TP Scilab – EDO

Exercice 1. : **Introduction aux schémas à un pas**

On considère l'équation différentielle ordinaire :

$$\dot{y} = -y^2, \quad y(0) = 1.$$

1. Résoudre cette équation numériquement avec la méthode d'Euler explicite / Euler implicite sur $[0,1]$. Comparer à la solution exacte. Estimer l'ordre de la méthode grpahiquement. *(N'oubliez pas de mettre titres et légendes à vos figures).*
2. Résoudre cette équation numériquement avec la méthode RK4 sur $[0,1]$. Illustrer et calculer l'ordre de la méthode. *(On peut se servir de l'option* `logflag="ll"`).

Exercice 2. On considère l'équation différentielle $y'(t) = 3y(t) - 3t$ avec $y(0) = 1/3$ sur l'intervalle $[0,20]$

1. Programmer le schéma d'Euler explicite pour l'équation ci-dessus.
2. Calculer la solution exacte du problème. Comparer les solutions exactes et numériques.
3. Calculer la solution exacte pour $y(0) = 1/3 + \epsilon$. Que dire de $y(20)$?

Exercice 3. : **Attracteur de Lorenz**
On considère le système de Lorenz :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= s(y-x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}$$

avec $s = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$.

1. Résoudre ce système numériquement avec la méthode d'Euler explicite sur $[0,10]$ pour différentes valeurs des données initiales (x_0, y_0, z_0). On pourra superposer ces courbes en utilisant `param3d`.
2. Résoudre cette équation numériquement avec la méthode RK4 sur $[0,10]$.
3. Résoudre avec une donnée initiale plus proche d'un des points stationnaires. Comparer les deux méthodes dans ce cas.

Exercice 4. Pour $a > 0$ on considère le problème

$$\begin{cases} y'(t) = a(\cos t - y(t))\,, & t \in [0, \pi/2]\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Quelle est la solution exacte ? Tracer les solutions exactes et numériques (obtenues par Euler explicite et implicite) pour

$$\{(a,h) \mid h = 0.1\,,\ 0.05\,,\ 0.01 \text{ et } a = 10\,,\ 20\,,\ 30\}\,.$$

Le paramètre `rect=[xmin,ymin,xmax,ymax]` permet de fixer le cadre.

Exercice 5. On considère le système

$$\left\{ \begin{array}{ll} y'' + 2cu' + ku = 0\,, & t \in [0,T]\,, \\ y(0) = y_0\,, \quad y'(0) = y_1\,. & \end{array} \right.$$

Pour $T = 10$, $c = 0.5$, $k = 1$ puis $k = 10$, $N = 50$ ou 500, implémenter les algorithmes d'Euler implicite et explicite. Calculer l'erreur dans chaque cas après avoir calculé la solution exacte.

Précisions sur les schémas . Pour résoudre le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right.$$

où $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est "suffisamment" régulière, les méthodes à un pas sont des méthodes numériques relativement élémentaires qui permettent de calculer une solution approchée pour ce problème. Elles se mettent sous la forme :

$$\begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n), 0 \leq n \leq N, \\ \text{avec } h_n = t_{n+1} - t_n. \end{array}$$

Les méthodes à un pas les plus fréquemment utilisées sont la méthode d'Euler et la méthode de Runge Kutta "classique" (RK4) définies respectivement par

$$\begin{array}{l} n = 0, 1, \ldots \\ \qquad y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) \\ n = 0, 1, \ldots \\ \qquad p_{n,1} = f(t_n, y_n) \\ \qquad t_{n,2} = t_n + \frac{1}{2} h_n \\ \qquad y_{n,2} = y_n + \frac{1}{2} h_n p_{n,1} \\ \qquad p_{n,2} = f(t_{n,2}, y_{n,2}) \\ \qquad y_{n,3} = y_n + \frac{1}{2} h_n p_{n,2} \\ \qquad p_{n,3} = f(t_{n,2}, y_{n,3}) \\ \qquad y_{n,4} = y_n + h_n p_{n,3} \\ \qquad t_{n+1} = t_n + h_n \\ \qquad p_{n,4} = f(t_{n+1}, y_{n,4}) \\ \qquad y_{n+1} = y_n + h_n \left(\frac{1}{6} p_{n,1} + \frac{1}{3} p_{n,2} + \frac{1}{3} p_{n,3} + \frac{1}{6} p_{n,4} \right) \end{array}$$