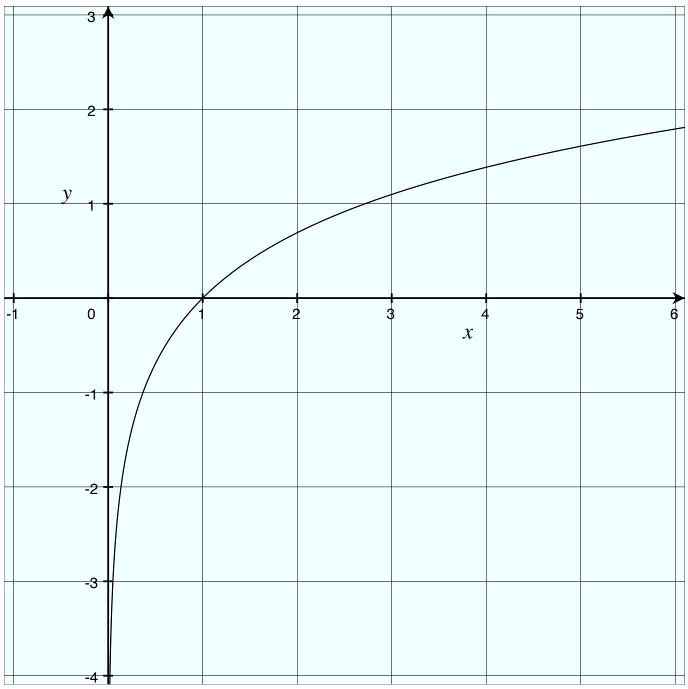


Figure. Graphe de la fonction ln

Démonstration. (a) La continuité résulte de la dérivabilité.
(b) La fonction ln est strictement croissante car sa dérivée $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ est strictement positive.

(c) On a $\ln 2 > \ln 1 = 0$. D'après le corollaire, $\ln(2^n) = n \ln 2 \to +\infty$ et $\ln(2^{-n}) = -\,n \ln 2 \to -\infty$.
(d) L'injectivité résulte de la croissance stricte. La surjectivité résulte du théorème des valeurs intermédiaire, qu'on démontrera au chapitre 4.

$\square$

§ 5. La fonction exponentielle

Rappelons que la fonction ln est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.

Définition. La fonction *exponentielle* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ est la fonction réciproque de ln :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall\, y \in \mathbb{R}\,, \quad \ln x = y \iff \exp y = x\,.$$

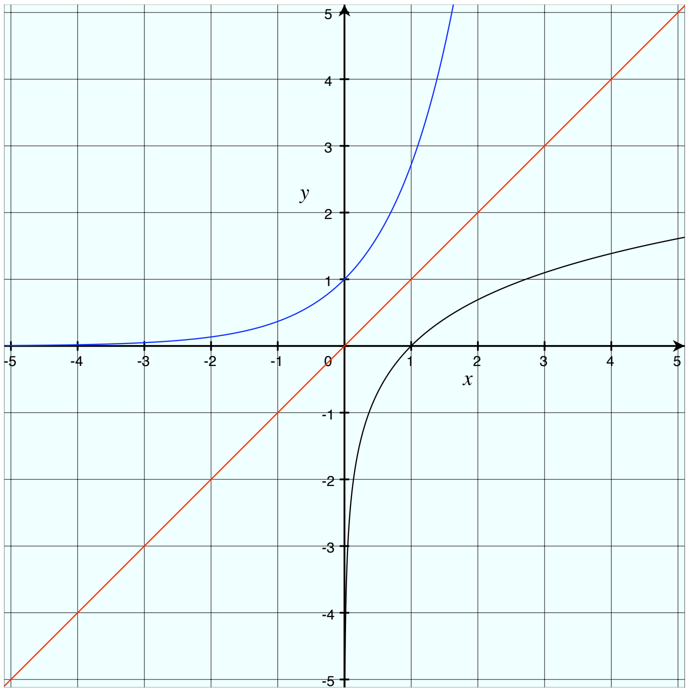


Figure. Graphe de la fonction exp comme réciproque de la fonction ln

Les propriétés suivantes de la fonction exponentielle résultent de la définition de la fonction exponentielle et des propriétés de la fonction logarithme.

Proposition.
(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\ln(\exp x) = x$.
(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $\exp(\ln x) = x$.
(c) $\exp 0 = 1$.
(d) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$.
(e) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$.
(f) La fonction exp est continue et dérivable, avec $(\exp)'(x) = \exp x$.
(g) La fonction exp est strictement croissante.
(h) $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$.
(i) La fonction exp est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Nous verrons plus loin (chapitre 4) qu'à l'infini, la fonction exponentielle croît plus vite que n'importe quel polynôme.

Proposition. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp x}{x^n} = +\infty}$.

Voici des variantes de la limite précédente.

Corollaire.
(a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\lim_{x\to-\infty} x^n \exp x = 0$.
(b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = 0$.
(c) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\lim_{x\searrow 0} x(\ln x)^n = 0$.

Définition. Les *puissances* de degré $\alpha\in\mathbb{R}$ sont définies par

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln x) \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}^{+*}.$$

Proposition.
(a) Pour tout $x\in\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on a $\ln x^\alpha = \alpha \ln x$.
(b) Pour tout $x, y\in\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on a $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$.
(c) Pour tout $x\in\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, on a $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

Notations. On pose $e = \exp 1 = 2{,}71828182845904523536\ldots \approx 2{,}72$. La définition précédente justifie qu'on écrive dorénavant e^x au lieu de $\exp x$.

§ 6. Les fonctions circulaires

Rappelons la définition géométrique de
- la mesure $x\in\mathbb{R}$ des angles en *radians*,
- le *cosinus* $\cos x\in[-1,+1]$,
- le *sinus* $\sin x\in[-1,+1]$,
- la *tangente* $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\in\mathbb{R}$.

Rappelons que l'aire d'un secteur circulaire d'angle $0\le x\le 2\pi$ et de rayon $r>0$ est égale à $\frac{1}{2}xr^2$. En particulier, l'aire d'un disque de $r>0$ est égale à πr^2.

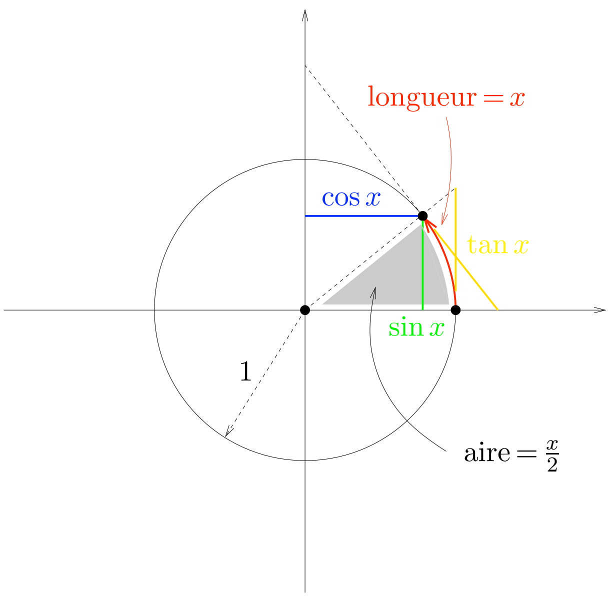


Figure. Cercle trigonométrique

Rappelons l'identité de *Pythagore* $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$. D'autres formules trigonométriques sont rassemblées en annexe.

Passons à l'étude des fonctions $x\longmapsto \cos x$, $x\longmapsto \sin x$ et $x\longmapsto \tan x$.

Proposition.
(a) Les fonctions cos et sin ont pour domaine de définition $\mathbb{R}$. La fonction tan a pour domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots\}$.
(b) Les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π. La fonction tan est périodique de période π.
(c) La fonction cos est paire. Les fonctions sin et tan sont impaires.
(d) On a les formules de dérivation suivantes :

$$\boxed{(\cos)'(x) = -\sin x\,, \quad (\sin)'(x) = \cos x\,, \quad (\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}\,.$$

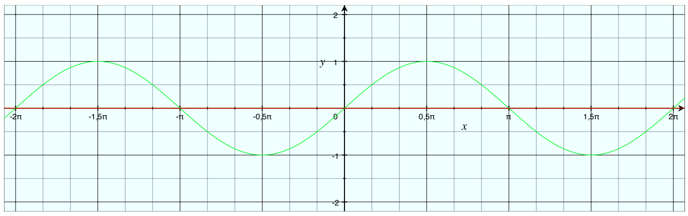


Figure. Graphe de la fonction sin

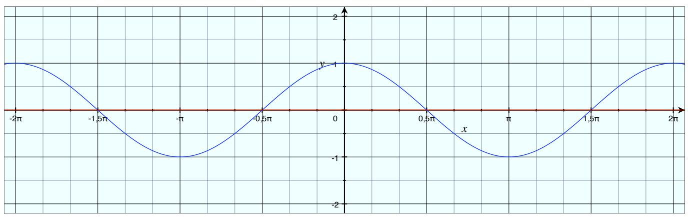


Figure. Graphe de la fonction cos

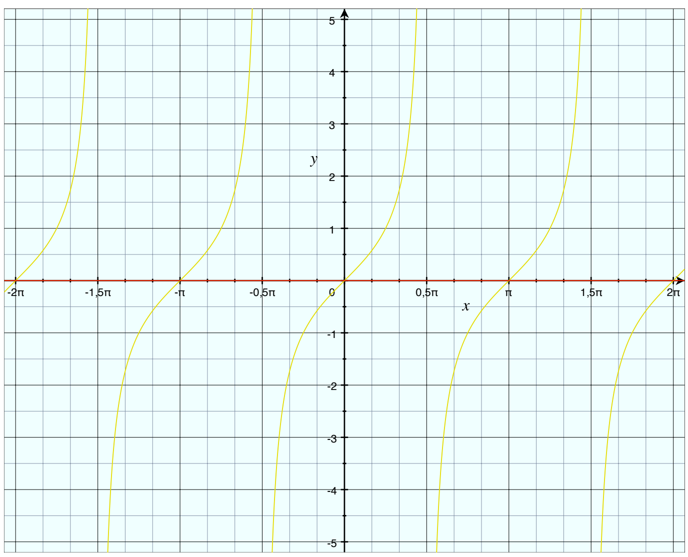
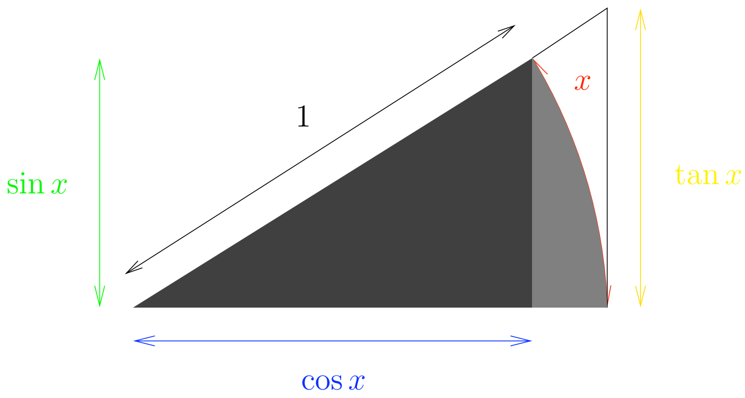


Figure. Graphe de la fonction tan

Les formules de dérivation reposent sur la limite suivante.

Lemme. $\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{\sin x}{x} = 1}$

Démonstration. Par symétrie, il suffit de montrer que $\frac{\sin x}{x} \to 1$ lorsque $x \overset{>}{\to} 0$. En comparant les aires suivantes



on obtient

$$\frac{\cos x \sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2},$$

d'où

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

En faisant tendre $x \overset{>}{\to} 0$, on conclut que $\frac{\sin x}{x} = 1$.

$\square$

Corollaire. $\lim_{x \underset{\neq}{\to} 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

Démonstration. Cette limite se déduit de la précédente au moyen de l'identité trigonométrique $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$.

$\square$

§ 7. Les fonctions circulaires réciproques

Les fonctions cos, sin et tan ne sont pas bijectives de leur domaine de définition sur leur image. Nous allons nous restreindre à des intervalles, où elles sont strictement monotones, afin de définir des fonctions réciproques.

Lemme. La fonction sin est bijective de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Démonstration. L'injectivité résulte de la croissance stricte et la surjectivité du théorème des valeurs intermédiaires (chapitre 4). A ce stade, on constate la bijectivité à partir du graphe.

Définition. On note

$$\operatorname{Arc\,sin} : [-1, 1] \longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

la fonction réciproque. En d'autres termes, pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et pour tout $y \in [-1, 1]$, on a

$$\boxed{\sin x = y \iff \operatorname{Arc\,sin} y = x}.$$

Proposition.
(a) Pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a $\operatorname{Arc\,sin}(\sin x) = x$.
(b) Pour tout $y \in [-1, 1]$, on a $\sin(\operatorname{Arc\,sin} y) = y$.
(c) La fonction Arc cos est impaire.
(d) La fonction Arc sin est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$, avec

$$(\operatorname{Arc\,sin})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

(e) La fonction Arc sin est strictement croissante.
(f) La fonction Arc sin est bijective de $[-1, 1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

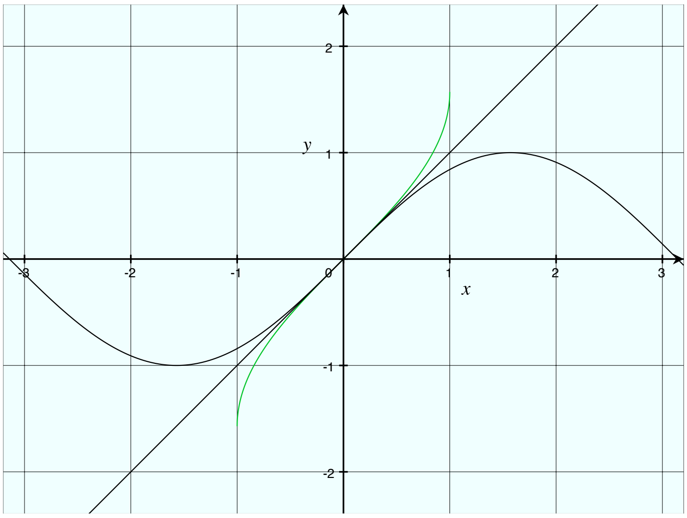


Figure. Graphe de la fonction $\mathrm{Arc}\sin$

De même, la fonction cos est bijective de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$ et on note

$$\mathrm{Arc}\cos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$

la fonction réciproque. En d'autres termes, pour tout $x\in[0,\pi]$ et pour tout $y\in[-1,1]$, on a

$$\boxed{\cos x = y \iff \mathrm{Arc}\cos y = x}\,.$$

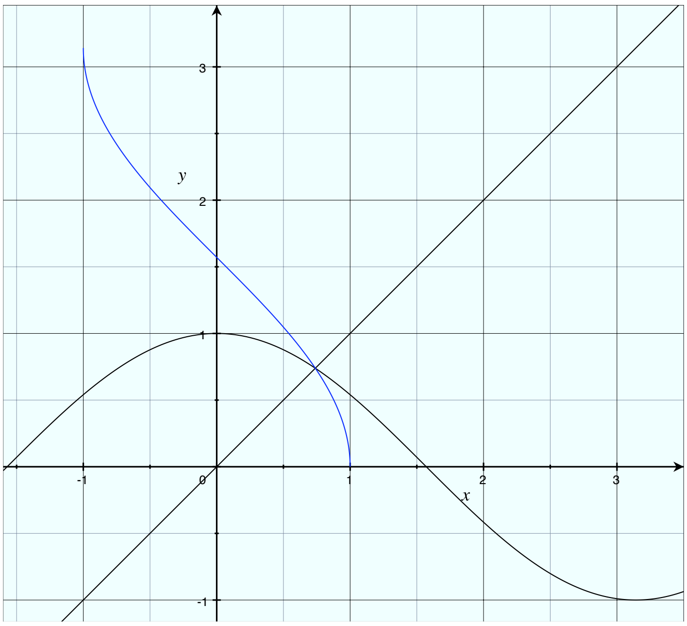


Figure. Graphe de la fonction $\mathrm{Arc}\cos$

Proposition.
(a) Pour tout $x\in[0,\pi]$, on a $\mathrm{Arc}\cos(\cos x)=x$.
(b) Pour tout $y\in[-1,1]$, on a $\cos(\mathrm{Arc}\cos y)=y$.
(c) La fonction $\mathrm{Arc}\sin$ est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$, avec

$$(\mathrm{Arc}\cos)'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,.$$

(d) La fonction $\mathrm{Arc}\cos$ est strictement décroissante.
(e) La fonction $\mathrm{Arc}\cos$ est bijective de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$.

Exercice (TD). Pour tout $x\in[-1,1]$, on a $\mathrm{Arc}\sin x + \mathrm{Arc}\cos x = \frac{\pi}{2}$.

Pour terminer, la fonction tan est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ et on note

$$\operatorname{Arc}\tan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[$$

la fonction réciproque. En d'autres termes, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{\tan x = y \iff \operatorname{Arc}\tan y = x}\,.$$

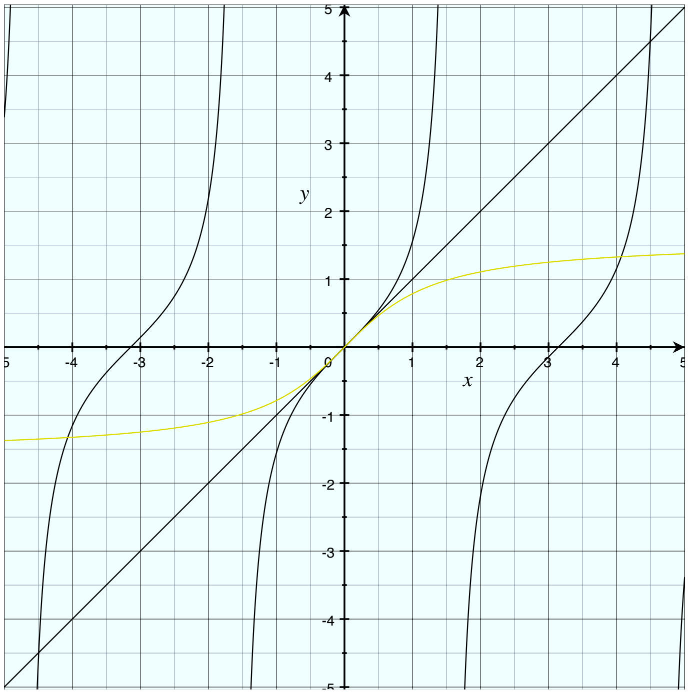


Figure. Graphe de la fonction Arc tan

Proposition.
(a) Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\operatorname{Arc}\tan(\tan x) = x$.
(b) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\tan(\operatorname{Arc}\tan y) = y$.
(c) La fonction Arc tan est impaire.
(d) La fonction Arc tan est continue et dérivable, avec $(\operatorname{Arc}\tan)'(y) = \frac{1}{1+y^2}$.
(e) La fonction Arc tan est strictement croissante.
(f) $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{Arc}\tan y = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arc}\tan y = 1$.
(g) La fonction Arc cos est bijective de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$.

Exercice (TD). $\operatorname{Arc}\tan x + \operatorname{Arc}\tan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Université d'Orléans
UFR Sciences
Département de Mathématiques

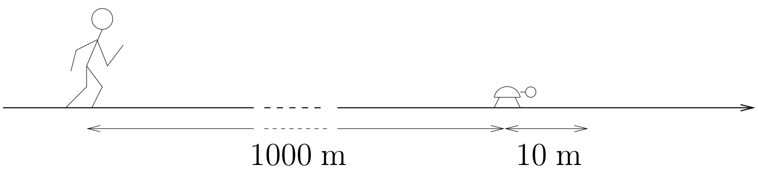
Licence 1 – Semestre 1
Tronc commun Maths – Info
Automne 2010

SLO1MA12 – Introduction au raisonnement mathématique 2 – Analyse

Chapitre 2. Ordre sur $\mathbb{R}$

§ 1. Introduction

Commençons par le paradoxe de Zénon d'Elée (philosophe grec, Vème siècle av. J.–C.). Achille poursuit une tortue. Pour simplifier supposons que
- Achille et la tortue suivent un mouvement rectiligne uniforme,
- Achille coure 100 fois plus vite que la tortue,
- au départ, la tortue ait 1000 mètres d'avance sur Achille.



- Pendant qu'Achille parcourt les 1000 mètres le séparant de la tortue, la tortue parcourt 10 mètres,
- pendant qu'Achille parcourt les 10 mètres restants, la tortue parcourt 0,1 mètres,
- pendant qu'Achille parcourt les 0,1 mètres restants, la tortue parcourt 0,001 mètres,
- etc ...

Avec ce raisonnement, il semble qu'Achille ne rattrape jamais la tortue, contrairement à la réalité. La notion de limite, formalisée aux XVIIIème et XIXème siècles, a permis de lever ce type de paradoxe. Un nombre fini d'étapes ne permet pas à Achille de rattraper la tortue. Il faut passer à l'infini pour obtenir le point de dépassement, qu'on calculera au chapitre 3 :

$$10^3 + 10 + 10^{-1} + 10^{-3} + \ldots = 10^3 \sum_{n=0}^{+\infty} 10^{-2n} = 10^3 \frac{1}{1-10^{-2}} = \frac{100\,000}{99}.$$

La notion de limite est basée sur les propriétés de $\mathbb{R}$ qui font l'objet de ce chapitre. Il s'agit d'une étape difficile mais indispensable pour définir et manipuler rigoureusement les limites. N'oublions pas qu'il a fallu une vingtaine de siècles pour élaborer les concepts nécessaires.

§ 2. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Il existe un *ordre* sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, qu'on note $x \leq y$ ou $y \geq x$ et qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) *Réflexivité* : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \leq x$.
(ii) *Antisymétrie* : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, les conditions $x \leq y$ et $x \geq y$ équivalent à $x = y$.
(iii) *Transitivité* : pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, les conditions $x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$.
(iv) *Totalité* : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leq y$ ou $x \geq y$.
(v) *Compatibilité avec l'addition* : pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, la condition $x \leq y$ équivaut à $x+z \leq y+z$.
(vi) *Compatibilité avec la multiplication* : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout $z \in \mathbb{R}^{+*}$, la condition $x \leq y$ équivaut à $xz \leq yz$.

Remarques :

- La notation $x<y$ signifie que $x\leq y$ et $x\neq y$. De même $x>y$ signifie que $x\geq y$ et $x\neq y$.
- Une *relation d'ordre* peut être définie sur un ensemble quelconque par les conditions (i), (ii), (iii). L'ordre est *total* s'il vérifie (iv).
- Par exemple, l'inclusion définit un ordre non total sur l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties d'un ensemble X. Plus précisément, si A et B sont deux parties d'un ensemble X, on pose
$$A\leq B \quad\Longleftrightarrow\quad A\subseteq B\,.$$
On obtient ainsi une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(X)$, qui est non totale dès que X possède au moins deux élements. Les amateurs d'abstraction peuvent étudier, à titre d'exercice, la compatibilité de cet ordre avec la réunion et avec l'intersection.
- On peut montrer qu'il n'existe aucun ordre total sur $\mathbb{C}$ qui soit compatible avec l'addition et avec la multiplication. On considère donc rarement une relation d'ordre sur $\mathbb{C}$.

Proposition 1 (quelques propriétés de base).
(a) Pour tout $x,y\in\mathbb{R}$, on a $x\leq y$ si et seulement si $-x\geq -y$.
(b) Pour tout $x,y\in\mathbb{R}^*$, on a $x\leq y$ si et seulement si $x^{-1}\geq y^{-1}$.
(c) Pour tout $x,y,x',y'\in\mathbb{R}$, les conditions $x\leq y$ et $x'\leq y'$ impliquent $x+x'\leq y+y'$.
(d) Pour tout $x,y,x',y'\in\mathbb{R}^+$, les conditions $x\leq y$ et $x'\leq y'$ impliquent $xx'\leq yy'$.

Démonstration.
(a) L'équivalence entre les inégalités $x\leq y$ et $-x\geq -y$ s'obtient par addition ou soustration de $x+y$.
(b) De même, l'équivalence entre les inégalités $x\leq y$ et $x^{-1}\geq y^{-1}$ s'obtient par multiplication ou division par xy.
(c) On a $x+x'\leq y+x'\leq y+y'$.
(d) De même, $xx'\leq yx'\leq yy'$. □

Attention : Les conditions $0<x\leq y$ et $0<x'\leq y'$ n'impliquent pas $x^{x'}\leq y^{y'}$. Il suffit de prendre par exemple $x=y=\frac{1}{2}$, $x'=1$, $y'=2$.

Proposition 2 (inégalité triangulaire). Pour tout $x,y\in\mathbb{R}$, on a
$$\boxed{\big||x|-|y|\big|\leq|x\pm y|\leq|x|+|y|}$$

Démonstration. D'une part, $x+y\leq|x|+|y|$. D'autre part, $-x-y\leq|x|+|y|$. On en déduit que
$$|\,x+y\,|\leq|x|+|y|.$$
En utilisant cette inégalité, on obtient
$$|x|=|x+y+(-y)|\leq|x+y|+|-y|=|x+y|+|y|,$$
d'où $|x|-|y|\leq|x+y|$. En échangeant x et y, on obtient de même $|y|-|x|\leq|x+y|$. On en déduit que
$$\big||x|-|y|\big|\leq|x+y|.$$
En résumé, on a démontré que
$$\big||x|-|y|\big|\leq|x+y|\leq|x|+|y|.$$
En remplaçant y par $-y$, on obtient
$$\big||x|-|y|\big|\leq|x-y|\leq|x|+|y|.$$
Ceci conclut la démonstration de la proposition 2. □

§ 3. Majorant et minorant, maximum et minimum, borne supérieure et borne inférieure

Définition. Un nombre $x\in\mathbb{R}$ est un *majorant* d'une partie $A\subset\mathbb{R}$ si,

$$\forall\, a\in A,\ a\leq x. \tag{1}$$

Une partie A de $\mathbb{R}$ est *majorée* si elle possède un majorant, c'est–à–dire

$$\exists\, x\in\mathbb{R},\ \forall\, a\in A,\ a\leq x.$$

Remarques.

- De même, $x\in\mathbb{R}$ est un *minorant* de $A\subset\mathbb{R}$ si, pour tout $a\in A$, on a $a\geq x$. Une partie $A\subset\mathbb{R}$ est *minorée* si elle possède un minorant.
- L'ensemble des majorants d'une partie A de $\mathbb{R}$ est soit vide, soit infini. En effet, si A est majorée par x, alors A est majorée par tout $y\in[x,+\infty[$. De même pour l'ensemble des minorants de A.

Proposition – Définition 3. Les conditions suivantes sont équivalentes, pour une partie $A\subset\mathbb{R}$:
(a) A est à la fois majorée et minorée,
(b) $\exists\, C\geq 0,\ \forall\, a\in A,\ |a|\leq C$.
Dans ce cas, on dit que A est *bornée*.

Démonstration.
(a) $\Longrightarrow$ (b) : Si M majore A et m minore A, alors $C=\max\{|m|,|M|\}$ fait l'affaire.
(b) $\Longrightarrow$ (a) : C majore A et $-C$ minore A. □

Définition. Un nombre $M\in\mathbb{R}$ est un *maximum* d'une partie $A\subset\mathbb{R}$ si

$$\begin{cases} (1) \quad \forall\, a\in A,\ a\leq M \quad (M \text{ est un majorant de } A),\\ (2) \quad M\in A.\end{cases}$$

Proposition 4 (unicité du maximum). Si une partie $A\subset\mathbb{R}$ possède un maximum, il est unique.

Démonstration. Soient M et M' des maxima de A. D'une part, comme M est un majorant de A et que $M'\in A$, on a $M\geq M'$. D'autre part, comme M' est un majorant de A et que $M\in A$, on a $M'\geq M$. En conclusion, $M=M'$. □

Remarque. De même, $m\in\mathbb{R}$ est un *minimum* de $A\subset\mathbb{R}$ si

$$\begin{cases} \forall\, a\in A,\ a\geq m \quad (m \text{ est un minorant de } A)\\ m\in A\end{cases}$$

et, dans ce cas, il est unique.

Notation. S'ils existent, le maximum d'une partie $A\subset\mathbb{R}$ est noté $\max A$ et son minimum $\min A$.

Définition. Un nombre $S\in\mathbb{R}$ est une *borne supérieure* d'une partie $A\subset\mathbb{R}$ si

$$\begin{cases} (1) \quad \forall\, a\in A,\ a\leq S \quad (S \text{ est un majorant de } A),\\ (3) \quad \forall\, x \text{ majorant de A},\ x\geq S.\end{cases}$$

Axiome de la borne supérieure :

$$\boxed{\text{Dans } \mathbb{R}, \text{ toute partie non vide et majorée possède une borne supérieure}}$$

Remarque. L'axiome de la borne supérieure constitue la différence topologique essentielle entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$.

Proposition 5 (unicité de la borne supérieure). Dans $\mathbb{R}$, une partie A non vide et majorée possède une unique borne supérieure.

Démonstration. Soient S et S' des bornes supérieures de A. D'une part, comme S' est un majorant de A, on a $S' \geq S$. D'autre part, comme S est un majorant de A, on a $S \geq S'$. En conclusion, $S = S'$. $\square$

Remarques : Soit A une partie non vide et majorée dans $\mathbb{R}$.
- La borne supérieure de A est notée $\sup A$.
- C'est le plus petit majorant de A.
- L'ensemble des majorants de A est l'intervalle $[\sup A, +\infty[$.

Proposition 6. Si $A \subset \mathbb{R}$ possède un maximum, alors $\max A = \sup A$.

Démonstration. Le maximum M de A est caractérisé par les conditions (1) et (2). Montrons que M satisfait la condition (3). Soit x un majorant de A. Alors $x \geq M$ car $M \in A$. $\square$

Proposition 7 (deuxième caractérisation de la borne supérieure). Soient A une partie non vide et majorée dans $\mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$. Alors $S = \sup A$ si et seulement si

$$\begin{cases} (1) \quad \forall\, a \in A,\ a \leq S \quad (S \text{ est un majorant de } A), \\ (4) \quad \forall\, x < S,\ \exists\, a \in A,\ a > x. \end{cases}$$

Démonstration. Les conditions suivantes sont clairement équivalentes :
non (3) : $\exists\, x$ majorant de A, $x < S$,
non (4) : $\exists\, x < S$, $\forall\, a \in A$, $a \leq x$. $\square$

Remarques.
- Au chapitre suivant, nous verrons une troisième caractérisation de la borne supérieure au moyen des suites. En résumé, soit A une partie non vide et majorée dans $\mathbb{R}$. Alors A possède une borne supérieure S, qui est unique et qui admet les trois caractérisations suivantes :

(1) $\forall\, a \in A,\ a \leq S$ (S est un majorant de A) (3) $\forall\, x$ majorant de A, $x \geq S$
(1) $\forall\, a \in A,\ a \leq S$ (S est un majorant de A) (4) $\forall\, x < S,\ \exists\, a \in A,\ a > x$
(1) $\forall\, a \in A,\ a \leq S$ (S est un majorant de A) (5) S est limite d'une suite dans A

- De même, tout partie A non vide et minorée dans $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure
  - qui est unique et qu'on note $\inf A$,
  - qui admet trois caractérisations,
  - qui coïncide avec le minimum de A, lorqu'il existe.

Exemple : intervalle borné

	[a,b]	]a,b[	]a,b]	[a,b[
max	b		b	
min	a			a
sup	b	a	b	a
inf	b	a	b	a

§ 4. Compléments

- $\mathbb{R}$ est *archimédien*, ce qui se traduit par les conditions équivalentes suivantes :
  - $\mathbb{N}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$,
  - $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} < \varepsilon$.
- $\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$
  c'est–à–dire, entre deux nombres réels distincts, il existe toujours un nombre rationnel.
- Dans $\mathbb{R}$, les ensembles convexes sont les intervalles
  - bornés $[a,b],\ ]a,b[,\ [a,b[,\ ]a,b]$,
  - non bornés $[a,+\infty],\ ]a,+\infty],\ ]-\infty,b],\ ]-\infty,b[,\ ]-\infty,+\infty[$.

  Rappelons qu'un ensemble A est *convexe* si
  $$\forall\, x,y \in A,\ \forall\, t \in [0,1],\ (1-t)x + ty \in A\,.$$

Université d'Orléans
UFR Sciences
Département de Mathématiques

Licence 1 – Semestre 1
Tronc commun Maths – Info
Automne 2010

SLO1MA12 – Introduction au raisonnement mathématique 2 – Analyse

Chapitre 3. Suites

§ 1. Généralités, exemples classiques

Définition et notations. Une *suite réelle* est une fonction

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n \end{aligned}$$

On la note $(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n=0}^{+\infty}$ ou plus simplement (u_n).

Remarque. Certaines suites sont définies à partir d'un *rang* N. On utilise dans ce cas la notation $(u_n)_{n\geq N}$ ou $(u_n)_{n=N}^{+\infty}$.

Exemples.
- La suite $u_n = \frac{1}{n}$ est définie pour $n \geq 1$.
- La suite $u_n = \frac{1}{\ln n}$ est définie pour $n \geq 2$.

Définitions. Une suite (u_n) est dite
- *croissante* si, $\forall\, n$, $u_n \leq u_{n+1}$,
- *strictement croissante* si, $\forall\, n$, $u_n < u_{n+1}$,
- *décroissante* si, $\forall\, n$, $u_n \geq u_{n+1}$,
- *strictement décroissante* si, $\forall\, n$, $u_n > u_{n+1}$,
- *monotone* si (u_n) est croissante ou décroissante,
- *strictement monotone* si (u_n) est strictement croissante ou strictement décroissante,
- *majorée* si $\exists\, M \in \mathbb{R}$, $\forall\, n$, $u_n \leq M$,
- *minorée* si $\exists\, m \in \mathbb{R}$, $\forall\, n$, $u_n \geq m$,
- *bornée* si (u_n) est majorée et minorée.

Lemme 1. Une suite (u_n) est bornée si et seulement si

$$\exists\, C \geq 0,\ \forall\, n,\ |u_n| \leq C.$$

Démonstration. Comme pour les parties bornées de $\mathbb{R}$. □

Nous concluons ce paragraphe avec des exemples classiques de suites définies par récurrence.

Exemple 1 : suites *arithmétiques*
Etant donné $a, b \in \mathbb{R}$, considérons la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = b, \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + a. \end{cases}$$

Le nombre a est appelé la *raison* de la suite arithmétique (u_n). On a $u_1 = u_0 + a = b + a$, $u_2 = u_1 + a = b + 2a$, $\ldots$ et on montre par récurrence que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_n = an + b}$$

Dans le cas particulier où $a = 1$ et $b = 0$, considérons la suite des sommes

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 0 + 1 + 2 + \ldots + n\,.$$

On montre (directement ou par récurrence) que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{s_n = \tfrac{n(n+1)}{2}}$$

Exemple 2 : suites *géométriques*

Etant donné $a, b \in \mathbb{R}$, considérons la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = b, \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a u_n. \end{cases}$$

Le nombre a est appelé la *raison* de la suite géométrique (u_n). On a $u_1 = a u_0 = ab$, $u_2 = a u_1 = a^2 b$, $\dots$ et on montre par récurrence que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_n = b\, a^n}$$

Dans le cas particulier où $b = 1$, considérons la suite des sommes

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n.$$

On montre (directement ou par récurrence) que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{s_n = \begin{cases} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} & \text{si } a \neq 1 \\ n+1 & \text{si } a = 1 \end{cases}}$$

Exemple 3 : suites de Fibonacci (Léonard de Pise, mathématicien italien, 1175–1250 environ)

La première suite de Fibonacci est définie par

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1, \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n. \end{cases}$$

On calcule facilement les premiers termes de cette suite :

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, \ldots$

On montre par récurrence que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

(1) $$\boxed{u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}$$

Il est remarquable que cette formule donne toujours un nombre entier. La seconde suite de Fibonacci est définie par

(2) $$\begin{cases} v_1 = 1, \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}. \end{cases}$$

On calcule facilement les premiers termes de cette suite :

$1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}, \frac{233}{144}, \frac{377}{233}, \frac{610}{377}, \frac{987}{610}, \frac{1597}{987}, \frac{2584}{1597}, \frac{4181}{2584}, \frac{6765}{4181}, \frac{10946}{6765}, \frac{17711}{10946}, \frac{28657}{17711}, \frac{46368}{28657}, \ldots$

On montre par récurrence que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

(3) $$\boxed{v_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}}$$

et on verra au paragraphe 4 que la suite (v_n) converge vers le *nombre d'or* $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}62$.

§ 2. Limites finies

Définition. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que (u_n) *converge* vers ℓ ou que ℓ est *limite* de (u_n) si

(4) $$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |u_n - \ell\,| < \varepsilon}$$

On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ ou $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et on omet souvent "$n \to +\infty$".

Remarques.

- On raccourcit souvent la condition (4) comme suit :
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N,\ \forall\, n \geq N,\ |u_n - \ell\,| < \varepsilon.$$
- Dans cette condition, on peut remplacer $n \geq N$ par $n > N$, et $|u_n - \ell\,| < \varepsilon$ par $|u_n - \ell\,| \leq \varepsilon$.

Exemples :

- La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{+\infty}$ converge vers 0.
  Soient $\varepsilon>0$ et N un entier $>\frac{1}{\varepsilon}$, par exemple $N=E(\frac{1}{\varepsilon})+1$. Alors, $\forall\, n\geq N$, on a $n\geq N>\frac{1}{\varepsilon}$, d'où $|\frac{1}{n}-0|=\frac{1}{n}<\varepsilon$.
- La suite $\big((-1)^n\big)_{n=0}^{+\infty}$ ne converge pas.
  Montrons que
  $$\forall\, \ell\in\mathbb{R},\ \exists\, \varepsilon>0,\ \forall\, N\in\mathbb{N},\ \exists\, n\geq N,\ |(-1)^n-\ell\,|\geq\varepsilon\,.$$
  Soient $\ell\in\mathbb{R}$, $\varepsilon=1$ et $N\in\mathbb{N}$.
  - Si $\ell\geq 0$, on considère un entier impair $n\geq N$. Alors $|(-1)^n-\ell\,|=|-1-\ell\,|=1+\ell\geq 1$.
  - Si $\ell\leq 0$, on considère un entier impair $n\geq N$. Alors $|(-1)^n-\ell\,|=|1-\ell\,|=1-\ell\geq 1$.

Lemme 2 (unicité de la limite). Toute suite convergente possède une limite unique.

Démonstration. Supposons que (u_n) converge vers ℓ et vers ℓ'. Soit $\varepsilon>0$. D'une part,
$$\exists\, N,\ \forall\, n\geq N,\ |u_n-\ell\,|<\tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$
D'autre part,
$$\exists\, N',\ \forall\, n\geq N',\ |u_n-\ell'\,|<\tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$
Soit $n=\max\{N,N'\}$. Alors
$$|\,\ell-\ell'|=|(\ell-u_n)+(u_n-\ell')|\leq|\,\ell-u_n|+|u_n-\ell'|<\tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,.$$
En résumé, on a montré que
$$\forall\,\varepsilon>0\,,\ |\,\ell-\ell'|<\varepsilon\,,$$
ce qui équivaut à $\ell=\ell'$. □

Proposition 3. Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. En prenant $\varepsilon=1$ dans (4), on obtient l'existence d'un entier N tel que, pour tout $n\geq N$, $|u_n-\ell\,|<1$. D'où

(5) $$|u_n|=|(u_n-\ell)+\ell\,|\leq|u_n-\ell\,|+|\ell|\leq 1+|\ell|\,.$$

La suite (u_n) est donc bornée par $1+|\ell|$ à partir du rang N. Afin de borner toute la suite, on considère
$$C=\max\{\,|u_0|,|u_1|,\,\dots,|u_{N-1}|,1+|\ell|\,\}\,.$$
D'une part, si $n<N$, on a évidemment $|u_n|\leq C$. D'autre part, si $n\geq N$, on a $|u_n|\leq 1+|\ell|\leq C$, d'après (5). □

Remarque. La réciproque est fausse. Par exemple, la suite $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, mais elle ne converge pas.

Proposition 4 (opérations sur les limites finies).

- *Somme* :
  Si (u_n) converge vers ℓ et si (u'_n) converge vers ℓ', alors $(u_n+u'_n)$ converge vers $\ell+\ell'$.
- ◦ *Différence* :
  Si (u_n) converge vers ℓ et si (u'_n) converge vers ℓ', alors $(u_n-u'_n)$ converge vers $\ell-\ell'$.
- *Produit* :
  Si (u_n) converge vers ℓ et si (u'_n) converge vers ℓ', alors $(u_n u'_n)$ converge vers $\ell\,\ell'$.
- ◦ *Multiplication scalaire* :
  Si (u_n) converge vers ℓ et si $c\in\mathbb{R}$, alors $(c\,u_n)$ converge vers $c\,\ell$.
- *Quotient* :
  Si (u_n) converge vers ℓ et si (u'_n) converge vers $\ell'\neq 0$, alors $\left(\frac{u_n}{u'_n}\right)$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.
- ◦ *Inverse* :
  Si (u_n) converge vers $\ell\neq 0$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.

Démonstration pour la somme :
Soit $\varepsilon>0$. D'une part, comme (u_n) converge vers ℓ,
$$\exists\, N,\ \forall n\geq N,\ |u_n-\ell\,|<\tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$
D'autre part, comme (u'_n) converge vers ℓ',
$$\exists\, N',\ \forall n\geq N',\ |u'_n-\ell'|<\tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$
Alors, pour tout $n\geq \max\{N,N'\}$, on a
$$|(u_n+u'_n)-(\ell+\ell')|=|(u_n-\ell)+(u'_n-\ell')|\leq |u_n-\ell\,|+|u'_n-\ell'|<\tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$ □

Démonstration pour le produit :
D'après la proposition 3, les suites (u_n) et (u'_n) sont bornées :
$$\exists\, C>0,\ \forall n,\ |u_n|\leq C\ \text{ et }\ |u'_n|\leq C.$$
Soit $\varepsilon>0$. Posons $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{C+|\ell|}$. D'une part, comme (u_n) converge vers ℓ,
$$\exists\, N,\ \forall n\geq N,\ |u_n-\ell\,|<\varepsilon'.$$
D'autre part, comme (u'_n) converge vers ℓ',
$$\exists\, N',\ \forall n\geq N',\ |u'_n-\ell'|<\varepsilon'.$$
Alors, pour tout $n\geq \max\{N,N'\}$, on a
$$\begin{aligned}|u_nu'_n-\ell\,\ell')|&=|(u_n-\ell)u'_n+\ell\,(u'_n-\ell')|\leq |u_n-\ell\,|\,|u'_n|+|\ell|\,|u'_n-\ell'|\\&\leq \varepsilon' C+|\ell|\,\varepsilon'=(C+|\ell|)\,\varepsilon'=\varepsilon\,.\end{aligned}$$
□

Démonstration pour l'inverse :
Par hypothèse,
$$(6)\qquad \forall\,\delta>0,\ \exists\, N,\ \forall\, n\geq N,\ |u_n-\ell\,|\leq\delta.$$
En prenant $\delta=\frac{|\ell|}{2}$ dans (6), on minore à partir d'un rang M
$$|u_n|=|\,\ell+(u_n-\ell)|\geq|\ell|-|u_n-\ell\,|>|\ell|-\tfrac{|\ell|}{2}=\tfrac{|\ell|}{2},$$
ce qui implique en particulier $u_n\neq 0$. Soit $\varepsilon>0$. En prenant $\delta=\frac{\varepsilon}{|\ell|}$ dans (4), on obtient l'existence d'un rang N, qu'on peut supposer $\geq M$, à partir duquel
$$\left|\tfrac{1}{u_n}-\tfrac{1}{\ell}\right|=\tfrac{|\,\ell-u_n|}{|u_n||\ell|}<\tfrac{2\,\delta}{\ell^2}=\varepsilon.$$ □

Exercices :
- Si (u_n) converge vers 0 et si (v_n) est bornée, alors (u_nv_n) converge vers 0.
- Si (u_n) converge vers ℓ, alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.
- Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que, $\forall\, n,\ u_n\leq v_n$. Alors $\lim u_n\leq\lim v_n$.

Poursuivons avec des critères de convergence.

Proposition 5 (critère d'encadrement ou des gendarmes). Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que
$$\forall\, n,\ \ u_n\leq v_n\leq w_n.$$
Supposons que (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ. Alors (v_n) converge également vers ℓ.

Démonstration. Soit $\varepsilon>0$. D'une part, comme (u_n) converge vers ℓ,
$$\exists\, M,\ \forall n\geq M,\ |u_n-\ell\,|<\varepsilon.$$
D'autre part, comme (w_n) converge vers ℓ,
$$\exists\, N,\ \forall n\geq N,\ |w_n-\ell\,|<\varepsilon.$$
Alors, pour tout $n\geq\max\{M,N\}$, on a
$$-\varepsilon<u_n-\ell\leq v_n-\ell\leq w_n-\ell<\varepsilon\,,$$
d'où $|v_n-\ell\,|<\varepsilon$. □

Théorème 6 (critère de convergence monotone). Toute suite monotone bornée converge. Plus précisément,
- si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) converge vers $\sup u_n$,
- si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) converge vers $\inf u_n$.

Démonstration. Soit (u_n) une suite croissante et majorée. L'ensemble $A = \{u_n\}$ des valeurs prises par la suite est une partie non vide et majorée dans $\mathbb{R}$. D'après l'axiome de la borne supérieure, A possède une borne supérieure s. Montrons que la suite (u_n) converge vers s. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la deuxième caractérisation de la borne supérieure (proposition 7 du chapitre 2), il existe un entier N tel que $u_N > s - \varepsilon$. Soit $n \geq N$. D'une part, comme la suite (u_n) est croissante, on a $u_n \geq u_N > s - \varepsilon$. D'autre part, comme la suite (u_n) est majorée par s, on a $u_n \leq s$. En conclusion, $|u_n - s| < \varepsilon$. □

Exercice (rédaction de démonstration). Montrer de même qu'une suite (u_n) décroissante et minorée converge vers la borne inférieure de $\{u_n\}$.

Proposition 7 (critère des suites adjacentes). Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que
- (u_n) est croissante,
- (v_n) est décroissante,
- $\forall n,\ u_n \leq v_n$,
- $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

Alors (u_n) et (v_n) convergent vers $\ell = \sup u_n = \inf v_n$.

Démonstration. Pour commencer, observons que
$$\forall n, \forall n',\ u_n \leq v_{n'}.$$
En effet, si $n \leq n'$, on a $u_n \leq u_{n'} \leq v_{n'}$ et, si $n' \geq n$, on a $u_{n'} \leq v_{n'} \leq v_n$. La suite (u_n) est croissante et majorée par tous les termes de la suite (v_n). De même, la suite (v_n) est décroissante et minorée par tous les termes de la suite (u_n). D'après le théorème 6, (u_n) converge vers $a = \sup u_n$ et (v_n) converge vers $b = \inf v_n$. De plus, pour tout n,
$$0 \leq b - a \leq v_n - u_n.$$
Comme $(v_n - u_n)$ converge vers 0, on en déduit que $a = b$. □

Concluons avec la troisième caractérisation de la borne supérieure, annoncée au chapitre 2.

Proposition 8. Soient A une partie non vide majorée dans $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors $x = \sup A$ si et seulement si
$$\begin{cases} \forall\, a \in A,\ a \leq x \quad (x \text{ est un majorant de } A), \\ x \text{ est limite d'une suite } a_n \in A. \end{cases}$$

Démonstration. Supposons que x est un majorant de A et montrons l'équivalence entre les deux conditions suivantes :
(7) $\forall\, y < x,\ \exists\, a \in A,\ a > y$,
(8) x est limite d'une suite $a_n \in A$.
(8) $\Longrightarrow$ (7) : Par hypothèse,
(9) $$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N,\ \forall\, n \geq N,\ |a_n - x| < \varepsilon.$$
Soit $y < x$. En prenant $\varepsilon = x - y$ dans (9), on obtient l'existence d'un rang N à partir duquel $a_n \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$. En particulier, $a = a_N \in A$ satisfait $a > x - \varepsilon = y$.
(7) $\Longrightarrow$ (8) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En prenant $y = x - \frac{1}{n}$ dans (7), on obtient l'existence de $a_n \in A$ tel que $a_n > x - \frac{1}{n}$. Comme A est majorée par x, on a en fait un encadrement
$$x - \tfrac{1}{n} < a_n \leq x.$$
On obtient ainsi une suite (a_n) dans A qui converge vers x. □

§ 3. Limites infinies

Définition. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell\in\mathbb{R}$.
On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge* vers $+\infty$ si

$$\boxed{\forall\, C\in\mathbb{R},\ \exists\, N\in\mathbb{N},\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ n\geq N \implies u_n\geq C} \tag{10}$$

On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et on omet souvent "$n\to+\infty$".

Remarques.
- On raccourcit souvent la condition (10) comme suit :
$$\forall\, C\in\mathbb{R},\ \exists\, N,\ \forall\, n\geq N,\ u_n\geq C\,.$$
- Dans cette condition, on peut supposer C positif et on peut remplacer les inégalités au sens large par des inégalités strictes.
- Symétriquement, (u_n) *diverge* vers $-\infty$ si
$$\forall\, C\in\mathbb{R},\ \exists\, N,\ \forall\, n\geq N,\ u_n\leq C\,.$$
- Une suite divergente n'est pas bornée. Mais la réciproque est fausse. Par exemple, la suite $u_n=(-2)^n$ n'est ni bornée, ni divergente.

Exemple. Considérons un polynôme $p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{k-1}x^{k-1}+a_kx^k$ de degré $k\in\mathbb{N}^*$. Alors

$$p(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } a_k>0\,,\\ -\infty & \text{si } a_k<0\,.\end{cases}$$

Cela résulte de la factorisation

$$p(n) = n^k(a_0\,n^{-k}+a_1n^{1-k}+\ldots+a_{k-1}n^{-1}+a_k)$$

et de la règle suivante pour le produit.

Proposition 9 (opérations sur les limites infinies).
- *Somme* : Si $u_n\to+\infty$ et si $v_n\to\ell\in\,]-\infty,+\infty]$, alors $u_n+v_n\to+\infty$.
- *Produit* : Si $u_n\to+\infty$ et si $v_n\to\ell\in[-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty]$, alors
$$u_n\,v_n \to \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell>0\,,\\ -\infty & \text{si } \ell<0\,.\end{cases}$$
- *Inverse* : $u_n\to+\infty$ si et seulement si $u_n>0$ à partir d'un certain rang et $\frac{1}{u_n}\to 0$.

Remarque (limites indéterminées). On ne peut rien dire a priori
- de la somme u_n+v_n, si $u_n\to+\infty$ et $v_n\to-\infty$,
- du produit u_nv_n, si $u_n\to\pm\infty$ et $v_n\to 0$,
- du quotient $\frac{u_n}{v_n}$, si $u_n\to\pm\infty$ et $v_n\to\pm\infty$, ou si $u_n\to 0$ et $v_n\to 0$.

Lemme 10 (critère de comparaison). Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, $\forall\, n$, $u_n\geq v_n$. Si (v_n) diverge vers $+\infty$, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

§ 4. Retour sur les exemples

<u>**Suites arithmétiques :**</u> $u_n=an+b$, avec $a\in\mathbb{R}^*$ (pour simplifier) et $b\in\mathbb{R}$
- ○ $a>0$: $u_n\to+\infty$
- ○ $a<0$: $u_n\to-\infty$

<u>**Suites géométriques :**</u> $u_n=b\,a^n$, avec $a\in\mathbb{R}$ et $b=1$ (pour simplifier)
- ○ $a>1$: $u_n\to+\infty$
- ○ $a=1$: $u_n\equiv 1$
- ○ $|a|<1$: $u_n\to 0$
- ○ $a=-1$: (u_n) est bornée, non convergente, non divergente
- ○ $a<-1$: (u_n) est non bornée, non convergente, non divergente

Sommes géométriques : $s_n = 1 + a + \ldots + a^n = \begin{cases} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} & \text{si } a \neq 1 \\ n+1 & \text{si } a = 1 \end{cases}$

- $|a| < 1$: $s_n \to \frac{1}{1-a}$
- $a \geq 1$: $s_n \to +\infty$
- $a = -1$: (s_n) est bornée, non convergente, non divergente
- $a < -1$: (s_n) est non bornée, non convergente, non divergente

Remarque : Nous sommes maintenant en mesure de lever le paradoxe de Zénon d'Elée (voir introduction du chapitre 2). Dans le cas de la poursuite de la tortue par Achille, on a affaire aux sommes géométriques

$$s_n = 10^3 + 10 + 10^{-1} + \ldots + 10^{-(2n-3)} = 10^3\left(1 + 10^{-2} + \ldots + 10^{-2n}\right) = 10^3\,\frac{1-10^{-2n-2}}{1-10^{-2}},$$

qui convergent vers le point limite

$$\ell = \frac{10^3}{1-10^{-2}} = \frac{100\,000}{99} \simeq 1010{,}101010\ldots$$

où Achille rattrape la tortue.

Seconde suite de Fibonacci : (2) $\begin{cases} v_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}. \end{cases}$

Montrons que (v_n) converge vers le nombre d'or $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}62$. Observons au préalable que $\frac{1}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq 0{,}62$.

• **Méthode 1 :** On déduit de (3) et de (1) que

$$v_n = \frac{a^{n+1} + (-1)^n a^{-n-1}}{a^n + (-1)^{n+1} a^{-n}} = \frac{a + (-1)^n a^{-2n-1}}{1 + (-1)^{n+1} a^{-2n}}$$

converge vers a.

• **Méthode 2 :** A partir de la formule de récurrence (2), on montre que les suites $(v_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis on calcule leur limite commune.

◦ Montrons par récurrence que,

(10) $$\forall n \geq 2,\ \tfrac{3}{2} \leq v_n \leq 2.$$

Initialisation : $v_2 = 2$ vérifie $\frac{3}{2} \leq v_2 \leq 2$.
Hérédité : Supposons $\frac{3}{2} \leq v_n \leq 2$. Alors $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{v_n} \leq \frac{2}{3}$. Comme $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$, on en déduit $\frac{3}{2} \leq v_{n+1} \leq \frac{5}{3} \leq 2$.

◦ Montrons par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |v_{n+1} - v_n| \leq \left(\tfrac{2}{3}\right)^{2(n-1)}.$$

Initialisation : On a $v_2 - v_1 = 2 - 1 = 1$.
Hérédité : Supposons $|v_n - v_{n-1}| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{2(n-2)}$. D'après la formule de récurrence (2),

$$v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{1}{v_n} - 1 - \frac{1}{v_{n-1}} = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_{n-1}} = -\frac{v_n - v_{n-1}}{v_n\, v_{n-1}}.$$

En utilisant (10) et l'hypothèse de récurrence, on en déduit

$$|v_{n+1} - v_n| \leq \frac{1}{v_n\, v_{n-1}}\,|v_n - v_{n-1}| \leq \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \left(\tfrac{2}{3}\right)^{2(n-2)} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^{2(n-1)}.$$

◦ Montrons par récurrence que la suite $(v_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
Initialisation : $v_1 = 1$ est inférieur à $v_3 = \frac{3}{2}$.
Hérédité : Supposons $v_{2n-1} \leq v_{2n+1}$. En itérant la formule de récurrence (2), on obtient

$$v_{2n+3} - v_{2n+1} = -\frac{v_{2n+2} - v_{2n}}{v_{2n+2}\, v_{2n}} = \frac{v_{2n+1} - v_{2n-1}}{v_{2n+2}\, v_{2n+1}\, v_{2n}\, v_{2n-1}}.$$

Par hypothèse de récurrence, on en déduit $v_{2n+1} \leq v_{2n+3}$.
◦ On montre de même que la suite $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
◦ On montre de même que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n-1} \leq v_{2n}$.

En résumé, la suite $(v_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et la suite $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, avec

$$0 \leq v_{2n} - v_{2n-1} \leq \left(\tfrac{2}{3}\right)^{4(n-1)}.$$

Ce sont donc des suites adjacentes, qui convergent donc vers une même limite ℓ. Finalement, on évalue ℓ en faisant tendre $n \to +\infty$ dans la relation de récurrence (2). On obtient ainsi

$$\ell = 1 + \frac{1}{\ell} \quad \Longleftrightarrow \quad \ell^2 - \ell - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ell = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

D'après (10), on a $\frac{3}{2} \leq \ell \leq 2$, ce qui permet d'éliminer $\ell = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0{,}62$ et de conclure $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}62$.

Université d'Orléans
UFR Sciences
Département de Mathématiques

Licence 1 – Semestre 1
Tronc commun Maths – Info
Automne 2010

SLO1MA12 – Introduction au raisonnement mathématique 2 – Analyse

Chapitre 4. Continuité, dérivées

§ 1. Limites de fonctions

Limites finies

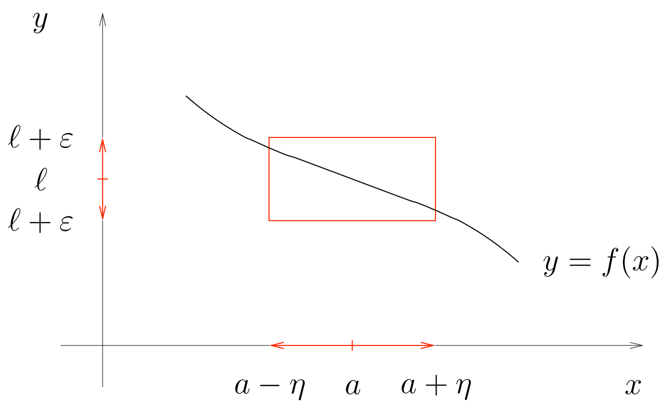
Soient I une partie de $\mathbb{R}$, par exemple un intervalle, a un point de I ou un point *frontière* de I, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I, à valeurs réelles, et $\ell \in \mathbb{R}$.

Définition. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a dans I si

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \eta > 0\,,\ \forall\, x \in I \cap \,]\,a-\eta, a+\eta\,[\,,\ f(x) \in \,]\,\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon\,[\,. \tag{1}$$

Remarques.

- En d'autres termes, pour toute *fenêtre verticale* $]\,\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon\,[$, il existe une *fenêtre horizontale* $]\,a-\eta, a+\eta\,[$ au–dessus de laquelle le graphe de f est contenu dans la *fenêtre rectangulaire* $]\,a-\eta, a+\eta\,[\, \times \,]\,\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon\,[$.



- Dans (1), on peut remplacer les intervalles ouverts $]a-\eta, a+\eta[$ et $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ par des intervalles quelconques centrés en a et en ℓ.

Notations. $\ell = \displaystyle\lim_{x\in I,\, x\to a} f(x)$

- Si a est un point intérieur d'un intervalle I, on note plus simplement $\ell = \displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$
- Si a est la borne inférieure d'un intervalle I, on note $\ell = \displaystyle\lim_{x \overset{\geq}{\to} a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$
- Si a est la borne supérieure d'un intervalle I, on note $\ell = \displaystyle\lim_{x \overset{\leq}{\to} a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$

Proposition 1. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(a) $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a dans I.
(b) Pour toute suite (x_n) convergeant vers a dans I, la suite image $y_n = f(x_n)$ converge vers ℓ.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) : Soient (x_n) une suite dans I qui converge vers a et $\varepsilon > 0$. Par hypothèse,

$$\exists\, \eta > 0\,,\ \forall\, x \in I \cap \,]\,a-\eta, a+\eta\,[\,,\ |\,f(x)-\ell\,| < \varepsilon\,.$$

Comme (x_n) converge vers a,

$$\exists\, N \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, n \geq N\,,\ |\,x_n - a\,| < \eta\,.$$

Par conséquent,

$$\forall\, n \geq N\,,\ |\,f(x_n)-\ell\,| < \varepsilon\,.$$

En conclusion, $f(x_n)$ converge vers ℓ.

Non (a) $\Rightarrow$ non (b) : Supposons que $f(x)$ ne tende pas vers ℓ lorsque x tend vers a dans I i.e.

$$\forall\, \eta>0\,,\ \exists\, x\in I\cap\,]\,a-\eta, a+\eta\,[\,,\ |\,f(x)-\ell\,| \geq \varepsilon\,.$$

En prenant $\eta=\frac{1}{n}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$, on obtient une suite (x_n) dans I telle que

$$|\,x_n-a\,| < \tfrac{1}{n} \quad \text{et} \quad |\,f(x_n)-\ell\,| \geq \varepsilon\,.$$

Ainsi x_n converge vers a mais $y_n=f(x_n)$ ne converge vers ℓ. $\square$

Les résultats suivants se déduisent des résultats correspondants pour les suites.

Corollaire 2. Unicité de la limite.

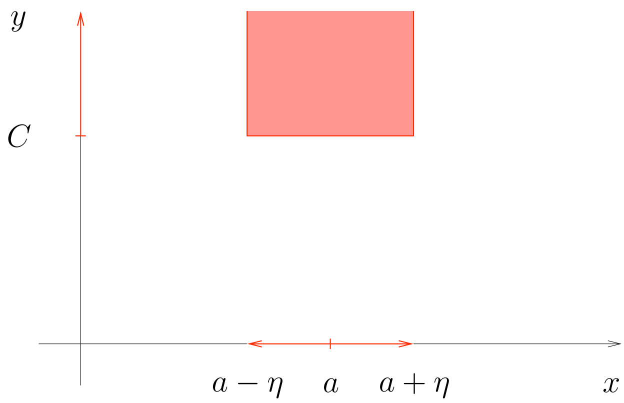
Corollaire 3. Opérations sur les limites :
(a) $\lim\,[\,f(x)+g(x)\,] = \lim f(x) + \lim g(x)$
(b) $\lim\,[\,f(x)\,g(x)\,] = [\lim f(x)\,]\,[\lim g(x)\,]$
(c) $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim\, g(x)}$ si $\lim g(x) \neq 0$

Limites infinies

Soient I une partie de $\mathbb{R}$, par exemple un intervalle, a un point *frontière* de I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I, à valeurs réelles.

Définition. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a dans I si

$$\forall\, C\in\mathbb{R}\,,\ \exists\, \eta>0\,,\ \forall\, x\in I\cap\,]\,a-\eta, a+\eta\,[\,,\ f(x)>C\,. \tag{2}$$



Proposition 4. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(a) $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a dans I.
(b) Pour toute suite (x_n) convergeant vers a dans I, la suite image $y_n=f(x_n)$ diverge vers $+\infty$.

Exercice. Définir de même $\lim\limits_{x\in I,\, x\to a} f(x) = -\infty$ et caractériser cette limite en terme de suites (énoncé et démonstration).

Remarque. Attention aux opérations sur les limites infinies.

Limites à l'infini

Soient I une partie non majorée de $\mathbb{R}$, par exemple un intervalle non majoré, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I, à valeurs réelles, et $\ell\in\mathbb{R}$.

Définition. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ dans I si

$$\forall\, \varepsilon>0\,,\ \exists\, C\in\mathbb{R}\,,\ \forall\, x\in I\cap\,]\,C, +\infty\,[\,,\ |\,f(x)-\ell\,| < \varepsilon\,. \tag{3}$$

Proposition 5. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(a) $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ dans I.
(b) Pour toute suite (x_n) convergeant vers $+\infty$ dans I, la suite image $y_n = f(x_n)$ converge vers ℓ.

Proposition 6. Si f est croissante et majorée, respectivement décroissante et minorée, alors $f(x)$ tend vers $\ell = \sup_{x\in I} f(x)$, respectivement $\ell = \inf_{x\in I} f(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$ dans I.

Exercice. Définir
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,,$$
et caractériser ces limites en terme de suites (énoncés sans démonstrations).

<u>Exemple important</u>

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors
(a) $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\,|\ln x\,|^{\beta} = 0$
(b) $\lim_{y\to+\infty} y^{-\alpha}\,(\ln y)^{\beta} = 0$
(c) $\lim_{z\to+\infty} e^{-\alpha z}\, z^{\beta} = 0$
Ces trois résultats sont équivalents. On passe de (a) à (b) en prenant $y = \frac{1}{x}$ c'est–à–dire $x = \frac{1}{y}$. On passe de (b) à (c) en prenant $z = \ln y$ c'est–à–dire $y = e^{z}$. De plus, en prenant une puissance adéquate, on peut se réduire au cas particulier $\alpha = 1$ ou $\beta = 1$.
On démontre (c) en étudiant la fonction $f(z) = e^{-\frac{\alpha}{2}z}\, z^{\beta}$ pour $z > 0$ grand. Sa dérivée
$$f'(z) = \left(-\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{\beta}{z}\right) e^{-\frac{\alpha}{2}z}\, z^{\beta}$$
s'annule en $z_0 = \frac{2\beta}{\alpha}$ et elle est négative pour $z > z_0$. On en déduit que f est décroissante sur $[z_0, +\infty[$ et en particulier que $f(z) \le f(z_0)$ pour tout $z \ge z_0$. Par conséquent,
$$e^{-\alpha z}\, z^{\beta} = e^{-\frac{\alpha}{2}z}\, f(z)$$
tend vers 0 lorsque $z \to +\infty$.

§ 2. Continuité

Cadre. Sauf mention contraire,
- I désignera une partie non vide de $\mathbb{R}$, par exemple un intervalle
- a un point de I,
- $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I, à valeurs réelles.

Définition. On dit que la fonction f est *continue* au point a si
$$f(a) = \lim_{x\in I,\, x\to a} f(x)\,.$$
- *Définition quantifiée* :
$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \eta > 0\,,\ \forall\, x \in I \cap\,]\,a-\eta, a+\eta\,[\,,\ |\,f(x) - f(a)\,| < \varepsilon\,. \tag{4}$$
- *Caractérisation en terme de suites* :
  Pour toute suite (x_n) convergeant vers a dans I, la suite image $y_n = f(x_n)$ converge vers $f(a)$.

Définition. On dit que la fonction f est *continue* sur I si f est continue en tout point $a \in I$
$\iff$ $\forall\, a \in I,\ f(a) = \lim_{x\in I,\, x\to a} f(x)\,,$
$\iff$ $\forall\, a \in I,\ \forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \eta > 0\,,\ \forall\, x \in I \cap\,]\,a-\eta, a+\eta\,[\,,\ |\,f(x) - f(a)\,| < \varepsilon\,,$ (5)
$\iff$ pour toute suite (x_n) convergente dans I, la suite $f(x_n)$ converge vers $f(\lim x_n)$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque. La dernière condition se résume par la formule
$$\boxed{f(\lim x_n) = \lim f(x_n)}$$

Exemple. A l'exception des fonctions

• *signe* $x \longmapsto \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0, \\ 0 & \text{si } x=0, \\ -1 & \text{si } x<0, \end{cases}$

• *partie entière* $x \longmapsto E(x)$,

• *partie fractionnaire* $x \longmapsto x-E(x)$,

toutes les fonctions classiques sont continues sur leur ensemble de définition.

Proposition 7. Soient f et g des fonctions continues sur I. Alors,

(a) La somme de deux fonctions continues est continue. Plus précisément, si f et g sont continues sur I, alors $f+g$ est continue sur I.

(b) Le produit de deux fonctions continues est continue. Plus précisément, si f et g sont continues sur I, alors fg est continue sur I.

(c) Le quotient de deux fonctions continues est continu. Plus précisément, si f et g sont continues sur I, et si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I,

(d) La composition deux fonctions continues est continue. Plus précisément, si f est continue sur I, si g est continue sur J, et si $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Démonstration de (d). Soit (x_n) une suite convergente dans I, dont la limite est notée a. Par continuité de f, la suite $y_n = f(x_n)$ converge vers $b = f(a)$ dans J. Par continuité de g, la suite $z_n = g(y_n)$ converge vers $c = g(b)$ dans $\mathbb{R}$. En conclusion, $z_n = (g \circ f)(x_n)$ converge vers $c = (g \circ f)(a)$. $\square$

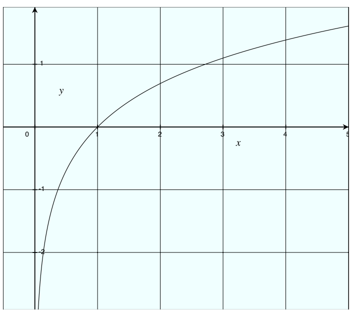
Remarque. On a également une version ponctuelle de la proposition précédente.

Prolongement par continuité. Considérons une fonction f continue sur un intervalle I de la forme $]a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,+\infty[$. Si $f(x)$ tend vers une limite finie ℓ lorsque $x \in I$ tend vers a, alors

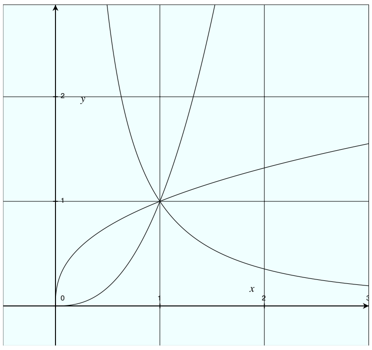
$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \tag{6}$$

est une fonction continue sur l'intervalle $I \cup \{a\}$. On prolonge ainsi f par continuité au point a.

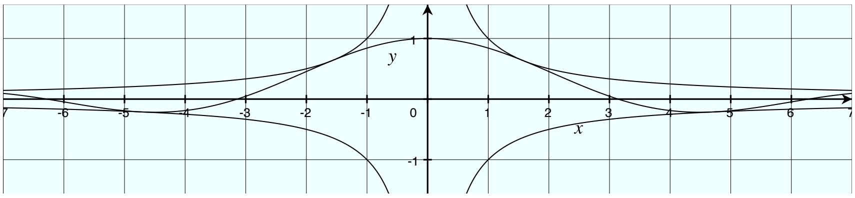
Exemple. La fonction $x \longmapsto \ln x$ est définie sur $]0,+\infty[$.
Elle ne se prolonge pas par continuité en $x=0$.



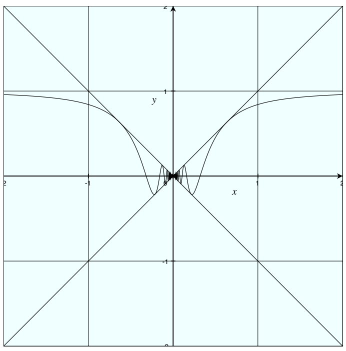
Exemple. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. La fonction $x \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ est définie sur $]0,+\infty[$.
- Si $\alpha > 0$, elle se prolonge par continuité en posant $0 \longmapsto 0$.
- Si $\alpha < 0$, elle ne se prolonge pas par continuité en $x = 0$.



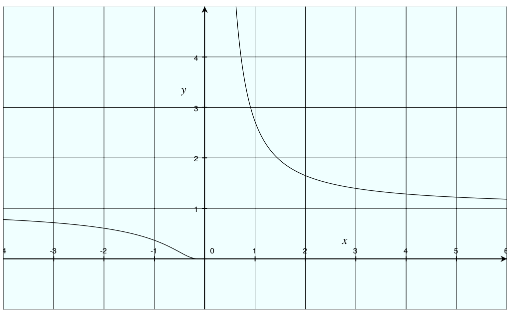
Exemple. La fonction $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
Elle se prolonge par continuité à $\mathbb{R}$ en posant $0 \longmapsto 1$.



Exemple. La fonction $x \longmapsto x \sin \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
Elle se prolonge par continuité à $\mathbb{R}$ en posant $0 \longmapsto 0$.



Exemple. La fonction $x \longmapsto e^{\frac{1}{x}}$ est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
Elle se prolonge par continuité de $]-\infty, 0[$ à $]-\infty, 0]$ en posant $0 \longmapsto 0$.
Elle ne se prolonge pas par continuité de $]0, +\infty[$ à $[0, +\infty[$.



Théorème 7. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et f atteint ses bornes. Plus précisément, il existe $x_1, x_2 \in [a,b]$ tels que $f(x_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$ et $f(x_2) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$.

La démonstration repose sur le résultat suivant, qui fait partie du programme de L2 et que nous admettrons en cours. Dans ces notes, nous en donnons une démonstration à titre indicatif.

Lemme 8 (Bolzano–Weierstrass). De tout suite bornée dans $\mathbb{R}$, on peut extraire une suite convergente.

Démonstration du lemme 8. Soit (u_n) une suite bornée dans $\mathbb{R}$. Par hypothèse, cette suite est contenue dans un intervalle $[a_0, b_0]$ de longueur $d_0 = b_0 - a_0$.
• Divisons l'intervalle $[a_0, b_0]$ en 2 intervalles de longueur $d_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$. Un au moins des deux intervalles contient une infinité de termes de la suite (un). Notons–le $[a_1, b_1]$.
• Divisons l'intervalle $[a_1, b_1]$ en 2 intervalles de longueur $d_2 = \frac{b_0 - a_0}{4}$. Un au moins des deux intervalles contient une infinité de termes de la suite (un). Notons–le $[a_2, b_2]$.
• etc ...
Par récurrence, on obtient ainsi une famille décroissante d'intervalles $[a_n, b_n]$ de longueur $d_n = (b_0 - a_0)2^{-n}$, qui contiennent chacun une infinité de termes de la suite (u_n). Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite ℓ. Posons $v_0 = u_0$.
• Comme $[a_1, b_1]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n), il existe un entier $\varphi(1) > 0$ tel que $v_1 = u_{\varphi(1)}$ appartienne à $[a_1, b_1]$.
• Comme $[a_2, b_2]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n), il existe un entier $\varphi(2) > \varphi(1)$ tel que $v_2 = u_{\varphi(2)}$ appartienne à $[a_2, b_2]$.
• etc ...
Par récurrence, on extrait ainsi une suite $v_n = u_{\varphi(n)}$ telle que $v_n \in [a_n, b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème des deux gendarmes, (v_n) converge vers ℓ. □

Démonstration du théorème 7.
(a) Rappelons que f est bornée sur $[a,b]$ si $\exists\, C \geq 0,\ \forall\, x \in [a,b],\ |f(x)| \leq C$. Supposons par l'absurde que f n'est pas bornée sur $[a,b]$ i.e.

$$\forall\, C \geq 0,\ \exists\, x \in [a,b],\ |f(x)| \leq C. \tag{7}$$

En prenant $C = n$ dans (7), on obtient une suite (x_n) dans $[a,b]$ telle que $|f(x_n)| > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le lemme 8, on peut extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $c \in [a,b]$. Par continuité de $|f|$, on a $|f(c)| = \lim_{n\to+\infty} |f(x_{\varphi(n)})| = +\infty$. Comme $f(c) \in \mathbb{R}$, on aboutit à une absurdité et on conclut que f est bornée sur $[a,b]$.
(b) Montrons que $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ est atteint. Rappelons que

$$\forall\, y < M,\ \exists\, x \in [a,b],\ y < f(x) \leq M. \tag{8}$$

En prenant $y = M - \frac{1}{n}$ dans (8) on obtient une suite (x_n) dans $[a,b]$ telle que $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$. D'après le lemme 8, on peut extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $c \in [a,b]$. D'une part, par continuité de f, on a $f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)})$. D'autre part, la suite $f(x_n)$ converge vers M, ainsi que la suite extraite $f(x_{\varphi(n)})$. En conclusion, $f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = M$. □

Exercice. Montrer de même que $\inf_{x\in[a,b]} f(x)$ est atteint.

Théorème 9 (valeurs intermédiaires). Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Démonstration. Le cas $f(a) = f(b)$ est immédiat. Supposons que $f(a) < f(b)$ et soit $y \in]f(a), f(b)[$. Notons c la borne supérieure de $X = \{\, x \in [a,b] \mid f(x) \leq y \,\}$. D'une part, il existe une suite (x_n) dans X qui converge vers c. Par continuité de f, on a $f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \leq y$. Donc c est le maximum de X. D'autre part, soit $x'_n \in]c,b]$ une suite convergeant vers c. La suite image $y_n = f(x'_n)$ est $> y$ et elle converge vers $f(c)$, par continuité de f. Donc $f(c) \geq y$. En conclusion, $f(c) = y$. □

Corollaire 10. L'image d'un intervalle fermé $[a, b]$ par une application continue est un intervalle du même type

Démonstration. D'après le théorème 7, f atteint sur $[a, b]$ son minimum α et son maximum β. D'après le théorème 9, f prend toutes les valeurs comprises entre α et β. En conclusion, $f([a, b]) = [\alpha, \beta]$. $\square$

Remarque. L'image de tout intervalle par une application continue est un intervalle (qui peut être d'un type différent).

Exemple. Toute application polynomiale $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de degré impair est surjective.

Université d'Orléans
UFR Sciences
Département de Mathématiques

Licence 1 – Semestre 1
Tronc commun Maths – Info
Automne 2010

SLO1MA12 – Introduction au raisonnement mathématique 2 – Analyse

Adresse à consulter sur l'ENT (Environnement Numérique de Travail) :

http://moodle–uo.univ–pucvl.fr/course/view.php?id=1510

Chapitre 5. Dérivées

§ 1. Définitions et propriétés de base

Cadre. Sauf mention contraire,
- I désignera un intervalle dans $\mathbb{R}$,
- a un point de I,
- $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I, à valeurs réelles.

Définition. La fonction f est *dérivable* au point a si le quotient

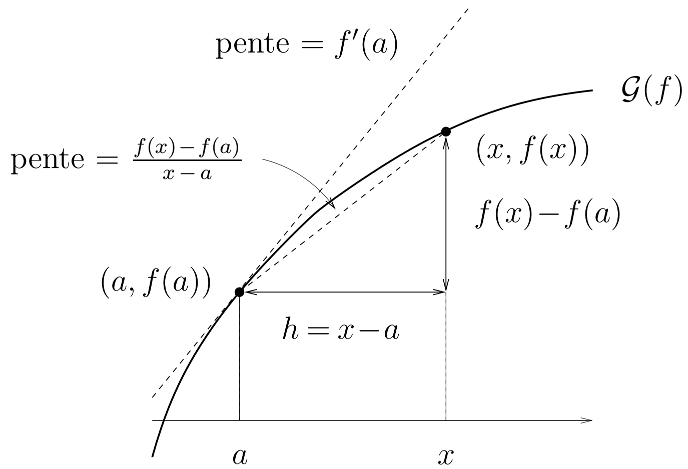
(1) $$\tfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

admet une limite lorsque $x \in I \smallsetminus \{a\}$ tend vers a.

Remarques.
- Ecrivons la définition précédente sous forme quantifiée :

(2) $$\exists\, \ell \in \mathbb{R},\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, x \in I \text{ avec } 0 < |x-a| < \eta, \text{ on a } \Big|\tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell\Big| < \varepsilon.$$

- *Notation* : La dérivée de f au point a est notée $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$.
- *Interprétation géométrique* :
  $f'(a)$ est la pente de la tangente au graphe $\mathcal{G}(f)$ de f au point $(a, f(a))$.



- On écrit souvent la définition de la dérivée, en utilisant l'accroissement $h = x - a$ et en sous-entendant la condition $a+h \in I$.

$$f'(a) = \begin{cases} \lim_{h \underset{\neq}{\to} 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} & \text{si } a \text{ est un point intérieur à } I, \\ \lim_{h \underset{>}{\to} 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} & \text{si } a \text{ est le minimum de } I, \\ \lim_{h \underset{<}{\to} 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} & \text{si } a \text{ est le maximum de } I. \end{cases}$$

- Il arrive qu'une fonction f ne soit pas dérivable en un point a intérieur à I mais qu'elle possède une dérivée à droite ou à gauche en a :
$$f'(a^+) = \lim_{h \underset{>}{\to} 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,, \qquad f'(a^-) = \lim_{h \underset{<}{\to} 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,.$$
Par exemple, la fonction $f(x)=|x|$ n'est pas dérivable à l'origine, mais elle possède des dérivées à droite et à gauche à l'origine : $f'(0^\pm)=\pm 1$.

Définition. La fonction f est dérivable si elle est dérivable en tout point de I.

Proposition 1. Une fonction dérivable est continue.
Plus précisément, si f est dérivable au point a, alors f est continue au point a.

Démonstration. Lorsque x tend vers a dans I,
$$f(x) = \underbrace{\tfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)} \underbrace{(x-a)}_{\to 0} + f(a)$$
tend vers $f(a)$. $\square$

Remarque. La réciproque est fausse. Par exemple,
- la fonction $f(x)=|x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, mais pas à l'origine ;
- la fonction $f(x)=\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, mais pas à l'origine.

§ 2. Règles de dérivation

Théorème 2.
- *Somme* : $(f+g)' = f'+g'$
- ○ *Différence* : $(f-g)' = f'-g'$
- *Produit* : $(f\,g)' = f'g+f\,g'$
- *Quotient* : $\big(\frac{f}{g}\big)' = \frac{f'g-f\,g'}{g^2}$
- ○ *Inverse* : $\big(\frac{1}{f}\big)' = -\frac{f'}{f^2}$
- *Composition* : $(g\circ f)' = (g'\circ f)\, f'$
  Reformulation : $(g\circ f)'(x) = g'(y)\,f'(x)$, où $y=f(x)$
- *Réciproque* : $(f^{-1})' = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}$
  Reformulation : $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, où $y=f(x)$ c'est–à–dire $x=f^{-1}(y)$

Démonstration pour la somme ou la différence : Lorsque $x\to a$,
$$\frac{f(x)\pm g(x)-[f(a)\pm g(a)]}{x-a} = \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)} \pm \underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\to g'(a)} \longrightarrow f'(a)\pm g'(a).$$
$\square$

Démonstration pour le produit : Lorsque $x\to a$,
$$\frac{f(x)\,g(x)-f(a)\,g(a)}{x-a} = \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)} g(a) + \underbrace{f(x)}_{\to f(a)} \underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\to g'(a)} \longrightarrow f'(a)\,g(a)+f(a)\,g'(a),$$
car $g(x)\to g(a)$ par continuité de g. $\square$

Démonstration pour l'inverse : Lorsque $x\to a$,
$$\frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(a)}}{x-a} = -\frac{1}{f(a)} \underbrace{\frac{1}{f(x)}}_{\to \frac{1}{f(a)}} \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)} \longrightarrow -\frac{f'(a)}{f(a)^2}\,,$$
car $f(x)\to f(a)$ par continuité de f. $\square$

Démonstration pour le quotient : En combinant les règles pour le produit et pour l'inverse, on obtient
$$\big(\tfrac{f}{g}\big)' = \big(f\,\tfrac{1}{g}\big)' = f'\,\tfrac{1}{g} + f\,\big(\tfrac{1}{g}\big)' = \tfrac{f'}{g} - f\,\tfrac{g'}{g^2} = \tfrac{f'\,g-f\,g'}{g^2}\,. \qquad \square$$

Démonstration pour la composition : Lorsque $x\to a$,
$$\tfrac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)}{x-a} = \underbrace{\tfrac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}}_{\to g'(f(a))}\underbrace{\tfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)} \longrightarrow g'(f(a))\,f'(a),$$
car $f(x)\to f(a)$ par continuité de f. $\square$

Démonstration pour la réciproque : En appliquant la règle pour la composition à
$$(f^{-1}\circ f)(x) = x\,,$$
on obtient
$$(f^{-1})'(f(x))\,f'(x) = 1 \quad \text{i.e.} \quad (f^{-1})'(y) = \tfrac{1}{f'(x)}\,, \qquad \square$$

Autre démonstration pour l'inverse : En appliquant la règle pour la composition avec $g(y)=\frac{1}{y}$, on obtient
$$\big(\tfrac{1}{f}\big)' = -\tfrac{1}{f^2}\,f' = -\tfrac{f'}{f^2}\,. \qquad \square$$

§ 3. Dérivées des fonctions classiques

- La dérivée de $f(x)=x^n$ est $f'(x)=n\,x^{n-1}$.

  Démonstration. D'après la formule du binôme de Newton,
  $$(a+h)^n = \sum\nolimits_{k=1}^{n} \tfrac{n!}{k!\,(n-k)!}\,a^{n-k}\,h^k.$$
  On en déduit que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = n\,a^{n-1} + \big(\dots\big)h$ tend vers $n\,a^{n-1}$ lorsque $x \overset{\neq}{\to} a$.
- En appliquant les règles de dérivation, on en déduit la dérivée d'une fonction polynômiale ou rationnelle.
- Par définition, la dérivée de $f(x)=\ln x$ est $f'(x)=\frac{1}{x}$.
- La dérivée de $f(x)=e^x$ est $f'(x)=e^x$.

  Démonstration. On applique la formule de dérivation d'une fonction réciproque.
- La dérivée de $f(x)=\sin x$ est $f'(x)=\cos x$.

  Démonstration :
  $$\tfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \tfrac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \tfrac{\cos a\,\sin h+\sin a\,\cos h-\sin a}{h} = \cos a\,\overbrace{\tfrac{\sin h}{h}}^{\to 1} - \sin a\,\overbrace{\tfrac{1-\cos h}{h}}^{\to 0} \to \cos a\,.$$
- La dérivée de $f(x)=\cos x$ est $f'(x)=-\sin x$.

  Démonstration :
  $$\tfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \tfrac{\cos(a+h)-\cos a}{h} = \tfrac{\cos a\,\cos h-\sin a\,\sin h-\cos a}{h} = -\sin a\,\overbrace{\tfrac{\sin h}{h}}^{\to 1} - \cos a\,\overbrace{\tfrac{1-\cos h}{h}}^{\to 0} \to -\sin a\,.$$
- La dérivée de $f(x)=\tan x$ est $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$.

  Démonstration. On applique la règle du quotient à $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$.
- Les dérivées des fonctions trigonométriques réciproques sont données par

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{Arc}\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Arc}\cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Arc}\tan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

  Démonstration. On applique la formule de dérivation d'une fonction réciproque.

Remarque. Certaines limites classiques sont des cas particuliers de la formule

$$\lim_{\substack{x\to a\\ \neq}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)\,.$$

Par exemple $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$

§ 4. Dérivée première et variation

Rappelons qu'une fonction $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite
- *croissante* si, $\forall\, x, y \in I,\ x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$,
- *décroissante* si, $\forall\, x, y \in I,\ x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$,
- *monotone* si elle est croissante ou décroissante,
- *strictement croissante* si, $\forall\, x, y \in I,\ x < y \implies f(x) < f(y)$,
- *strictement décroissante* si, $\forall\, x, y \in I,\ x < y \implies f(x) > f(y)$,
- *strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Proposition 3. Soit $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.
(a) f est croissante si et seulement si $f' \geq 0$.
(b) f est décroissante si et seulement si $f' \leq 0$.
(c) Si $f' > 0$, alors f est strictement croissante.
(d) Si $f' > 0$, alors f est strictement décroissante.

Démonstration. Si f est croissante, alors

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0\,.$$

De même, $f'(a) \leq 0$ si f est décroissante. Les autres points se déduisent des résutats du § 5 (théorème de la moyenne ou formule des accroissements finis). Plus précisément, étant donné $a < b$ dans I, il existe $c \in\,]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$. On en déduit que

$$\begin{cases} f(b) \geq f(a) & \text{si } f' \geq 0, \\ f(b) \leq f(a) & \text{si } f' \leq 0, \\ f(b) > f(a) & \text{si } f' > 0, \\ f(b) < f(a) & \text{si } f' < 0. \end{cases}$$

□

Remarque. Il peut arriver qu'une fonction soit strictement monotone et que sa dérivée s'annule. Par exemple, $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $f'(x) = 3\,x^2$ s'annule en $x = 0$.

Définition. La fonction f a un *maximum local* en a si

$$\exists\, \eta > 0,\ \forall\, x \in I \text{ avec } |x-a| < \eta,\ f(x) \leq f(a).$$

La fonction f a un *maximum global* en a si

$$\forall\, x \in I,\ f(x) \leq f(a).$$

La notion de *minimum* (*local*/*global*) est définie de manière analogue.
Un *extremum* (*local*/*global*) est un maximum ou un minimum (local/global).

Définition. On dit que a est un *point stationnaire* de f si f est dérivable au point a et si $f'(a) = 0$.

Proposition 4. Soit $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Si f a un extremum local en un point a intérieur à I, alors a est un point stationnaire de f.

Démonstration. Supposons que f a un minimum local en a. Comme $f(x) \geq f(a)$ lorsque x est proche de a, on a d'une part

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

et d'autre part

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0\,.$$

Par conséquent $f'(a) = 0$. □

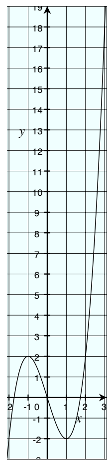
Remarque. Il n'y a pas de correspondance exacte entre extrema locaux et points stationnaires.

- Une fonction peut avoir un extremum local en un point où elle n'est pas dérivable. Par exemple, la fonction $f(x) = |x|$ a un minimum global en $x = 0$.
- Certains points stationnaires ne correspondent pas à des extrema locaux. Par exemple, $x = 0$ est un point stationnaire de la fonction $f(x) = x^3$, qui est strictement croissante.
- La dérivée ne permet pas de détecter les extrema éventuels de f aux bornes de I.

Application : Détermination des extrema globaux d'une fonction dérivable $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

- Déterminer les points stationnaires de f en résolvant l'équation $f'(x) = 0$.
- Parmi les point stationnaires, déterminer les extrema locaux en utilisant notamment le signe de f'.
- Comparer ces extrema locaux avec $f(a)$ et $f(b)$.

Exemple : Considérons la fonction $f(x) = x^3 - 3\,x$ sur l'intervalle $[-2, 3\,]$.
Dérivée : $f'(x) = 3\,(x^2 - 1)$
Points stationnaires : $x = \pm 1$



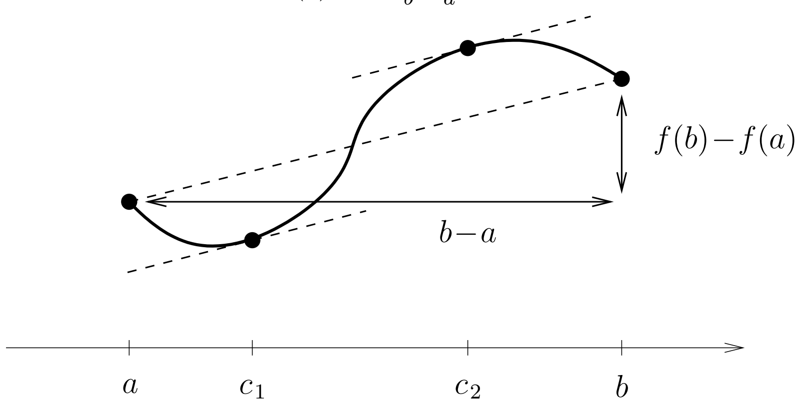
x	-2		-1		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	18

Minimum global $f(x) = -2$ en $x = 1$ et en $x = -2$
Maximum global $f(x) = 18$ en $x = 3$
Maximum local $f(x) = -2$ en $x = -1$

§ 5. Théorème de la moyenne, formule des accroissements finis

Théorème 5 (théorème de la moyenne). Soit $f : [a, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors il existe $c \in\,]a, b\,[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$



Démonstration. (i) Commençons par le cas particulier où $f(a) = f(b) = 0$. Si $f = 0$, tout point $c \in]a, b[$ convient. Si $f \neq 0$, f atteint un extremum non nul en un point $c \in [a, b]$. Comme $f(c) \neq 0$, c n'est pas une borne de l'intervalle $[a, b]$. D'après la proposition 4, on a $f'(c) = 0$.
(ii) Dans le cas général, considérons

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Alors g est une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{et} \quad g(a) = g(b) = 0.$$

D'après (i), il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est–à–dire $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. □

Le résultat suivant est une reformulation du théorème de la moyenne.

Corollaire 6 (formule des accroissements finis). Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant a et $a+h$. Alors il existe $0 < \theta < 1$ tel que

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)\, h}$$

Corollaire 7. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors $f' = 0$ si et seulement si f est constante.

Remarque : La formule des accroissements finis est un cas particulier de la formule de Taylor, au programme du semestre 2. Ces formules permettent entre autres d'approximer et d'estimer des fonctions par des polynômes. Voici quelques exemples d'estimations classiques.

- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$.
  D'après la formule des accroissements finis, on a, pour tout $h \in \mathbb{R}$,
  $$e^h = e^0 + e^{\theta h}\, h = 1 + h + (e^{\theta h} - 1)\, h \geq 1 + h.$$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln x \leq x - 1$.
  D'après la formule des accroissements finis, on a, pour tout $h \in]-1, +\infty[$,
  $$\ln(1+h) = \ln 1 + \frac{1}{1+\theta h}\, h = h - \frac{\theta h^2}{1+\theta h} \leq h.$$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sin x \leq x$.
  D'après la formule des accroissements finis, on a, pour tout $h \in \mathbb{R}^+$,
  $$\sin h = \sin 0 + \cos(\theta h)\, h \leq h.$$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \operatorname{sh} x \geq x$.
  D'après la formule des accroissements finis, on a, pour tout $h \in \mathbb{R}^+$,
  $$\operatorname{sh} h = \operatorname{sh} 0 + \operatorname{ch}(\theta h)\, h \geq h.$$

§ 6. Dérivée seconde et applications (convexité, concavité, points d'inflexion)

Non traité